Cálculo diferencial e integral

NOVENA EDICIÓN



Purcell Varberg Rigdon

FORMAS HIPERBÓLICAS

78 $\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

79 $\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

80 $\int \tanh u\, du = \ln(\cosh u) + C$

81 $\int \coth u\, du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

82 $\int \operatorname{sech} u\, du = \tan^{-1}|\operatorname{senh} u| + C$

83 $\int \operatorname{csch} u\, du = \ln\left|\tanh \frac{u}{2}\right| + C$

84 $\int \operatorname{senh}^2 u\, du = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2u - \frac{u}{2} + C$

85 $\int \cosh^2 u\, du = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2u + \frac{u}{2} + C$

86 $\int \tanh^2 u\, du = u - \tanh u + C$

87 $\int \coth^2 u\, du = u - \coth u + C$

88 $\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$

89 $\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$

90 $\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$

91 $\int csc\, u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$

FORMAS ALGEBRAICAS DIVERSAS

92. $\int u(au + b)^{-1}\, du = \frac{u}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|au + b| + C$

93 $\int u(au + b)^{-2}\, du = \frac{1}{a^2}\left[\ln\triangle|au + b| + \frac{b}{au + b}\right] + C$

94 $\int u(au + b)^n\, du = \frac{u(au + b)^{n+1}}{a(n + 1)} - \frac{(au + b)^{n+2}}{a^2(n + 1)(n + 2)} + C$ si $n \neq -1, -2$

95 $\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n - 1)}\left(\frac{u}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} + (2n - 3)\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}}\right)$ si $n \neq 1$

96 $\int u\sqrt{au + b}\, du = \frac{2}{15a^2}(3au - 2b)(au + b)^{3/2} + C$

97 $\int u^n\sqrt{au + b}\, du = \frac{2}{a(2n + 3)}\left(u^n(au + b)^{3/2} - nb\int u^{n-1}\sqrt{au + b}\, du\right)$

98 $\int \frac{u\, du}{\sqrt{au + b}} = \frac{2}{3a^2}(au - 2b)\sqrt{au + b} + C$

99 $\int \frac{u^n\, du}{\sqrt{au + b}} = \frac{2}{a(2n + 1)}\left(u^n\sqrt{au + b} - nb\int \frac{u^{n-1}\, du}{\sqrt{au + b}}\right)$

100a $\int \frac{du}{u\sqrt{au + b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{au + b} - \sqrt{b}}{\sqrt{au + b} + \sqrt{b}}\right| + C$ si $b > 0$

100b $\int \frac{du}{u\sqrt{au + b}} = \frac{2}{\sqrt{-b}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{au + b}{-b}} + C$ si $b < 0$

101 $\int \frac{du}{u^n\sqrt{au + b}} = -\frac{\sqrt{au + b}}{b(n - 1)u^{n-1}} - \frac{(2n - 3)a}{(2n - 2)b}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{au + b}}$ si $n \neq 1$

102 $\int \sqrt{2au - u^2}\, du = \frac{u - a}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u - a}{a} + C$

103 $\int \frac{du}{u\sqrt{2au - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u - a}{a} + C$

104 $\int u^n\sqrt{2au - u^2}\, du = -\frac{u^{n-1}(2au - u^2)^{3/2}}{n + 2} + \frac{(2n + 1)a}{n + 2}\int u^{n-1}\sqrt{2au - u^2}\, du$

105 $\int \frac{u^n\, du}{\sqrt{2au - ug^2}} = -\frac{u^{n-1}}{n}\sqrt{2au - u^2} + \frac{(2n - 1)a}{n}\int \frac{u^{n-1}\, du}{\sqrt{2au - u^2}}$

106 $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u}\, du = \sqrt{2au - u^2} + a\operatorname{sen}^{-1}\frac{u - a}{a} + C$

107 $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^n}\, du = \frac{(2au - u^2)^{3/2}}{(3 - 2n)au^n} + \frac{n - 3}{(2n - 3)a}\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^{n-1}}\, du$

108 $\int \frac{du}{u^n\sqrt{2au - u^2}} = \frac{\sqrt{2au - u^2}}{a(1 - 2n)u^n} + \frac{n - 1}{(2n - 1)a}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{2au - u^2}}$

109 $\int (\sqrt{2au - u^2})^n\, du = \frac{u - a}{n + 1}(2au - u^2)^{n/2} + \frac{na^2}{n + 1}\int (\sqrt{2au - u^2})^{n-2}\, du$

110 $\int \frac{du}{(\sqrt{2au - u^2})^n} = \frac{u - a}{(n - 2)a^2}(\sqrt{2au - u^2})^{2-n} + \frac{n - 3}{(n - 2)a^2}\int \frac{du}{(\sqrt{2au - u^2})^{n-2}}$

INTEGRALES DEFINIDAS

111 $\int_0^{\infty} u^n e^{-u}\, du = \Gamma(n + 1) = n! \quad (n \geq 0)$

112 $\int_0^{\infty} e^{-au^2}\, du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$

113 $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n u\, du = \int_0^{\pi/2} \cos^n u\, du = \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot n}\frac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ es un entero par y } n \geq 2 \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (n - 1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot n} & \text{si } n \text{ es un entero impar y } n \geq 3 \end{cases}$

1600 1700

Descartes



Newton



Leibniz



Euler



J. Kepler (1571-1630)
R. Descartes (1596-1650)
B. Pascal (1623-1662)
I. Newton (1642-1727)
G. Leibniz (1646-1716)
L'Hôpital (1661-1704)
J. Bernoulli (1667-1748)
L. Euler (1707-1783)
M. Agnesi (1718-1799)



Kepler



Pascal



L'Hôpital



Bernoulli

Contribuidores del Cálculo

[El cálculo es] el resultado de una dramática lucha intelectual que ha durado los últimos veinticinco siglos.

—*Richard Courant*

1609 — Leyes de Kepler del movimiento planetario

1637 — Geometría analítica de Descartes

1665 — Newton descubre el cálculo

1696 — Primer texto de cálculo (L'Hôpital)

1728 — Euler introduce e

1800

1900

Otros contribuidores
Pierre de Fermat (1601-1665)
Michel Rolle (1652-1719)
Brook Taylor (1685-1731)
Colin Maclaurin (1698-1746)
Thomas Simpson (1710-1761)
Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)
George Green (1793-1841)
George Gabriel Stokes (1819-1903)

Lagrange



Gauss



Cauchy



Riemann



Lebesgue



J. Lagrange (1736-1813)
C. Gauss (1777-1855)
A. Cauchy (1789-1857)
K. Weierstrass (1815-1897)
G. Riemann (1826-1866)
J. Gibbs (1839-1903)
S. Kovalevsky (1850-1891)
H. Lebesgue (1875-1941)



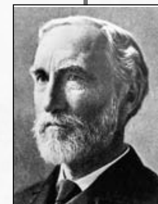
Agnesi



Weierstrass



Kovalevsky



Gibbs

1756 Lagrange inicia su *Mécanique analytique*

1799 Gauss demuestra el teorema fundamental del álgebra

1821 Noción precisa de límite (Cauchy)

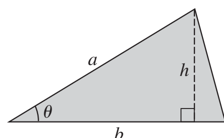
1854 Integral de Riemann

1873 e es trascendental (Hermite)

1902 Integral de Lebesgue

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

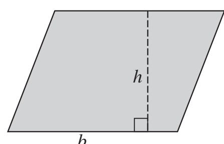
Triángulo



$\text{Área} = \frac{1}{2}bh$

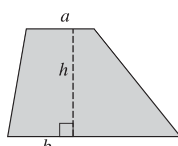
$\text{Área} = \frac{1}{2}ab \text{ sen } \theta$

Paralelogramo



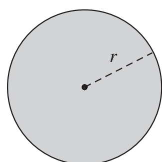
$\text{Área} = bh$

Trapecio



$\text{Área} = \frac{a+b}{2}h$

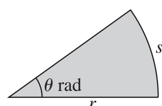
Círculo



$\text{Circunferencia} = 2\pi r$

$\text{Área} = 2\pi r$

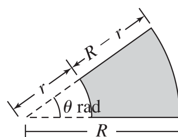
Sector circular



$\text{Longitud de arco} = r\theta$

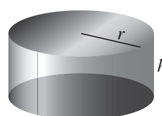
$\text{Área} = \frac{1}{2}r^2\theta$

Rectángulo polar



$\text{Área} = \frac{R+r}{2}(R-r)\theta$

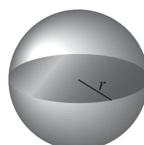
Cilindro circular recto



$\text{Área lateral} = 2\pi rh$

$\text{Volumen} = \pi r^2 h$

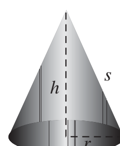
Esfera



$\text{Área} = 4\pi r^2$

$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi r^3$

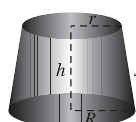
Cono circular recto



$\text{Área lateral} = \pi rs$

$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

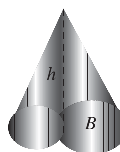
Tronco de un cono circular recto



$\text{Área lateral} = \pi s(r+R)$

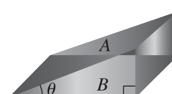
$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi(r^2 + rR + R^2)h$

Cono general



$\text{Volumen} = \frac{1}{3}(\text{área } B)h$

Cuña



$\text{Área } A = (\text{área } B) \sec \theta$

Cálculo diferencial e integral

NOVENA EDICIÓN

Edwin J. Purcell
University of Arizona

Dale Varberg
Hamline University

Steven E. Rigdon
Southern Illinois University Edwardsville

Traducción:

Víctor Hugo Ibarra Mercado
Escuela de actuaría, Universidad Anáhuac
ESFM-IPN

Revisión Técnica:

Linda Margarita Medina Herrera
Natella Antonyan
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Ciudad de México

Jorge Arturo Rodríguez Chaparro
Jefe del Departamento de Matemáticas
Colegio San Jorge de Inglaterra
Bogotá Colombia



México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

PURCELL, EDWIN J., VARBERG, DALE;
RIGDON, STEVEN E.

Cálculo diferencial e integral

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2007

ISBN: 978-970-26-0989-6
Área: Bachillerato

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 520

Edición en español
Editor: Enrique Quintanar Duarte
e-mail: enrique.quintanar@pearsoned.com
Editora de desarrollo: Claudia C. Martínez Amigón
Supervisor de producción: Rodrigo Romero Villalobos

Edición en inglés

Acquisitions Editor: *Adam Jaworski*
Editor-in-Chief: *Sally Yagan*
Project Manager: *Dawn Murrin*
Production Editor: *Debbie Ryan*
Assistant Managing Editor: *Bayani Mendoza de Leon*
Senior Managing Editor: *Linda Mihatov Behrens*
Executive Managing Editor: *Kathleen Schiaparelli*
Manufacturing Buyer: *Lisa McDowell*
Manufacturing Manager: *Alexis Heydt-Long*
Director of Marketing: *Patrice Jones*
Executive Marketing Manager: *Halee Dinsey*
Marketing Assistant: *Joon Won Moon*
Development Editor: *Frank Purcell*
Editor-in-Chief, Development: *Carol Trueheart*
Art Director: *Heather Scott*
Interior Designer: *Judith Matz-Coniglio*
Cover Designer: *Tamara Newnam*
Art Editor: *Thomas Benfatti*
Creative Director: *Juan R. López*
Director of Creative Services: *Paul Belfanti*
Manager, Cover Visual Research & Permissions: *Karen Sanatar*
Director, Image Resource Center: *Melinda Reo*
Manager, Rights and Permissions: *Zina Arabia*
Manager, Visual Research: *Beth Brenzel*
Image Permission: *Vickie Menanteaux*
Cover Photo: *Massimo Listri/Corbis; Interior view of Burj Al Arab Hotel, Dubai, United Arab Emirates*

NOVENA EDICIÓN, 2007



ISBN 10: 970-26-0989-5
ISBN 13: 978-970-26-0989-6

Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 10 09 08 07

A
Pat, Chris, Mary y Emily

Contenido

4 La integral definida 215

5 Aplicaciones de la integral 275

6 Funciones trascendentales 325

7 Técnicas de integración 383

Agradecimientos

Agradecemos a todos los profesores que han sido leales usuarios y han impartido la materia de Cálculo en los países de habla hispana con el apoyo del reconocido libro de Purcell. Sus valiosos comentarios han servido para enriquecer el desarrollo de la actual edición. Esperamos que con el uso de este texto cumplan satisfactoriamente los objetivos del programa del curso y preparen a sus alumnos para enfrentar los retos actuales dentro del ámbito de las matemáticas. En especial deseamos agradecer el apoyo y retroalimentación que nos han dado los siguientes profesores:

COLOMBIA

Clermont
Mauricio Roa

Colegio Agustiniano Ciudad Salitre
Hugo Hernán Rubio

Colegio Agustiniano de Suba
John Jairo Suárez

Colegio Agustiniano Norte
Yazmín Castro

Colegio Bautista
Luis Hernando López

Colegio Berchmans
Arnaldo Ruiz

Colegio Calasanz
Armando Villamizar

Colegio Calatrava
Francisco Valderrama

Colegio Cervantes Norte
Juan Lizárraga

Colegio del Rosario Santo Domingo
Rosalba Corredor

Colegio El Pinar
Freddy Mondragón

Colegio Emmanuel D'alzon
Alexis Valencia

Colegio Franciscano De Pio Xii
José Luis Pérez

Colegio Hispanoamericano
Raúl Vacca
Marabely Ramírez

Colegio Jordán de Sajonia
José Romero

Colegio Nuestra Señora del Rosario
Gloria Aguilar

Colegio San Antonio María Claret
Patricia Duarte

Colegio San Patricio
Jorge Enrique Peña

Colegio Santa Clara
Luis Villamizar

Colegio Santa Dorotea
Octavio Cambindo

Gimnasio Británico
José Vicente Contreras
John Jairo Estrada

Gimnasio La Arboleda
Esperanza Sánchez

Gimnasio La Montaña
Claudia Rodríguez

Gimnasio Los Andes
Martín Tello

Gimnasio Moderno
Hugo Hernán Chávez López

Inst. San Bernardo de La Salle
Augusto Vivas

Instituto Colsubsidio de Educación Femenina ICEF
Yolanda Cruz

Nuevo Colombo Británico
Astrid Torregrosa

Portales
Zulema León

Rosario Quinta Mutis
Wilson Alcántara

San Facon
Aura Beatriz García

San Patricio
Jorge Peña

San Tarsicio
Jorge Velasco

MÉXICO

CEBETIS # 225
Uriel García Rico

CECyT # 9
Hermenegildo Barrera Hernández
Ubaldo Bonilla Jiménez

CETI-Colomos
Jesús Salvador Escobedo Solís
Asunción González Loza
Francisco Javier Hernández Patiño
Patricia Lamas Huerta
Óscar Mesina Reyes
Ángel Villagrana Villa

Colegio Anáhuac Chapalita
Humberto Contreras Pérez

Prefacio

De nuevo, la novena edición de *Cálculo* es una revisión modesta. Se han agregado algunos temas y otros se han reacomodado, pero el espíritu del libro ha permanecido sin alteraciones. Los usuarios de las ediciones precedentes nos han informado del éxito que tuvieron y no tenemos la intención de restarle ventajas a un texto bastante viable.

Para muchos, este libro aún será considerado como un texto tradicional. En su mayoría, se demuestran los teoremas, se dejan como ejercicio o se dejan sin demostrar cuando la comprobación es demasiado difícil. Cuando esto último sucede, tratamos de dar una explicación intuitiva para que el resultado sea plausible, antes de pasar al tema siguiente. En algunos casos, damos un bosquejo de una demostración, en cuyo caso explicamos por qué es un bosquejo y no una demostración rigurosa. El objetivo sigue siendo la comprensión de los conceptos de cálculo. Aunque algunos ven al énfasis en la presentación clara y rigurosa como una distracción para la comprensión del cálculo, nosotros vemos que ambas son complementarias. Es más probable que los estudiantes comprendan los conceptos si los términos se definen con nitidez y los teoremas se enuncian y demuestran claramente.

Un texto breve La novena edición continúa siendo la obra más breve de los principales textos de cálculo exitosos. Hemos tratado de no saturar el texto con temas nuevos y enfoques alternativos. En menos de 800 páginas tratamos la mayor parte de los temas de cálculo; entre ellos, un capítulo preliminar y el material de límites a cálculo vectorial. En décadas recientes, los estudiantes han desarrollado malos hábitos. Desean encontrar el ejemplo resuelto de modo que coincida con el problema de su tarea. Nuestro objetivo con este texto continúa manteniendo al cálculo como un curso centrado en determinadas ideas básicas en torno a palabras, fórmulas y gráficas. La resolución de los conjuntos de problemas, crucial para el desarrollo de habilidades matemáticas, no debe eclipsar el objetivo de comprensión del cálculo.

Problemas de revisión de conceptos Para alentar a los estudiantes a leer y entender el texto, a cada conjunto de problemas le preceden cuatro cuestiones para completar. Éstas prueban el dominio del vocabulario básico, comprensión de los teoremas y la habilidad para aplicar los conceptos en contextos más sencillos. Los estudiantes deben responder estos cuestionamientos antes de pasar a los problemas siguientes. Fomentamos esto para dar una retroalimentación inmediata; las respuestas correctas se proporcionan al final del conjunto de problemas. Estos puntos también hacen algunas preguntas de examen para ver si los estudiantes han hecho la lectura necesaria y están preparados para la clase.

Problemas de repaso e introducción También hemos incluido un conjunto de problemas de repaso e introducción entre el final de un capítulo y el inicio del siguiente. Muchos de estos problemas obligan a los estudiantes a repasar temas anteriores antes de iniciar el nuevo capítulo. Por ejemplo.

- Capítulo 3, Aplicaciones de la derivada: se les pide a los estudiantes resolver desigualdades como las que surgen cuando preguntamos en dónde una función es creciente/decreciente o cóncava hacia arriba/hacia abajo.
- Capítulo 7, Técnicas de integración: se les pide a los estudiantes evaluar varias integrales que incluyen el método de sustitución, la única técnica significativa que han aprendido hasta ese momento. La falta de práctica en la aplicación de esta técnica podría significar un desastre en el capítulo 7.

Otros problemas de repaso e introducción piden a los estudiantes utilizar lo que ya conocen para obtener una ventaja en el capítulo siguiente. Por ejemplo,

- Capítulo 5, Aplicaciones de la integral: se les pide a los estudiantes determinar la longitud de un segmento de línea entre dos funciones, exactamente la habilidad que se requiere en el capítulo para realizar lo que llamaremos *rebanar, aproximar*

e *integrar*. Además, se les pide a los estudiantes determinar el volumen de un disco pequeño, una arandela y un cascarón. Al haber resuelto esto antes de iniciar el capítulo los estudiantes estarán mejor preparados para comprender la idea de *rebanar, aproximar* e *integrar,* y su aplicación para calcular volúmenes de sólidos de revolución.

- Capítulo 8, Formas indeterminadas e integrales impropias: se les pide a los estudiantes calcular el valor de una integral como $\int_0^a e^{-x}\,dx$, para $a = 1, 2, 4, 8, 16$. Esperamos que los estudiantes resuelvan un problema como éste y se den cuenta de que conforme a crece, el valor de la integral se aproxima a 1; de este modo se establece la idea de integrales impropias. Antes del capítulo, hay problemas similares que incluyen sumas sobre series infinitas.

Sentido numérico El sentido numérico continúa desempeñando un papel importante en el texto. Todos los estudiantes de cálculo cometen errores numéricos al resolver problemas, pero aquellos con sentido numérico reconocen una respuesta absurda y tratan de resolver nuevamente el problema. Para impulsar y desarrollar esta importante habilidad, hemos enfatizado el proceso de estimación. Sugerimos cómo hacer estimaciones mentalmente y cómo llegar a las respuestas numéricas aproximadas. En el texto hemos aumentado el uso de esta característica mediante el símbolo $\boxed{\approx}$, en donde se hace una aproximación numérica. Esperamos que los estudiantes hagan lo mismo, en especial en los problemas con el icono $\boxed{\approx}$.

Uso de tecnología Muchos problemas en la novena edición están marcados con uno de los siguientes símbolos:

$\boxed{\text{C}}$ indica que sería útil una calculadora científica ordinaria.

$\boxed{\text{GC}}$ indica que se requiere una calculadora gráfica.

$\boxed{\text{CAS}}$ indica que se necesita un sistema de álgebra computacional.

Los proyectos de tecnología que estaban al final de los capítulos en la octava edición, ahora están disponibles en la Web en archivos PDF.

Cambios en la novena edición La estructura básica y el espíritu primordial del texto han permanecido sin cambio. A continuación están los cambios más importantes en la novena edición.

- Hay un conjunto de problemas de repaso e introducción entre el final de un capítulo y el inicio del siguiente.
- El capítulo preliminar, ahora denominado capítulo 0, se ha condensado. Los temas de "precálculo" (que en la octava edición estaban al inicio del capítulo 2) se colocaron ahora en el capítulo 0. En la novena edición, el capítulo 1 inicia con límites. Todo lo que se requiera estudiar del capítulo 0 depende de los antecedentes de los estudiantes y variará de una institución educativa a otra.
- Las secciones sobre antiderivadas y una introducción a ecuaciones diferenciales se han cambiado al capítulo 3. Esto permite claridad entre los conceptos de "tasa de cambio" y "acumulación", ya que ahora el capítulo 4 inicia con área, seguida de inmediato con la integral definida y los teoremas fundamentales del cálculo. "La experiencia del autor ha sido que muchos estudiantes de primer año se equivocan al hacer una distinción clara entre los diferentes conceptos de la integral indefinida (o antiderivada) y la integral definida como el límite de una suma". Esto fue en la primera edición, publicada en 1965, y sigue siendo cierto ahora. Esperamos que al separar estos temas se atraerá la mirada a la distinción.
- Probabilidad y presión de fluidos se agregó al capítulo 5, Aplicaciones de la integral. Enfatizamos que los problemas de probabilidad son tratados como problemas de masa a lo largo de una recta. El centro de masa es la integral de x por la

densidad, y la esperanza en probabilidad es la integral de x por la densidad (probabilidad).

- El material sobre secciones cónicas se ha resumido de cinco secciones a tres. Los estudiantes han visto mucho (si no es que todo) de este material en sus cursos de precálculo.
- Hay ejemplos y un ejercicio sobre las leyes de Kepler del movimiento planetario. El material sobre vectores termina en la deducción de las leyes de Kepler a partir de la ley de Newton de la gravitación. Deducimos la segunda y tercera leyes de Kepler en los ejemplos, y dejamos como ejercicio la primera ley. En esta práctica, se guía a los estudiantes a través de los pasos, (a) a (l), de la deducción.
- Las secciones sobre métodos numéricos se han colocado en lugares apropiados a lo largo del texto. Por ejemplo, la sección sobre la resolución de ecuaciones de forma numérica se ha convertido en la sección 3.7, la integración numérica es la sección 4.6; las aproximaciones para ecuaciones diferenciales se convirtieron en la sección 6.7.
- El número de preguntas de conceptos se ha incrementado de manera significativa. Muchos problemas más preguntan al estudiante acerca de gráficas. También hemos aumentado el uso de métodos numéricos, tal como el método de Newton y la integración numérica, en problemas que no pueden tratarse de manera analítica.

Agradecimientos Quisiera agradecer al equipo de Prentice Hall, incluyendo a Adam Jaworski, Eric Franck, Dawn Murrin, Debbie Ryan, Bayani deLeon, Sally Yagan, Halee Dinsey, Patrice Jones, Heather Scott y Thomas Benfatti por su apoyo y paciencia. También deseo agradecer a quienes leyeron el manuscrito cuidadosamente, entre ellos, Frank Purcell, Brad Davis, Pat Daly (compañía Paley) y Edith Baker (Writewith, Inc.). Tengo una gran deuda de gratitud con Kevin Bodden y Christopher Rigdon, quienes trabajaron sin descanso en la preparación de los manuales de soluciones, y con Bárbara Kniepkamp y Brian Rife por la preparación de las respuestas del final del libro. Además, quiero agradecer a los profesores de la Southern Illinois University Edwardsville (y de otros lugares), en especial a George Pelekanos, Rahim Karimpour, Krzysztof Jarosz, Alan Wheeler y Paul Phillips, por sus valiosos comentarios.

También agradezco a los siguientes profesores por su cuidadosa revisión y útiles comentarios durante la preparación de la novena edición.

Fritz Keinert, Iowa State University
Michael Martin, Johnson County Community College
Christopher Johnston, University of Missouri-Columbia
Nakhle Asmar, University of Missouri-Columbia
Zhonghai Ding, University de Nevada Las Vegas
Joel Foisy, SUNY Potsdam
Wolfe Snow, Brooklyn College
Ioana Mihaila, California State Polytechnic University, Pomona
Hasan Celik, California State Polytechnic University
Jeffrey Stopple, University of California, Santa Barbara
Jason Howell, Clemson University
John Goulet, Worcester Polytechnic Institute
Ryan Berndt, The Ohio State University
Douglas Meade, University of South Carolina
Elgin Johnston, Iowa State University
Brian Snyder, Lake Superior State University
Bruce Wenner, University of Missouri-Kansas City
Linda Kilgariff, University of North Carolina en Greensboro
Joel Robbin, University of Wisconsin-Madison
John Johnson, George Fox University
Julie Connolly, Wake Forest University
Chris Peterson, Colorado State University
Blake Thornton, Washington University en Saint Louis
Sue Goodman, University of North Carolina-Chapel Hill
John Santomos, Villanova University

Por último, agradezco a mi esposa Pat y a mis hijos Chris, Mary y Emily por tolerar todas las noches y fines de semana que estuve en la oficina.

S. E. R.
srigdon@siue.edu
Southern Illinois University Edwardsville

RECURSOS PARA LOS PROFESORES (EN INGLÉS)

Distribución de recursos para el profesor

Todos los recursos para el profesor pueden descargarse del sitio **web www.pearsoneducacion.net/purcell** Seleccione "Browse our catalog", luego dé clic en "Mathematics", seleccione su curso y elija su texto. En "Resources", en el lado izquierdo, elija "instructor" y el complemento que necesita descargar. Se le pide que realice un registro antes de que pueda completar este proceso.

- ***TestGen***
  Crea con facilidad exámenes a partir de secciones del texto. Las preguntas se generan con un algoritmo que permite versiones ilimitadas. Edite problemas o genere los propios.
- ***Archivo con preguntas de examen***
  Un banco de exámenes obtenidos de TestGen.
- ***Diapositivas en PowerPoint de Clases***
  Son diapositivas que se pueden editar por completo y van de acuerdo con el texto. Proyectos en clase o para un website en un curso en línea.
- ***Manual de soluciones para el profesor***
  Soluciones totalmente desarrolladas de todos los ejercicios del libro y los proyectos del capítulo.
- ***Proyectos de tecnología***

MathXL®

MathXL® es un poderoso sistema en línea para tareas, tutoriales y asignaciones que acompaña a su libro de texto. Los instructores pueden crear, editar y asignar tareas y exámenes en línea mediante ejercicios generados por medio de un algoritmo y que estén correlacionados al nivel de objetivo para el texto. El trabajo del estudiante es seguido en un registro de avance. Los estudiantes pueden hacer exámenes de capítulo y recibir planes de estudio personalizados con base en sus resultados. El plan de estudio diagnostica las debilidades y vincula a los estudiantes con ejercicios por objetivos que necesitan. Además, los estudiantes pueden tener acceso a videoclips de los ejercicios seleccionados. MathXL® está disponible para quienes adopten el libro y estén cualificados. Para mayor información, visite nuestro sitio web en **www.pearsoneducacion.net/purcell,**

MyMathLab

MyMathLab es un curso en línea personalizable, de texto específico, para sus libros. MyMathLab está sustentado por el ambiente en línea de enseñanza y aprendizaje CourseCompass™ de Pearson Educación, y por MathXL® nuestro sistema de tareas, tutoriales y evaluación en línea. MyMathLab le proporciona las herramientas necesarias para poner todo o parte de su curso en línea, si sus estudiantes están en un laboratorio o trabajando en casa.

MyMathLab proporciona un conjunto rico y flexible de materiales para el curso, con la característica que los ejercicios de respuesta abierta son generados de manera algorítmica para práctica ilimitada. Los estudiantes pueden utilizar las herramientas en línea, tales como clases en video y un libro de texto en multimedia para mejorar su desempeño. Los instructores pueden utilizar los administradores de tareas y exámenes de MyMathLAb para seleccionar y asignar ejercicios en línea relacionados con el libro, y pueden importar exámenes de TestGen para agregar flexibilidad. El único archivo de calificaciones —diseñado específicamente para matemáticas— lleva un registro automático de tareas y resultados de exámenes de los estudiantes y le permite al instructor el cálculo de las evaluaciones finales. MyMathLab está disponible para quienes adopten el libro y estén cualificados. Para mayor información, visite nuestro sitio web en **www.pearsoneducacion.net/purcell**

CAPÍTULO 0

Preliminares

0.1 Números reales, estimación y lógica

El cálculo está basado en el sistema de los números reales y sus propiedades. Pero, ¿cuáles son los números reales y cuáles son sus propiedades? Para responder, comenzamos con algunos sistemas numéricos más sencillos.

Los enteros y los números racionales Los números más sencillos de todos son los **números naturales,**

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Con ellos podemos *contar* nuestros libros, nuestros amigos y nuestro dinero. Si incluimos a sus negativos y al cero, obtenemos los **enteros**

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Cuando *medimos* longitud, peso o voltaje, los enteros son inadecuados. Están separados muy lejos uno del otro para dar suficiente precisión. Esto nos lleva a considerar cocientes (razones) de enteros (véase la figura 1), números tales como

$$\frac{3}{4}, \frac{-7}{8}, \frac{21}{5}, \frac{19}{-2}, \frac{16}{2}, \text{ y } \frac{-17}{1}$$

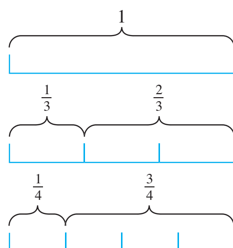


Figura 1

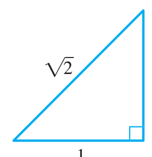


Figura 2

Observe que incluimos $\frac{16}{2}$ y $\frac{-17}{1}$, aunque normalmente los escribiríamos como 8 y −17, ya que son iguales a aquéllos por el significado ordinario de la división. No incluimos $\frac{5}{0}$ o $\frac{-9}{0}$ porque es imposible dar significado a estos símbolos (véase el problema 30). Recuerde siempre que la división entre 0 nunca está permitida. Los números que pueden escribirse en la forma m/n, donde m y n son enteros con $n \neq 0$ son llamados **números racionales**.

¿Los números racionales sirven para medir todas las longitudes? No. Este hecho sorprendente fue descubierto por los antiguos griegos alrededor del siglo V a. C. Ellos demostraron que aunque la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1 mide $\sqrt{2}$ (véase la figura 2), $\sqrt{2}$ no puede escribirse como un cociente de dos enteros (véase el problema 77). Por lo tanto, $\sqrt{2}$ es un número **irracional** (no racional). Así, también lo son $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, π, y una gran cantidad de números más.

Los números reales Considere todos los números (racionales e irracionales) que pueden medir longitudes, junto con sus negativos y el cero. A éstos les llamamos **números reales**.

Los números reales pueden verse como etiquetas para puntos a lo largo de una recta horizontal. Allí miden la distancia, a la derecha o izquierda (la **distancia dirigida**), de un punto fijo llamado **origen** y marcado con 0 (véase la figura 3). Aunque quizá no

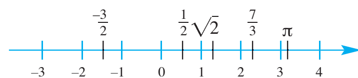


Figura 3

podamos mostrar todas las etiquetas, cada punto tiene un número real único que lo etiqueta. Este número se denomina **coordenada** del punto, y la recta coordenada resultante es llamada **recta real**. La figura 4 sugiere las relaciones entre las series de números analizadas hasta ahora.

Recuerde usted que el sistema de números reales puede ampliarse aún más a los **números complejos**. Éstos son números de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e $i = \sqrt{-1}$. En este libro rara vez se utilizarán los números complejos. De hecho, si decimos o sugerimos *número* sin adjetivo calificativo alguno, se puede suponer que queremos decir número real. Los números reales son los personajes principales en cálculo.

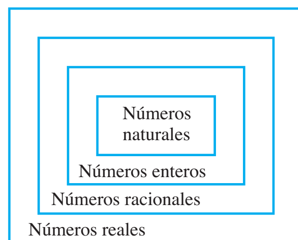


Figura 4

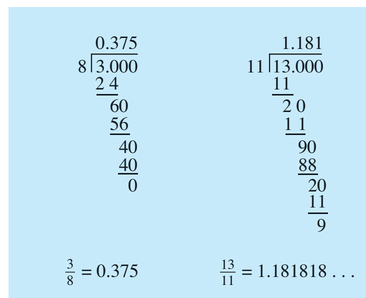


Figura 5

Decimales periódicos y no periódicos Cualquier número racional puede escribirse como decimal, ya que por definición siempre puede expresarse como el cociente de dos enteros; si dividimos el denominador entre el numerador, obtenemos un decimal (véase la figura 5). Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} = 0.5 \qquad \frac{3}{8} = 0.375 \qquad \frac{3}{7} = 0.428571428571428571\ldots$$

Los números irracionales también pueden expresarse en forma decimal. Por ejemplo,

$$\sqrt{2} = 1.4142135623\ldots, \qquad \pi = 3.1415926535\ldots$$

La representación decimal de un número racional o termina (como en $\frac{3}{8} = 0.375$) o se repite hasta el infinito en ciclos regulares (como en $\frac{13}{11} = 1.181818\ldots$). Un poco de experimentación con el algoritmo de la división le mostrará el porqué. (Observe que sólo puede haber un número finito de residuos diferentes). Un decimal que termina puede considerarse como un decimal periódico con ceros que se repiten. Por ejemplo,

$$\frac{3}{8} = 0.375 = 0.3750000\ldots$$

De esta manera, todo número racional puede escribirse como un decimal periódico. En otras palabras, si x es un número racional, entonces x puede escribirse como un decimal periódico. Es notable el hecho de que el recíproco también es verdadero, si x puede escribirse como un decimal periódico, entonces x es un número racional. Esto es obvio en el caso de decimales que terminan (por ejemplo, $3.137 = 3137/1000$), y es fácil demostrar para el caso de decimales no periódicos.

EJEMPLO 1 **(Los decimales periódicos son racionales)**. Demuestre que $x = 0.136136136\ldots$ representa un número racional.

SOLUCIÓN Restamos x de $1000x$ y luego despejamos x.

$$\begin{aligned} 1000x &= 136.136136\ldots \\ x &= 0.136136\ldots \\ \hline 999x &= 136 \\ x &= \frac{136}{999} \end{aligned}$$

■

Los números reales

Números racionales (decimales periódicos)	Números irracionales (decimales no periódicos)

Figura 6

Las representaciones decimales de los números irracionales no se repiten en ciclos. Recíprocamente, un decimal no periódico debe representar un número irracional. Así, por ejemplo,

$$0.101001000100001\ldots$$

debe representar un número irracional (observe el patrón de más y más ceros entre los unos). El diagrama en la figura 6 resume lo que hemos dicho.

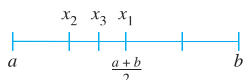


Figura 7

Densidad Entre cualesquiera dos números reales diferentes a y b, no importa qué tan cercanos se encuentren, existe otro número real. En particular, el número $x_1 = (a + b)/2$ es un número real que está a la mitad entre a y b (véase la figura 7). Ya que existe otro número real, x_2, entre a y x_1, y otro número real, x_3, entre x_1 y x_2, y puesto que este argumento puede repetirse *ad infinitum*, concluimos que existe un número infinito de números reales entre a y b. Por lo tanto, no existe cosa como "el menor número real, mayor que 3".

En realidad, podemos decir más. Entre cualesquiera dos números reales distintos existe tanto un número racional como uno irracional. (En el ejercicio 57 le pedimos demostrar que existe un número racional entre cualesquiera dos números reales). De aquí que, por medio del argumento precedente, existe una infinidad de cada uno de ellos (racionales e irracionales).

Una forma en que los matemáticos describen la situación que hemos expuesto es declarar que los números racionales y los números irracionales son **densos** en la recta real. Todo número tiene vecinos racionales e irracionales arbitrariamente cercanos a él.



Figura 8

Una consecuencia de la propiedad de densidad es que cualquier número irracional puede aproximarse tanto como se quiera por medio de un número racional; de hecho, por medio de un número racional con una representación decimal finita. Tome como ejemplo $\sqrt{2}$. La sucesión de números racionales 1, 1.4, 1.41, 1414, 1.4142, 1.41421, 1.414213,... avanza constante e inexorablemente hacia $\sqrt{2}$ (véase la figura 8). Avanzando lo suficiente en esta sucesión, podemos estar tan cerca como queramos de $\sqrt{2}$.

Calculadoras y computadoras Actualmente, muchas calculadoras son capaces de realizar operaciones numéricas, gráficas y simbólicas. Durante décadas, las calculadoras han podido realizar operaciones numéricas, como dar aproximaciones decimales a $\sqrt{12.2}$ y 1.25 sen 22°. A principios de los años noventa del siglo pasado las calculadoras podían mostrar la gráfica de casi cualquier función algebraica, trigonométrica, exponencial o logarítmica. Los adelantos recientes permiten a las calculadoras realizar muchas operaciones, como desarrollar $(x - 3y)^{12}$ o resolver $x^3 - 2x^2 + x = 0$. Programas de cómputo como *Mathematica* o *Maple* pueden realizar operaciones simbólicas como éstas, así como una gran cantidad de otras.

Nuestras recomendaciones acerca del uso de una calculadora son:

1. Sepa reconocer cuando su calculadora —o computadora— le proporciona una respuesta exacta y cuando le da una aproximación. Por ejemplo, si pide sen 60°, su calculadora puede darle la respuesta exacta, $\sqrt{3}/2$, o bien puede darle una aproximación decimal, 0.8660254.
2. Por lo regular, y si es posible, se prefiere una respuesta exacta. Esto es especialmente cierto cuando usted debe utilizar el resultado para cálculos posteriores. Por ejemplo, si necesita elevar al cuadrado sen 60°, es más fácil y también más exacto, calcular $\left(\sqrt{3}/2\right)^2 = 3/4$ que calcular 0.8660254^2.
3. Si es posible, en problemas de aplicación proporcione una respuesta exacta, así como una aproximación. Puede verificar frecuentemente si su respuesta es razonable al relacionarla con la descripción del problema, observando su aproximación numérica a la solución.

Muchos problemas en este libro están marcados con un símbolo especial.

C significa utilice una calculadora.

GC significa utilice una calculadora graficadora.

CAS significa utilice un sistema de álgebra computacional.

EXPL significa que el problema le pide explorar e ir más allá de las explicaciones dadas en el texto.

Estimación Dado un problema aritmético complicado, un estudiante descuidado podría presionar algunas teclas en una calculadora y reportar la respuesta sin darse cuenta de que la falta de paréntesis o un "error de dedo" han dado un resultado erróneo. Un estudiante cuidadoso, con un sentido de los números, al presionar las mismas

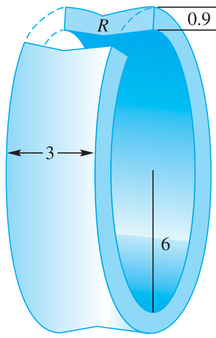


Figura 9


En el ejemplo 3 hemos utilizado ≈ para decir "aproximadamente igual a". Utilice este símbolo cuando realice una aproximación. En un trabajo más formal no use este símbolo sin saber de qué tamaño podría ser el error.

Muchos problemas están marcados con este símbolo.

 significa una estimación de la respuesta antes de resolver el problema; luego compruebe su respuesta contra esta estimación.

teclas se dará cuenta inmediatamente de que la respuesta es equivocada si es demasiado grande o demasiado pequeña, y volverá a calcularla de manera correcta. Es importante saber cómo se realiza una estimación mental.

EJEMPLO 2 Calcular $\left(\sqrt{430} + 72 + \sqrt[3]{7.5}\right)/2.75$.

SOLUCIÓN Una estudiante juiciosa aproximó lo anterior como $(20 + 72 + 2)/3$ y dijo que la respuesta debería ser cercana a 30. Así, cuando su calculadora dio 93.448 como respuesta, ella desconfió (lo que en realidad había calculado fue $\sqrt{430} + 72 + \sqrt[3]{7.5}/2.75$).

Al calcular otra vez obtuvo la respuesta correcta: 34.434. ■

EJEMPLO 3 Suponga que la región sombreada R, que se muestra en la figura 9, se hace girar alrededor del eje x. Estime el volumen del anillo sólido, S, que resulta.

SOLUCIÓN La región R es de casi 3 unidades de largo y 0.9 unidades de altura. Estimamos su área como $3(0.9) \approx 3$ unidades cuadradas. Imagine que el anillo sólido, S, se abre y se aplana para formar una caja de alrededor de $2\pi r \approx 2(3)(6) = 36$ unidades de longitud. El volumen de una caja es el área de su sección transversal por su longitud. Así, estimamos el volumen de la caja como $3(36) = 108$ unidades cúbicas. Si lo calcula y obtiene 1000 unidades cúbicas, necesita verificar su trabajo. ■

El proceso de *estimación* es simplemente el sentido común combinado con aproximaciones razonables de los números. Lo exhortamos a utilizarlo con frecuencia, particularmente en problemas. Antes de obtener una respuesta precisa, haga una estimación. Si su respuesta está cerca de su estimación, no hay garantía de que su respuesta sea correcta. Por otra parte, si su respuesta y su estimación son demasiado diferentes, debe verificar su trabajo. Probablemente hay un error en su respuesta o en su aproximación. Recuerde que $\pi \approx 3$, $\sqrt{2} \approx 1.4$, $2^{10} \approx 1000$, 1 pie ≈ 10 pulgadas, 1 milla ≈ 5000 pies, etcétera.

Un tema central en este texto es el sentido numérico. Por esto queremos decir la habilidad de trabajar un problema y decir si su solución es razonable para el problema planteado. Un estudiante con buen sentido numérico reconocerá y corregirá de forma inmediata una respuesta que, obviamente, es poco razonable. Para muchos de los ejemplos desarrollados en el texto, proporcionamos una estimación inicial de la solución, antes de proceder a determinar la solución exacta.

Un poco de lógica.

En matemáticas, a los resultados importantes se les llama **teoremas**; en este texto usted encontrará muchos teoremas. Los más importantes aparecen con la etiqueta *Teorema* y por lo regular se les dan nombres (por ejemplo, el Teorema de Pitágoras). Otros aparecen en los conjuntos de problemas y se introducen con las palabras *demuestre* o *pruebe que*. En contraste con los axiomas o definiciones, que se admiten, los teoremas requieren ser demostrados.

Muchos teoremas son establecidos en la forma "si P entonces Q", o bien pueden enunciarse otra vez en esta forma. Con frecuencia, abreviamos el enunciado "si P entonces Q" por medio de $P \Rightarrow Q$, que también se lee "P implica Q". Llamamos a P la *hipótesis* y a Q la *conclusión* del teorema. Una prueba (demostración) consiste en demostrar que Q debe ser verdadera siempre que P sea verdadera.

Los estudiantes que inician (incluso, algunos maduros) pueden confundir $P \Rightarrow Q$ con su **recíproco,** $Q \Rightarrow P$. Estas dos proposiciones no son equivalentes. "Si Juan es de Missouri, entonces Juan es americano" es una proposición verdadera, pero su recíproca "si Juan es americano, entonces es de Missouri" podría no ser cierta.

La **negación** de la proposición P se escribe $\sim P$. Por ejemplo, si P es la proposición "está lloviendo", entonces $\sim P$ es la proposición "no está lloviendo". La proposición $\sim Q \Rightarrow \sim P$ se denomina **contrapositiva** (o contrarrecíproca) de la proposición $P \Rightarrow Q$ y es equivalente a $P \Rightarrow Q$. Por "equivalente" queremos decir que $P \Rightarrow Q$ y $\sim Q \Rightarrow \sim P$ son, ambas, verdaderas o ambas falsas. Para nuestro ejemplo acerca de Juan, la contrapositiva de "si Juan es de Missouri, entonces Juan es americano" es "si Juan no es americano, entonces Juan no es de Missouri".

Como consecuencia de que una proposición y su contrapositiva sean equivalentes, podemos demostrar un teorema de la forma "si P entonces Q" demostrando su contra-

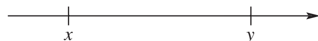
Demostración por contradicción

La demostración por contradicción también lleva el nombre de *de reducción al absurdo*. He aquí lo que el gran matemático G. H. Hardy dijo acerca de ella:

"La reducción al absurdo, que Euclides amaba tanto, es una de las armas más finas del matemático. Es muchísimo más fina que cualquier gambito en el ajedrez; un jugador de ajedrez puede ofrecer el sacrificio de un peón o hasta de una pieza, pero un matemático ofrece el juego".

Orden en la recta real

Decir que $x < y$ significa que x está a la izquierda de y en la recta real.



Las propiedades de orden

1. **Tricotomía.** Si x y y son números, exactamente una de las siguientes afirmaciones se cumple:

   $x < y \quad \text{o} \quad x = y \quad \text{o} \quad x > y$
2. **Transitividad.** $x < y$ e $y < z \Rightarrow x < z$.
3. **Suma.** $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$.
4. **Multiplicación.** Cuando z es positiva $x < y \Leftrightarrow xz < yz$. Cuando z es negativa, $x < y \Leftrightarrow xz > yz$.

positiva "si $\sim Q$ entonces $\sim P$". Así, para demostrar $P \Rightarrow Q$, podemos suponer $\sim Q$ e intentar deducir $\sim P$. A continuación está un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 4 Demuestre que si n^2 es par, entonces n es par.

Prueba La contrapositiva de este enunciado es "si n no es par, entonces n^2 no es par", que es equivalente a "si n es impar, entonces n^2 es impar". Demostraremos la contrapositiva. Si n es impar, entonces existe un entero k tal que $n = 2k + 1$. Entonces,

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Por lo tanto, n^2 es igual a uno más que el doble de un entero. De aquí que n^2 es impar. ■

La *ley del tercero excluido* dice: sucede R o $\sim R$, pero no ambos. Cualquier demostración que inicia suponiendo que la conclusión de un teorema es falsa y procede para demostrar que esta suposición conduce a una contradicción se denomina **demostración por contradicción**.

En ocasiones, necesitaremos otro tipo de demostración denominado **inducción matemática**. Nos alejaríamos demasiado en estos momentos para describir esto, pero hemos dado un estudio completo en el apéndice A.1.

Algunas veces, ambas proposiciones $P \Rightarrow Q$ (si P entonces Q) y $Q \Rightarrow P$ (si Q entonces P) son verdaderas. En este caso escribimos $P \Leftrightarrow Q$, que se lee "P si y sólo si Q". En el ejemplo 4 demostramos que "si n^2 es par, entonces n es par", pero el recíproco "si n es par, entonces n^2 es par" también es verdadero. Por lo tanto, diríamos "n es par si y sólo si n^2 es par".

Orden Los números reales diferentes de cero se separan, en forma adecuada, en dos conjuntos disjuntos, los números reales positivos y los números reales negativos. Este hecho nos permite introducir la relación de orden $<$ (se lee "es menor que") por medio de

$$x < y \Leftrightarrow y - x \text{ es positivo}$$

Acordamos que $x < y$ y $y > x$ significarán lo mismo. Así, $3 < 4$, $4 > 3$, $-3 < -2$ y $-2 > -3$.

La relación de orden $\leq$ (se lee "es menor o igual a") es prima hermana de $<$. Se define por medio de

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \text{ es positivo o cero}$$

Las propiedades de orden 2, 3 y 4, en el cuadro al margen, se cumplen al reemplazar los símbolos $<$ y $>$ por $\leq$ y $\geq$, respectivamente.

Cuantificadores Muchas proposiciones matemáticas incluyen una variable x, y la validez de un enunciado depende del valor de x. Por ejemplo, la proposición "$\sqrt{x}$ es un número racional" depende del valor de x; es verdadero para algunos valores de x, tal como $x = 1, 4, 9$, $x = 1, 4, 9, \frac{4}{9}$, y $\frac{10,000}{49}$, y falso para otros valores de x, tales como $x = 2, 3, 77$ y π. Algunas proposiciones, tales como "$x^2 \geq 0$", son verdaderas para todo número real x, y otras proposiciones, tales como "x es un entero par mayor que 2 y x es un número primo", siempre son falsas. Denotaremos con *P(x)* un enunciado cuyo valor de verdad depende del valor de x.

Decimos "para toda x, *P(x)*" o "para cada x, *P(x)*", cuando la proposición $P(x)$ es verdadera para todo valor de x. Cuando al menos existe un valor de x para el cual es verdadera, decimos "existe una x tal que $P(x)$". Los dos importantes *cuantificadores* son "para todo" y "existe".

EJEMPLO 5 ¿Cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas?

(a) Para toda x, $x^2 > 0$.
(b) Para toda x, $x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$.
(c) Para cada x, existe una y tal que $y > x$.
(d) Existe una y tal que, para toda x, $y > x$.

SOLUCIÓN

(a) Falsa. Si elegimos $x = 0$, entonces no es verdadero que $x^2 > 0$.
(b) Verdadera. Si x es negativa, entonces x^2 será positiva.
(c) Verdadera. Esta proposición contiene dos cuantificadores, "para cada" y "existe". Para leer el enunciado de manera correcta, debemos aplicarlo en el orden correcto. La proposición inicia "para cada", de modo que si la proposición es verdadera, entonces lo que sigue debe ser verdadero para todo valor de x que seleccionemos. Si no está seguro de que el enunciado completo sea verdadero, intente con algunos valores de x y vea si la segunda parte del enunciado es verdadero o falso. Por ejemplo, podríamos elegir $x = 100$, dada esta elección; ¿existe una y que sea mayor a x? En otras palabras, ¿existe un número mayor que 100? Por supuesto que sí. El número 101 lo es. Ahora, seleccionemos otro valor para x, digamos $x = 1{,}000{,}000$. ¿Existe una y que sea mayor que este valor de x? Nuevamente, sí; en este caso el número 1,000,001 lo sería. Ahora, pregúntese: "Si tengo que x es cualquier número real, ¿podré encontrar una y que sea mayor a x?" La respuesta es sí. Basta con elegir a y como $x + 1$.
(d) Falsa. El enunciado dice que existe un número real que es mayor que todos los demás números reales. En otras palabras, existe un número real que es el mayor de todos. Esto es falso; aquí está una demostración por contradicción. Suponga que existe un número real mayor que todos, y. Sea $x = y + 1$. Entonces $x > y$, lo cual es contrario a la suposición de que y es el mayor número real. ■

La **negación** de la proposición P es la proposición "no P". (La proposición "no P" es verdadera siempre que P sea falsa). Considere la negación de la proposición "para toda x, $P(x)$". Si la negación de esta proposición es verdadera, entonces debe existir al menos un valor de x para el cual $P(x)$ es falsa; en otras palabras, existe una x tal que "no $P(x)$". Ahora considere la negación de la proposición "existe un x tal que $P(x)$". Si la negación de esta proposición es verdadera, entonces no existe una x para la cual $P(x)$ sea verdadera. Esto significa que $P(x)$ es falsa sin importar el valor de x. En otras palabras, "para toda x, no $P(x)$". En resumen,

La negación de "para toda x, $P(x)$" es "existe una x tal que no $P(x)$".

La negación de "existe una x tal que $P(x)$" es "para toda x, no $P(x)$".

Revisión de conceptos

1. Los números que pueden escribirse como la razón (cociente) de dos enteros se denominan _______.

2. Entre cualesquiera dos números reales, existe otro número real. Esto significa que los números reales son _______.

3. La contrapositiva (contrarrecíproca) de "si P entonces Q" es _______.

4. Los axiomas y las definiciones son tomados como ciertos, pero_______ requieren de una demostración.

Conjunto de problemas 0.1

En los problemas del 1 al 16 simplifique tanto como sea posible. Asegúrese de eliminar todos los paréntesis y reducir todas las fracciones.

1. $4 - 2(8 - 11) + 6$

2. $3[2 - 4(7 - 12)]$

3. $-4[5(-3 + 12 - 4) + 2(13 - 7)]$

4. $5[-1(7 + 12 - 16) + 4] + 2$

5. $\frac{5}{7} - \frac{1}{13}$

6. $\frac{3}{4 - 7} + \frac{3}{21} - \frac{1}{6}$

7. $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\right]$

8. $-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right]$

9. $\frac{14}{21}\left(\frac{2}{5 - \frac{1}{3}}\right)^2$

10. $\left(\frac{2}{7} - 5\right)/\left(1 - \frac{1}{7}\right)$

11. $\dfrac{\frac{11}{7} - \frac{12}{21}}{\frac{11}{7} + \frac{12}{21}}$

12. $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{7}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8}}$

13. $1 - \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}$

14. $2 + \dfrac{3}{1 + \frac{5}{2}}$

15. $\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)$

16. $\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2$

En los problemas del 17 al 28 realice las operaciones indicadas y simplifique.

17. $(3x - 4)(x + 1)$

18. $(2x - 3)^2$

19. $(3x - 9)(2x + 1)$

20. $(4x - 11)(3x - 7)$

21. $(3t^2 - t + 1)^2$

22. $(2t + 3)^3$

23. $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

24. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

25. $\dfrac{t^2 - 4t - 21}{t + 3}$

26. $\dfrac{2x - 2x^2}{x^3 - 2x^2 + x}$

27. $\dfrac{12}{x^2 + 2x} + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x + 2}$

28. $\dfrac{2}{6y - 2} + \dfrac{y}{9y^2 - 1}$

29. Determine el valor de cada una de las expresiones siguientes; si no está definida, indíquelo

(a) $0 \cdot 0$ (b) $\frac{0}{0}$ (c) $\frac{0}{17}$

(d) $\frac{3}{0}$ (e) 0^5 (f) 17^0

30. Demuestre que la división entre 0 no tiene significado como sigue: Suponga que $a \neq 0$. Si $a/0 = b$, entonces $a = 0 \cdot b = 0$, lo cual es una contradicción. Ahora determine una razón por la que 0/0 también carece de significado.

En los problemas del 31 al 36 cambie cada número racional a uno decimal mediante una división larga.

31. $\frac{1}{12}$

32. $\frac{2}{7}$

33. $\frac{3}{21}$

34. $\frac{5}{17}$

35. $\frac{11}{3}$

36. $\frac{11}{13}$

En los problemas del 37 al 42 cambie cada decimal periódico por una razón de dos enteros (véase el ejemplo 1).

37. 0.123123123 . . .

38. 0.217171717 . . .

39. 2.56565656 . . .

40. 3.929292 . . .

41. 0.199999 . . .

42. 0.399999 . . .

43. Como 0.199999 . . . = 0.200000 . . . y 0.399999 . . . = 0.400000 . . . (véanse los problemas 41 y 42), vemos que ciertos números racionales tienen diferentes expansiones decimales. ¿Cuáles son los números racionales que tienen esta propiedad?

44. Demuestre que cualquier número racional p/q, para el cual la factorización en primos de q consiste sólo en números 2 y números 5, tiene un desarrollo decimal finito.

45. Encuentre un número racional positivo y un número irracional positivo menores que 0.00001.

46. ¿Cuál es el menor entero positivo? ¿El menor racional positivo? ¿El menor número irracional positivo?

47. Encuentre un número racional entre 3.14159 y π. Note que $\pi = 3.141592....$

48. ¿Existe un número entre 0.9999... (los 9 se repiten) y 1? ¿Cómo concilia esto con el enunciado de que entre cualesquiera dos números reales diferentes existe otro número real?

49. ¿El número 0.1234567891011121314... es racional o irracional? (Debe observar un patrón en la sucesión de dígitos dada).

50. Encuentre dos números irracionales cuya suma sea racional.

≈ *En los problemas del 51 al 56 determine la mejor aproximación decimal que su calculadora permita. Inicie haciendo una estimación mental.*

51. $\left(\sqrt{3} + 1\right)^3$

52. $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^4$

53. $\sqrt[4]{1.123} - \sqrt[3]{1.09}$

54. $(3.1415)^{-1/2}$

55. $\sqrt{8.9\pi^2 + 1} - 3\pi$

56. $\sqrt[4]{(6\pi^2 - 2)\pi}$

57. Demuestre que entre cualesquiera dos números reales diferentes existe un número racional. (*Sugerencia:* si $a < b$, entonces $b - a > 0$, así que existe un número natural n tal que $1/n < b - a$. Considere el conjunto $\{k : k/n > b\}$ y utilice el hecho de que un conjunto de enteros que está acotado por abajo contiene un elemento menor). Demuestre que entre cualesquiera dos números reales diferentes existe una infinidad de números racionales.

≈ **58.** Estime el volumen de su cabeza, en pulgadas cúbicas.

≈ **59.** Estime la longitud del ecuador, en pies. Suponga que el radio de la Tierra es de 4000 millas.

≈ **60.** ¿Alrededor de cuántas veces habrá latido su corazón en su vigésimo cumpleaños?

≈ **61.** El árbol llamado General Sherman, que está en California, tiene una altura de casi 270 pies y promedia alrededor de 16 pies de diámetro. Estime el número de tablones de madera de 1 pulgada por 12 pulgadas por 12 pulgadas que podrían fabricarse con este árbol, suponiendo que no haya desperdicio e ignorando las ramas.

≈ **62.** Suponga que cada año, el árbol General Sherman (véase el problema 61) produce un anillo de crecimiento de un grosor de 0.004 pies. Estime el aumento anual resultante en el volumen de su tronco.

63. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) Si hoy llueve, entonces trabajaré en casa.

(b) Si la candidata satisface todos los requisitos, entonces será contratada.

64. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) Si obtengo una A en el examen final, aprobaré el curso.

(b) Si termino mi artículo de investigación para el viernes, entonces tomaré un descanso la semana próxima.

65. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) (Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo.) Si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

(b) Si el ángulo ABC es agudo, entonces su medida es mayor que 0° y menor que 90°.

66. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) Si la medida del ángulo ABC es 45°, entonces el ángulo ABC es agudo.

(b) Si $a < b$ entonces $a^2 < b^2$.

67. Considere los enunciados del problema 65 junto con sus recíprocos y contrapositivos. ¿Cuáles son verdaderos?

68. Considere los enunciados del problema 66 junto con sus recíprocos y contrapositivos. ¿Cuáles son verdaderos?

69. Utilice las reglas acerca de la negación de proposiciones que incluyen cuantificadores para escribir la negación de las siguientes proposiciones. ¿Cuál es verdadera, la proposición original o su negación?

(a) Todo triángulo isósceles es equilátero.

(b) Existe un número real que no es entero.

(c) Todo número natural es menor o igual a su cuadrado.

70. Utilice las reglas acerca de la negación de proposiciones que incluyen cuantificadores para escribir la negación de las siguientes proposiciones. ¿Cuál es verdadera, la proposición original o su negación?

(a) Todo número natural es racional.

(b) Existe un círculo cuya área es mayor que 9π.

(c) Todo número real es mayor que su cuadrado.

71. ¿Cuáles de los enunciados siguientes son verdaderos? Suponga que x y y son números reales.

(a) Para toda x, $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$.

(b) Para toda x, $x > 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$.

(c) Para toda x, $x^2 > x$.

(d) Para toda x, existe una y tal que $y > x^2$.

(e) Para todo número positivo y, existe otro número positivo x tal que $0 < x < y$.

72. ¿Cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas? A menos que se diga lo contrario, suponga que x, y y ε son números reales.

(a) Para toda x, $x < x + 1$.

(b) Existe un número natural N, tal que todos los números primos son menores que N. (Un **número primo** es un número natural mayor que 1 cuyos únicos factores son 1 y él mismo.)

(c) Para cada $x > 0$, existe una y tal que $y > \frac{1}{x}$.

(d) Para toda x positiva, existe un número natural n tal que $\frac{1}{n} < x$.

(e) Para cada ε positiva, existe un número natural n tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

73. Demuestre las siguientes proposiciones.

(a) Si n es impar, entonces n^2 es impar. (*Sugerencia:* si n es **impar**, entonces existe un entero k, tal que $n = 2k + 1$).

(b) Si n^2 es impar, entonces n es impar. (*Sugerencia:* demuestre la contrapositiva).

74. Demuestre que n es impar si y sólo si n^2 es impar. (Véase el problema 73).

75. De acuerdo con el **Teorema fundamental de la aritmética**, todo número natural (distinto de 1) puede escribirse como el producto de primos, de una forma única, salvo por el orden de los factores. Por ejemplo, $45 = 3{\cdot}3{\cdot}5$. Escriba cada uno de los siguientes números como un producto de primos.

(a) 243 (b) 124 (c) 5100

76. Utilice el Teorema fundamental de la aritmética (véase el problema 75) para demostrar que el cuadrado de cualquier número natural (distinto de 1) puede escribirse como el producto de un conjunto único de primos, excepto por el orden de los factores, cada uno de los cuales aparece un número *par* de veces. Por ejemplo, $(45)^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$.

77. Demuestre que $\sqrt{2}$ es irracional. *Sugerencia:* intente una demostración por contradicción. Suponga que $\sqrt{2} = p/q$, donde p y q son números naturales (necesariamente distintos de 1). Entonces $2 = p^2/q^2$, de modo que $2q^2 = p^2$. Ahora utilice el problema 76 para obtener una contradicción.

78. Demuestre que $\sqrt{3}$ es irracional (véase el problema 77).

79. Demuestre que la suma de dos números racionales es racional.

80. Demuestre que el producto de un número racional (distinto de 0) y un número irracional es irracional. *Sugerencia:* intente una demostración por contradicción.

81. ¿Cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles son irracionales?

(a) $-\sqrt{9}$ (b) 0.375

(c) $(3\sqrt{2})(5\sqrt{2})$ (d) $(1 + \sqrt{3})^2$

82. Un número b se denomina **cota superior** para un conjunto S de números, si $x \le b$ para toda x en S. Por ejemplo, 5, 6.5 y 13 son cotas superiores para el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. El número 5 es la **mínima cota superior** para S (la más pequeña de las cotas superiores). De manera análoga, 1.6, 2 y 2.5 son cotas superiores para el conjunto infinito $T = \{1.4, 1.49, 1.499, 1.4999, ...\}$ mientras que 1.5 es la mínima cota superior. Encuentre la mínima cota superior para cada uno de los siguientes conjuntos,

(a) $S = \{-10, -8, -6, -4, -2\}$

(b) $S = \{-2, -2.1, -2.11, -2.111, -2.1111, \dots\}$

(c) $S = \{2.4, 2.44, 2.444, 2.4444, \dots\}$

(d) $S = \left\{1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{5}, \dots\right\}$

(e) $S = \{x | x = (-1)^n + 1/n, n$ es un entero positivo$\}$; esto es, S es el conjunto de todos los números x que tienen la forma $x = (-1)^n + 1/n$, donde n es un entero positivo.

(f) $S = \{x : x^2 < 2, x$ es un número racional$\}$.

EXPL **83.** El axioma de completez para los números reales dice: *todo conjunto de números reales que tiene una cota superior tiene una mínima cota superior que es un número real.*

(a) Demuestre que la proposición en cursivas es falsa si las palabras *reales* y *real* se reemplazan por *racionales* y *racional*, respectivamente.

(b) ¿La proposición en cursivas será verdadera o falsa si las palabras *reales* y *real* fuesen reemplazadas por *naturales* y *natural*, respectivamente?

Respuestas a la revisión de conceptos **1.** números racionales **2.** densos **3.** "Si no Q entonces no P". **4.** teoremas

0.2 Desigualdades y valor absoluto

La resolución de ecuaciones (por ejemplo, $3x - 17 = 6$ o $x^2 - x - 6 = 0$) es una de las tareas tradicionales de las matemáticas; en este curso será importante y suponemos que usted recordará cómo hacerlo. Pero, casi de igual importancia en cálculo es la noción de resolver una desigualdad (por ejemplo, $3x - 17 < 6$ o $x^2 - x - 6 \ge 0$). **Resolver** una desigualdad es encontrar el conjunto de todos los números reales que hace que la desigualdad sea verdadera. En contraste con una ecuación, cuyo conjunto solución por lo regular consiste en un número o quizá en un conjunto finito de números, el conjunto solución de una desigualdad por lo regular es un intervalo completo de números o, en algunos casos, la unión de tales intervalos.

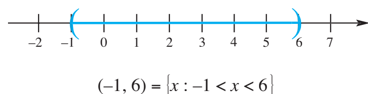
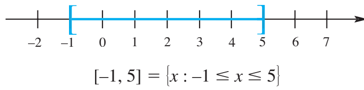


Figura 1

Intervalos Varias clases de intervalos surgirán en nuestro trabajo, para los cuales introducimos una terminología y notación especial. La desigualdad $a < x < b$, que en realidad son dos desigualdades, $a < x$ y $x < b$, describe un **intervalo abierto** que consiste en todos los números entre a y b, pero que no incluye los puntos extremos a y b. Lo denotamos por medio del símbolo (a, b) (véase la figura 1). En contraste, la desigualdad $a \le x \le b$ describe el correspondiente **intervalo cerrado**, que incluye los extremos a y b.



$[-1, 5] = \{x : -1 \le x \le 5\}$

Figura 2

Se denota como $[a, b]$ (véase la figura 2). La tabla indica la amplia variedad de posibilidades e introduce nuestra notación.

Notación de conjuntos	Notación de intervalos	Gráfica
$\{x: a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x: a \le x \le b\}$	$[a, b]$	
$\{x: a \le x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x: a < x \le b\}$	$(a, b]$	
$\{x: x \le b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x: x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x: x \ge a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x: x > a\}$	(a, ∞)	
$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	

Resolución de desigualdades Como con las ecuaciones, el procedimiento para resolver una desigualdad consiste en transformar la desigualdad un paso a la vez hasta que el conjunto solución sea obvio. Podemos realizar ciertas operaciones en ambos lados de una desigualdad sin cambiar su conjunto solución. En particular:

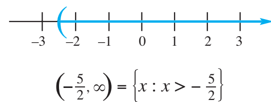
1. Podemos sumar el mismo número a ambos lados de una desigualdad.
2. Podemos multiplicar ambos lados de una desigualdad por el mismo número positivo.
3. Podemos multiplicar ambos lados de una desigualdad por el mismo número negativo, pero entonces debemos invertir el sentido del signo de la desigualdad.

EJEMPLO 1 Resuelva la desigualdad $2x - 7 < 4x - 2$ y muestre la gráfica de su conjunto solución.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 2x - 7 &< 4x - 2 \\ 2x &< 4x + 5 && \text{(sume 7)} \\ -2x &< 5 && \text{(sume } -4x\text{)} \\ x &> -\tfrac{5}{2} && \text{(multiplique por } -\tfrac{1}{2}\text{)} \end{aligned}$$

La gráfica aparece en la figura 3. ■



$\left(-\frac{5}{2}, \infty\right) = \left\{x : x > -\frac{5}{2}\right\}$

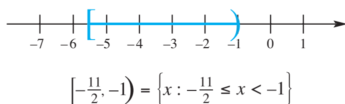
Figura 3

EJEMPLO 2 Resuelva $-5 \le 2x + 6 < 4$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} -5 \le 2x &+ 6 < 4 \\ -11 \le 2x &< -2 && \text{(sume } -6\text{)} \\ -\tfrac{11}{2} \le x &< -1 && \text{(multiplique por } \tfrac{1}{2}\text{)} \end{aligned}$$

La figura 4 muestra la gráfica correspondiente. ■



$\left[-\frac{11}{2}, -1\right) = \left\{x : -\frac{11}{2} \le x < -1\right\}$

Figura 4

Antes de abordar una desigualdad cuadrática hacemos notar que un factor lineal de la forma $x - a$ es positivo para $x > a$ y negativo para $x < a$. Se deduce que un producto $(x - a)(x - b)$ puede cambiar de positivo a negativo, y viceversa, sólo en a o b. Estos puntos, en donde el factor es cero, se denominan **puntos de separación**. Estos puntos son la clave para determinar los conjuntos solución de desigualdades cuadráticas y otras desigualdades más complicadas.

EJEMPLO 3 Resuelva la desigualdad cuadrática $x^2 - x < 6$.

SOLUCIÓN Como con las ecuaciones cuadráticas, pasamos todos los términos distintos de cero a un lado y factorizamos.

$$x^2 - x < 6$$
$$x^2 - x - 6 < 0 \qquad \text{(sume } -6\text{)}$$
$$(x - 3)(x + 2) < 0 \qquad \text{(factorice)}$$

Punto de prueba	Signo de $(x - 3)$	$(x + 2)$	Signo de $(x - 3)(x + 2)$
-3	$-$	$-$	$+$
0	$-$	$+$	$-$
5	$+$	$+$	$+$

Vemos que -2 y 3 son los puntos de separación; dividen la recta real en tres intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ y $(3, \infty)$. En cada uno de estos intervalos $(x - 3)(x + 2)$ conserva el signo; esto es, ahí siempre es positivo o siempre negativo. Para determinar este signo en cada intervalo, utilizamos los **puntos de prueba** -3, 0 y 5 (cualesquiera otros puntos en estos intervalos sirven). Nuestros resultados se muestran en la tabla al margen.

La información que hemos obtenido se resume en la parte superior de la figura 5. Concluimos que el conjunto solución para $(x - 3)(x + 2) < 0$ es el intervalo $(-2, 3)$. Su gráfica se muestra en la parte inferior de la figura 5. ■

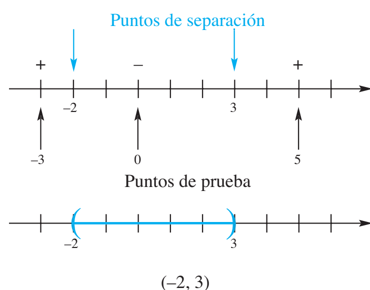


Figura 5

EJEMPLO 4 Resuelva $3x^2 - x - 2 > 0$.

SOLUCIÓN Ya que

$$3x^2 - x - 2 = (3x + 2)(x - 1) = 3(x - 1)\left(x + \tfrac{2}{3}\right)$$

los puntos de separación son $-\frac{2}{3}$ y 1. Estos puntos, junto con los puntos de prueba -2, 0 y 2, establecen la información que se muestra en la parte superior de la figura 6. Concluimos que el conjunto solución de la desigualdad consiste en los puntos que se encuentran en $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ o en $(1, \infty)$. En el lenguaje de conjuntos es la **unión** (simbolizada con $\cup$) de estos dos intervalos; esto es, es $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (1, \infty)$. ■

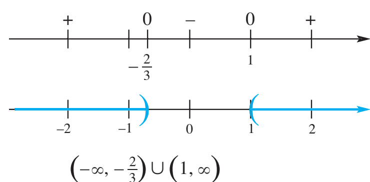


Figura 6

EJEMPLO 5 Resuelva $\dfrac{x - 1}{x + 2} \geq 0$.

SOLUCIÓN Nuestra inclinación a multiplicar ambos lados por $x + 2$ conduce a un dilema inmediato, dado que $x + 2$ puede ser positivo o negativo. ¿Debemos invertir el signo de la desigualdad o dejarlo como está? En lugar de tratar de desenredar este problema (que requeriría dividirlo en dos casos), observamos que el cociente $(x - 1)/(x + 2)$ puede cambiar de signo en los puntos de separación del numerador y del denominador, esto es, en 1 y -2. Los puntos de prueba -3, 0 y 2 proporcionan la información de la parte superior de la figura 7. El símbolo n indica que el cociente *no* está definido en -2. Concluimos que el conjunto solución es $(-\infty, -2) \cup [1, \infty)$. Observe que -2 no pertenece al conjunto solución ya que ahí el cociente está indefinido. Por otra parte, 1 está incluido ya que la desigualdad se cumple cuando $x = 1$. ■

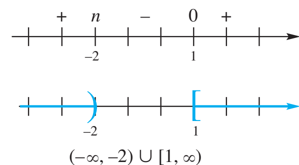


Figura 7

EJEMPLO 6 Resuelva $(x + 1)(x - 1)^2(x - 3) \leq 0$.

SOLUCIÓN Los puntos de separación son -1, 1 y 3, los cuales dividen la recta real en cuatro intervalos, como se muestra en la figura 8. Después de probar todos estos intervalos, concluimos que el conjunto solución es $[-1, 1] \cup [1, 3]$ que es el intervalo $[-1, 3]$. ■

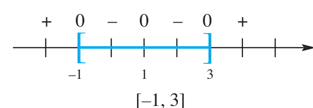


Figura 8

EJEMPLO 7 Resuelva $2.9 < \dfrac{1}{x} < 3.1$.

SOLUCIÓN Es tentador multiplicar por x, pero esto nuevamente lleva al dilema de que x puede ser positiva o negativa. Sin embargo, en este caso, $\frac{1}{x}$ debe estar entre 2.9 y 3.1, lo cual garantiza que x es positivo. Por lo tanto, es válido multiplicar por x y no invertir las desigualdades. Así,

$$2.9x < 1 < 3.1x$$

En este punto debemos dividir esta desigualdad compuesta en dos desigualdades, que resolvemos de manera separada

$$2.9x < 1 \quad \text{y} \quad 1 < 3.1x$$

$$x < \frac{1}{2.9} \quad \text{y} \quad \frac{1}{3.1} < x$$

Cualquier valor de x que satisfaga la desigualdad original debe satisfacer ambas desigualdades. Por lo tanto, el conjunto solución consiste en aquellos valores de x que satisfacen

$$\frac{1}{3.1} < x < \frac{1}{2.9}$$

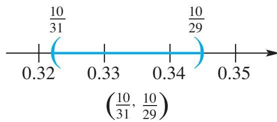


Figura 9

Esta desigualdad puede escribirse como

$$\frac{10}{31} < x < \frac{10}{29}$$

El intervalo $\left(\frac{10}{31}, \frac{10}{29}\right)$ se muestra en la figura 9. ■

Valores absolutos El concepto de valor absoluto es extremadamente útil en cálculo, y el lector debe adquirir habilidad para trabajar con él. El **valor absoluto** de un número real x, denotado por $|x|$ está definido como

$\|x\| = x$	si $x \geq 0$
$\|x\| = -x$	si $x < 0$

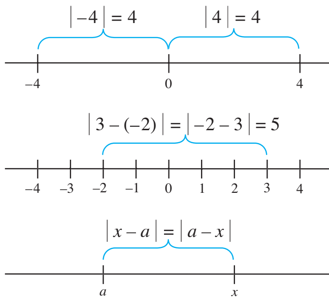


Figura 10

Por ejemplo, $|6| = 6$, $|0| = 0$ y $|-5| = -(-5) = 5$. Esta definición dada en dos partes merece un estudio cuidadoso. Observe que no dice que $|-x| = x$ (para ver por qué, pruebe con -5). Es cierto que $|x|$ siempre es no negativo; también es verdadero que $|-x| = |x|$.

Una de las mejores formas de pensar en el valor absoluto de un número es como una distancia no dirigida. En particular, $|x|$ es la distancia entre x y el origen. De manera análoga, $|x - a|$ es la distancia entre x y a (véase la figura 10).

Propiedades El valor absoluto se comporta de manera adecuada con la multiplicación y la división, pero no así con la suma y la resta.

Propiedades del valor absoluto

1. $|ab| = |a||b|$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad del triángulo)
4. $|a - b| \geq ||a| - |b||$

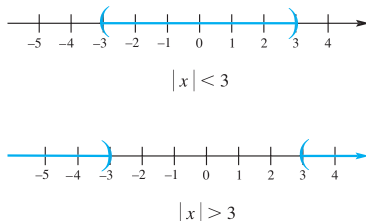


Figura 11

Desigualdades que incluyen valores absolutos Si $|x| < 3$, entonces la distancia entre x y el origen debe ser menor que 3. En otras palabras, x debe ser simultáneamente menor que 3 *y* mayor que -3; esto es, $-3 < x < 3$. Por otra parte, si $|x| > 3$, entonces la distancia entre x y el origen debe ser mayor que 3. Esto puede suceder cuando $x > 3$ *o* $x < -3$ (véase la figura 11). Éstos son casos especiales de las siguientes proposiciones generales que se cumplen cuando $a > 0$.

(1)
$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$
$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \quad \text{o} \quad x > a$$

Podemos utilizar estos hechos para resolver desigualdades que impliquen valores absolutos, ya que proporcionan una manera de quitar los signos de valor absoluto.

EJEMPLO 8 Resuelva la desigualdad $|x-4|<2$ y muestre el conjunto solución en la recta real. Interprete el valor absoluto como una distancia.

SOLUCIÓN Con base en las proposiciones en (1), sustituyendo x por $x-4$, vemos que

$$|x-4|<2 \Leftrightarrow -2<x-4<2$$

Cuando sumamos 4 a los tres miembros de esta última desigualdad, obtenemos $2<x<6$. La gráfica se muestra en la figura 12.

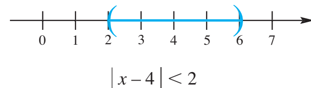


Figura 12

En términos de distancia, el símbolo $|x-4|$ representa la distancia entre x y 4. Por lo tanto, la desigualdad dice que la distancia entre x y 4 debe ser menor a 2. Los números x con esta propiedad son los números entre 2 y 6; esto es, $2<x<6$. ■

Las proposiciones (1) dadas antes del ejemplo 8 son válidas cuando $<$ y $>$ son reemplazadas por $\leq$ y $\geq$, respectivamente. Necesitamos la segunda proposición en esta forma para nuestro ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9 Resuelva la desigualdad $|3x-5|\geq 1$ y muestre su conjunto solución en la recta real.

SOLUCIÓN La desigualdad dada puede escribirse de manera sucesiva como

$$\begin{aligned} 3x-5 &\leq -1 \quad \text{o} \quad & 3x-5 &\geq 1 \\ 3x &\leq 4 \quad \text{o} \quad & 3x &\geq 6 \\ x &\leq \tfrac{4}{3} \quad \text{o} \quad & x &\geq 2 \end{aligned}$$

El conjunto solución es la unión de dos intervalos, $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right] \cup [2, \infty)$, y se muestra en la figura 13. ■

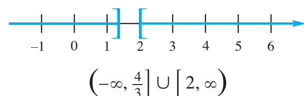


Figura 13

En el capítulo 1 necesitaremos hacer la clase de manipulaciones que se ilustran en los dos ejemplos siguientes. Delta (δ) y épsilon (ε) son la cuarta y quinta letras, respectivamente, del alfabeto griego y se utilizan de manera tradicional para representar números positivos pequeños.

EJEMPLO 10 Sea ε (épsilon) un número positivo. Demuestre que

$$|x-2|<\frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow |5x-10|<\varepsilon$$

En términos de distancia, esto dice que la distancia entre x y 2 es menor que $\varepsilon/5$, si y sólo si la distancia entre $5x$ y 10 es menor que ε.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} |x-2|<\frac{\varepsilon}{5} \quad &\Leftrightarrow \quad 5|x-2| < \varepsilon && \text{(multiplique por 5)} \\ &\Leftrightarrow \quad |5|\,|(x-2)| < \varepsilon && (|5|=5) \\ &\Leftrightarrow \quad |5(x-2)| < \varepsilon && (|a||b|=|ab|) \\ &\Leftrightarrow \quad |5x-10| < \varepsilon \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 11 Sea ε un número positivo. Encuentre un número positivo δ (delta) tal que

$$|x-3|<\delta \Rightarrow |6x-18|<\varepsilon$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} |6x-18|<\varepsilon &\Leftrightarrow |6(x-3)|<\varepsilon \\ &\Leftrightarrow 6|x-3|<\varepsilon \qquad (|ab|=|a||b|) \\ &\Leftrightarrow |x-3|<\frac{\varepsilon}{6} \qquad \left(\text{multiplique por } \frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

Determinación de delta

Observe dos hechos acerca de nuestra solución para el ejemplo 11.

1. El número que encontramos para δ debe depender de ε. nuestra elección es $\delta=\varepsilon/6$.
2. Cualquier número positivo δ más pequeño que $\varepsilon/6$ es aceptable. Por ejemplo $\delta=\varepsilon/7$ o $\delta=\varepsilon/(2\pi)$ son otras opciones correctas.

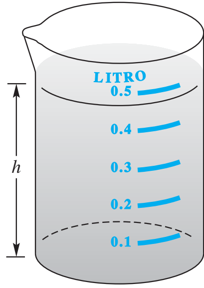


Figura 14

Por lo tanto, elegimos $\delta = \varepsilon/6$. Siguiendo las implicaciones de regreso, vemos que

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{6} \Rightarrow |6x - 18| < \varepsilon$$ ■

A continuación se presenta un problema práctico que utiliza el mismo tipo de razonamiento.

EJEMPLO 12 Un vaso de precipitados de $\frac{1}{2}$ litro (500 centímetros cúbicos) tiene un radio interno de 4 centímetros. ¿Con qué exactitud debemos medir la altura h del agua en el vaso para asegurar que tenemos $\frac{1}{2}$ litro de agua con un error de menos de 1%, esto es, un error de menos de 5 centímetros cúbicos? Véase la figura 14.

SOLUCIÓN El volumen V de agua en el vaso está dado por la fórmula $V = 16\pi h$. Queremos que $|V - 500| < 5$ o, de manera equivalente, $|16\pi h - 500| < 5$. Ahora

$$\begin{aligned} |16\pi h - 500| < 5 &\Leftrightarrow \left|16\pi\left(h - \frac{500}{16\pi}\right)\right| < 5 \\ &\Leftrightarrow 16\pi\left|h - \frac{500}{16\pi}\right| < 5 \\ &\Leftrightarrow \left|h - \frac{500}{16\pi}\right| < \frac{5}{16\pi} \\ &\Leftrightarrow |h - 9.947| < 0.09947 \approx 0.1 \end{aligned}$$

Así, debemos medir la altura con una precisión de alrededor de 1 milímetro. ■

Notación para las raíces cuadradas

Todo número positivo tiene dos raíces cuadradas. Por ejemplo, las dos raíces cuadradas de 9 son 3 y −3. En ocasiones, representamos estos dos números como ±3. Para $a \geq 0$, el símbolo $\sqrt{a}$, que se denomina **raíz cuadrada principal** de a, denota la raíz cuadrada no negativa de a. Por lo tanto, $\sqrt{9} = 3$ y $\sqrt{121} = 11$. Es incorrecto escribir $\sqrt{16} = \pm 4$ ya que $\sqrt{16}$ significa la raíz cuadrada no negativa de 16; esto es, 4. El número 7 tiene dos raíces cuadradas, que se escriben como $\pm\sqrt{7}$, pero $\sqrt{7}$ representa un solo número real. Recuerde esto:

$$a^2 = 16$$

tiene dos soluciones, $a = -4$ y $a = 4$, pero

$$\sqrt{16} = 4$$

Fórmula cuadrática La mayoría de los estudiantes recordarán la **Fórmula cuadrática**. Las soluciones a la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El número $d = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática. Esta ecuación tiene dos soluciones reales si $d > 0$, una solución real si $d = 0$ y soluciones no reales si $d < 0$. Con la fórmula cuadrática, fácilmente podemos resolver desigualdades cuadráticas, incluso, si no se pueden factorizar por inspección.

EJEMPLO 13 Resuelva $x^2 - 2x - 4 \leq 0$.

SOLUCIÓN Las dos soluciones de $x^2 - 2x - 4 = 0$ son

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{4 + 16}}{2} = 1 - \sqrt{5} \approx -1.24$$

y

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{4 + 16}}{2} = 1 + \sqrt{5} \approx 3.24$$

Así,

$$x^2 - 2x - 4 = (x - x_1)(x - x_2) = \left(x - 1 + \sqrt{5}\right)\left(x - 1 - \sqrt{5}\right)$$

Los puntos de separación $1 - \sqrt{5}$ y $1 + \sqrt{5}$ dividen a la recta real en tres intervalos (véase la figura 15). Cuando los comprobamos con los puntos de prueba −2, 0 y 4, concluimos que el conjunto solución para $x^2 - 2x - 4 \leq 0$ es $\left[1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\right]$. ■

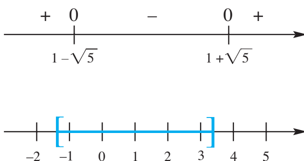


Figura 15

Cuadrados Regresando a los cuadrados, notemos que

$$|x|^2 = x^2 \quad \text{y} \quad |x| = \sqrt{x^2}$$

> **Notación para raíces**
>
> Si n es número par y $a \geq 0$, el símbolo $\sqrt[n]{a}$ denota la raíz n-ésima no negativa de a. Cuando n es impar, sólo existe una raíz n-ésima real de a, denotada por el símbolo $\sqrt[n]{a}$. Por lo tanto, $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$, y $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Esto se deduce de la propiedad $|a||b| = |ab|$.

¿La operación de elevar al cuadrado preserva las desigualdades? En general, la respuesta es no. Por ejemplo, $-3 < 2$, pero $(-3)^2 > 2^2$. Por otra parte, $2 < 3$ y $2^2 < 3^2$. Si tratamos con números no negativos, entonces $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$. Una variante útil de esto (véase el problema 63) es

$$|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$$

EJEMPLO 14 Resuelva la desigualdad $|3x + 1| < 2|x - 6|$.

SOLUCIÓN Esta desigualdad es más difícil de resolver que nuestros ejemplos anteriores, debido a que hay dos signos de valor absoluto. Podemos eliminar ambos al usar el resultado del último recuadro.

$$\begin{aligned}|3x + 1| < 2|x - 6| &\Leftrightarrow |3x + 1| < |2x - 12| \\ &\Leftrightarrow (3x + 1)^2 < (2x - 12)^2 \\ &\Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 1 < 4x^2 - 48x + 144 \\ &\Leftrightarrow 5x^2 + 54x - 143 < 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 13)(5x - 11) < 0\end{aligned}$$

Los puntos de separación para esta desigualdad cuadrática son -13 y $\frac{11}{5}$; estos puntos dividen la recta real en tres intervalos $(-\infty, -13)$, $\left(-13, \frac{11}{5}\right)$, y $\left(\frac{11}{5}, \infty\right)$. Cuando utilizamos los puntos de prueba -14, 0 y 3, descubrimos que sólo los puntos en $\left(-13, \frac{11}{5}\right)$ satisfacen la desigualdad. ■

Revisión de conceptos

1. El conjunto $\{x: -1 \leq x < 5\}$ se escribe en notación de intervalos como _______ y el conjunto $\{x: x \leq -2\}$ se escribe como _______.

2. Si $a/b < 0$, entonces $a < 0$ y _______ o bien $a > 0$ y _______.

3. ¿Cuáles de las ecuaciones siguientes siempre son verdaderas?

(a) $|-x| = x$ (b) $|x|^2 = x^2$

(c) $|xy| = |x||y|$ (d) $\sqrt{x^2} = x$

4. La desigualdad $|x - 2| \leq 3$ es equivalente a _______ $\leq x \leq$ _______.

Conjunto de problemas 0.2

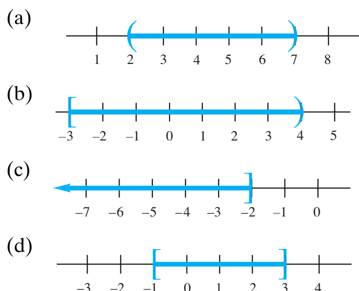
1. Muestre cada uno de los intervalos siguientes en la recta real.

(a) $[-1, 1]$ (b) $(-4, 1]$

(c) $(-4, 1)$ (d) $[1, 4]$

(e) $[-1, \infty)$ (f) $(-\infty, 0]$

2. Utilice la notación del problema 1 para describir los intervalos siguientes.



En cada problema del 3 al 26 exprese el conjunto solución de la desigualdad dada en notación de intervalos y bosqueje su gráfica.

3. $x - 7 < 2x - 5$

4. $3x - 5 < 4x - 6$

5. $7x - 2 \leq 9x + 3$

6. $5x - 3 > 6x - 4$

7. $-4 < 3x + 2 < 5$

8. $-3 < 4x - 9 < 11$

9. $-3 < 1 - 6x \leq 4$

10. $4 < 5 - 3x < 7$

11. $x^2 + 2x - 12 < 0$

12. $x^2 - 5x - 6 > 0$

13. $2x^2 + 5x - 3 > 0$

14. $4x^2 - 5x - 6 < 0$

15. $\dfrac{x + 4}{x - 3} \leq 0$

16. $\dfrac{3x - 2}{x - 1} \geq 0$

17. $\dfrac{2}{x} < 5$

18. $\dfrac{7}{4x} \leq 7$

19. $\dfrac{1}{3x - 2} \leq 4$

20. $\dfrac{3}{x + 5} > 2$

21. $(x + 2)(x - 1)(x - 3) > 0$

22. $(2x + 3)(3x - 1)(x - 2) < 0$

23. $(2x - 3)(x - 1)^2(x - 3) \geq 0$

24. $(2x - 3)(x - 1)^2(x - 3) > 0$

25. $x^3 - 5x^2 - 6x < 0$ **26.** $x^3 - x^2 - x + 1 > 0$

27. Indique si cada una de las proposiciones siguientes es verdadera o falsa.

(a) $-3 < -7$ (b) $-1 > -17$ (c) $-3 < -\frac{22}{7}$

28. Indique si cada una de las proposiciones siguientes es verdadera o falsa.

(a) $-5 > -\sqrt{26}$ (b) $\frac{6}{7} < \frac{34}{39}$ (c) $-\frac{5}{7} < -\frac{44}{59}$

29. Suponga que $a > 0, b > 0$. Demuestre cada proposición. *Sugerencia:* cada parte requiere de dos demostraciones: una para $\Rightarrow$ y otra para $\Leftarrow$.

(a) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ (b) $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

30. Si $a \leq b$, ¿cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas?

(a) $a^2 \leq ab$ (b) $a - 3 \leq b - 3$

(c) $a^3 \leq a^2b$ (d) $-a \leq -b$

31. Encuentre todos los valores de x que satisfagan, de manera simultánea, ambas desigualdades.

(a) $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 < 3$

(b) $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 > -4$

(c) $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 < -4$

32. Encuentre todos los valores de x que satisfacen al menos una de las dos desigualdades.

(a) $2x - 7 > 1$ o bien $2x + 1 < 3$

(b) $2x - 7 \leq 1$ o bien $2x + 1 < 3$

(c) $2x - 7 \leq 1$ o bien $2x + 1 > 3$

33. Resuelva para x, exprese su respuesta en notación de intervalos.

(a) $(x + 1)(x^2 + 2x - 7) \geq x^2 - 1$

(b) $x^4 - 2x^2 \geq 8$

(c) $(x^2 + 1)^2 - 7(x^2 + 1) + 10 < 0$

34. Resuelva cada desigualdad. Exprese su solución en notación de intervalos.

(a) $1.99 < \frac{1}{x} < 2.01$ (b) $2.99 < \frac{1}{x + 2} < 3.01$

En los problemas del 35 al 44 determine los conjuntos solución de las desigualdades dadas.

35. $|x - 2| \geq 5$ **36.** $|x + 2| < 1$

37. $|4x + 5| \leq 10$ **38.** $|2x - 1| > 2$

39. $\left|\frac{2x}{7} - 5\right| \geq 7$ **40.** $\left|\frac{x}{4} + 1\right| < 1$

41. $|5x - 6| > 1$ **42.** $|2x - 7| > 3$

43. $\left|\frac{1}{x} - 3\right| > 6$ **44.** $\left|2 + \frac{5}{x}\right| > 1$

En los problemas del 45 al 48 resuelva la desigualdad cuadrática por medio de la fórmula cuadrática.

45. $x^2 - 3x - 4 \geq 0$ **46.** $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

47. $3x^2 + 17x - 6 > 0$ **48.** $14x^2 + 11x - 15 \leq 0$

En los problemas 49 al 52 muestre que la implicación indicada es verdadera.

49. $|x - 3| < 0.5 \Rightarrow |5x - 15| < 2.5$

50. $|x + 2| < 0.3 \Rightarrow |4x + 8| < 1.2$

51. $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{6} \Rightarrow |6x - 12| < \varepsilon$

52. $|x + 4| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |2x + 8| < \varepsilon$

En los problemas del 53 al 56 determine δ (dependiente de ε) de modo que la implicación dada sea verdadera.

53. $|x - 5| < \delta \Rightarrow |3x - 15| < \varepsilon$

54. $|x - 2| < \delta \Rightarrow |4x - 8| < \varepsilon$

55. $|x + 6| < \delta \Rightarrow |6x + 36| < \varepsilon$

56. $|x + 5| < \delta \Rightarrow |5x + 25| < \varepsilon$

57. En un torno, usted desea fabricar un disco (cilindro circular recto delgado) con circunferencia de 10 pulgadas. Esto se realiza midiendo de manera continua el diámetro conforme se hace el disco más pequeño. ¿Qué tan exacto debe medir el diámetro si puede tolerar un error de, a lo sumo, 0.02 pulgadas en la circunferencia?

58. Las temperaturas Fahrenheit y las temperaturas Celsius están relacionadas por la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Un experimento requiere mantener una solución a 50°C con un error de 3% (o 1.5°), a lo sumo. Usted sólo tiene un termómetro Fahrenheit. ¿Qué error se le permite en el experimento?

En los problemas del 59 al 62 resuelva las desigualdades.

59. $|x - 1| < 2|x - 3|$ **60.** $|2x - 1| \geq |x + 1|$

61. $2|2x - 3| < |x + 10|$ **62.** $|3x - 1| < 2|x + 6|$

63. Demuestre que $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$ dando una razón para cada uno de los siguientes pasos.

$$|x| < |y| \Rightarrow |x||x| \leq |x||y| \quad \text{y} \quad |x||y| < |y||y|$$
$$\Rightarrow |x|^2 < |y|^2$$
$$\Rightarrow x^2 < y^2$$

Recíprocamente,

$$x^2 < y^2 \Rightarrow |x|^2 < |y|^2$$
$$\Rightarrow |x|^2 - |y|^2 < 0$$
$$\Rightarrow (|x| - |y|)(|x| + |y|) < 0$$
$$\Rightarrow |x| - |y| < 0$$
$$\Rightarrow |x| < |y|$$

64. Utilice el resultado del problema 63 para demostrar que

$$0 < a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

65. Utilice las propiedades del valor absoluto para demostrar que cada una de las siguientes proposiciones son verdaderas.

(a) $|a - b| \leq |a| + |b|$ (b) $|a - b| \geq |a| - |b|$

(c) $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

66. Utilice la desigualdad del triángulo y el hecho de que $0 < |a| < |b| \Rightarrow 1/|b| < 1/|a|$, para establecer la siguiente cadena de desigualdades.

$$\left|\frac{1}{x^2 + 3} - \frac{1}{|x| + 2}\right| \leq \frac{1}{x^2 + 3} + \frac{1}{|x| + 2} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

67. Demuestre que (véase el problema 66)

$$\left|\frac{x - 2}{x^2 + 9}\right| \leq \frac{|x| + 2}{9}$$

68. Demuestre que

$$|x| \leq 2 \Rightarrow \left|\frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 1}\right| \leq 15$$

69. Demuestre que

$$|x| \leq 1 \Rightarrow |x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{8}x + \tfrac{1}{16}| < 2$$

70. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones:

(a) $x < x^2$ para $x < 0$ o $x > 1$

(b) $x^2 < x$ para $0 < x < 1$

71. Demuestre que $a \neq 0 \Rightarrow a^2 + 1/a^2 \geq 2$. *Sugerencia:* considere $(a - 1/a)^2$.

72. El número $\frac{1}{2}(a + b)$ se le llama promedio, o **media aritmética**, de a y b. Demuestre que la media aritmética de dos números está entre los dos números; es decir, pruebe que

$$a < b \Rightarrow a < \frac{a + b}{2} < b$$

73. El número $\sqrt{ab}$ se denomina **media geométrica** de los dos números positivos a y b. Pruebe que

$$0 < a < b \Rightarrow a < \sqrt{ab} < b$$

74. Para dos números positivos a y b, pruebe que

$$\sqrt{ab} \leq \tfrac{1}{2}(a + b)$$

Ésta es la versión más sencilla de una famosa desigualdad llamada **desigualdad de la media geométrica – media aritmética**.

75. Demuestre que, entre todos los rectángulos con un perímetro dado p, el cuadrado tiene la mayor área. *Sugerencia*: si a y b denotan las longitudes de los lados adyacentes de un rectángulo de perímetro p, entonces el área es ab, y para el cuadrado el área es $a^2 = [(a + b)/2]^2$. Ahora vea el problema 74.

76. Resuelva $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{99} \leq 0$.

77. La fórmula $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ proporciona la resistencia total R en un circuito eléctrico debida a tres resistencias, R_1, R_2 y R_3, conectadas en paralelo. Si $10 \leq R_1 \leq 20$, $20 \leq R_2 \leq 30$ y $30 \leq R_3 \leq 40$, determine el rango de valores de R.

78. El radio de una esfera mide aproximadamente 10 pulgadas. Determine una tolerancia δ en la medición que asegure un error menor que 0.01 pulgadas cuadradas en el valor calculado del área de la superficie de la esfera.

Respuestas a la revisión de conceptos. **1.** $[-1, 5)$; $(-\infty, -2]$ **2.** $b > 0$; $b < 0$ **3.** (b) and (c) **4.** $-1 \leq x \leq 5$

0.3 El sistema de coordenadas rectangulares

En el plano, produzca dos copias de la recta real, una horizontal y la otra vertical, de modo que se intersecten en los puntos cero de las dos rectas. Las dos rectas se denominan **ejes coordenados**, su intersección se etiqueta con O y se denomina **origen**. Por convención, la recta horizontal se llama **eje *x*** y la recta vertical se llama **eje *y***. La mitad positiva del eje x es hacia la derecha, la mitad positiva del eje y es hacia arriba. Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**, que llevan las marcas I, II, III y IV, como se muestra en la figura 1.

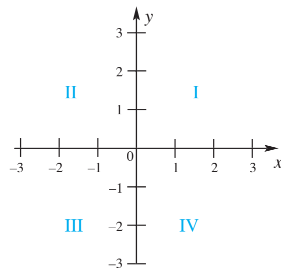


Figura 1

Ahora, cada punto P en el plano puede asignarse a una pareja de números, llamados **coordenadas cartesianas**. Si una línea vertical y otra horizontal que pasan por P intersectan los ejes x y y en a y b, respectivamente, entonces P tiene coordenadas (a, b) (véase la figura 2). Llamamos a (a, b) un **par ordenado** de números debido a que es importante saber cuál número está primero. El primer número, a, es la **coordenada *x*** (o abscisa); el segundo número, b, es la **coordenada *y*** (u ordenada).

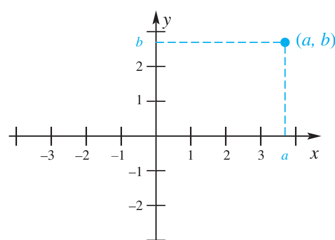


Figura 2

La fórmula de la distancia Con coordenadas a la mano, podemos introducir una fórmula sencilla para la distancia entre cualesquiera dos puntos en el plano. Tiene como base el **Teorema de Pitágoras**, el cual dice que si a y b son las medidas de los dos catetos de un triángulo rectángulo y c es la medida de su hipotenusa (véase la figura 3), entonces

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Recíprocamente, la relación entre los tres lados de un triángulo se cumple sólo para un triángulo rectángulo.

Ahora considérese cualesquiera dos puntos P y Q, con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), respectivamente. Junto con R, el punto de coordenadas (x_2, y_1), P y Q son los vértices de un triángulo rectángulo (véase la figura 4). Las longitudes de PR y RQ son $|x_2 - x_1|$ y $|y_2 - y_1|$, respectivamente. Cuando aplicamos el Teorema de Pitágoras y tomamos la raíz cuadrada principal de ambos lados, obtenemos la expresión siguiente para la **fórmula de la distancia**

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

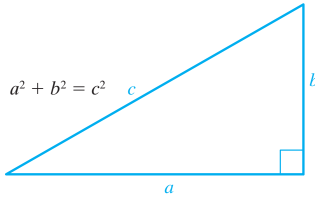


Figura 3

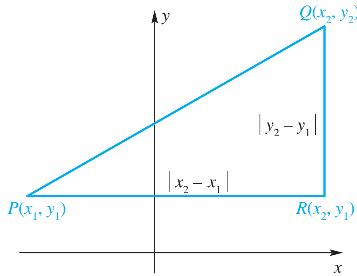


Figura 4

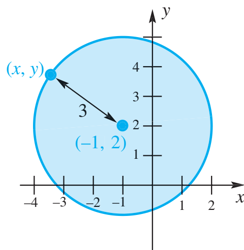


Figura 5

EJEMPLO 1 Encuentre la distancia entre

(a) $P(-2, 3)$ y $Q(4, -1)$ (b) $P(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ y $Q(\pi, \pi)$

SOLUCIÓN

(a) $d(P, Q) = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} \approx 7.21$

(b) $d(P, Q) = \sqrt{(\pi - \sqrt{2})^2 + (\pi - \sqrt{3})^2} \approx \sqrt{4.971} \approx 2.23$ ■

La fórmula es válida incluso si los dos puntos pertenecen a la misma recta horizontal o a la misma recta vertical. Así, la distancia entre $P(-2, 2)$ y $Q(6, 2)$ es

$$\sqrt{(6-(-2))^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{64} = 8$$

La ecuación de una circunferencia Es un paso pequeño ir de la fórmula de la distancia a la ecuación de una circunferencia. Una **circunferencia** es el conjunto de puntos que están a una distancia fija (el *radio*) de un punto fijo (el *centro*). Por ejemplo, considere la circunferencia de radio 3 con centro en $(-1, 2)$ (véase la figura 5). Sea (x, y) un punto cualquiera de esta circunferencia. Por medio de la fórmula de la distancia,

$$\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2} = 3$$

Cuando elevamos al cuadrado ambos lados obtenemos

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

que llamamos la ecuación de esta circunferencia.

En forma más general, la circunferencia de radio r y centro (h, k) tiene la ecuación

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad (1)$$

A esto le llamamos **ecuación estándar de una circunferencia.**

EJEMPLO 2 Determine la ecuación estándar de una circunferencia de radio 5 y centro en $(1, -5)$. También, encuentre las ordenadas de los dos puntos en esta circunferencia con abscisa 2.

SOLUCIÓN La ecuación buscada es

$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 25$$

Para realizar la segunda tarea, sustituimos $x = 2$ en la ecuación y despejamos la y.

$$(2 - 1)^2 + (y + 5)^2 = 25$$
$$(y + 5)^2 = 24$$
$$y + 5 = \pm\sqrt{24}$$
$$y = -5 \pm \sqrt{24} = -5 \pm 2\sqrt{6}$$ ■

Si desarrollamos los dos cuadrados en el recuadro (1) y reducimos las constantes, entonces la ecuación adquiere la forma

$$x^2 + ax + y^2 + by = c$$

Esto sugiere la pregunta de si toda ecuación de la última forma es la ecuación de una circunferencia. La respuesta es sí, con algunas excepciones obvias.

Circunferencia ↔ Ecuación

Decir que

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

es la ecuación de la circunferencia de radio 3 con centro $(-1, 2)$ significa dos cosas:

1. Si un punto está en esta circunferencia, entonces sus coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación.
2. Si x y y son números que satisfacen la ecuación, entonces son las coordenadas de un punto en la circunferencia.

EJEMPLO 3 Demuestre que la ecuación

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y = -6$$

representa una circunferencia, y determine su centro y su radio.

SOLUCIÓN Necesitamos *completar el cuadrado*, un importante proceso en muchos contextos. Para completar el cuadrado de $x^2 \pm bx$, sumamos $(b/2)^2$. Así, sumamos $(-2/2)^2 = 1$ a $x^2 - 2x$ y $(6/2)^2 = 9$ a $y^2 + 6y$, y por supuesto debemos añadir los mismos números al lado derecho de la ecuación, para obtener

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = -6 + 1 + 9$$
$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$$

La última ecuación está en la forma estándar. Es la ecuación de una circunferencia con centro en $(1, -3)$ y radio 2. Si, como resultado de este proceso, obtuviésemos un número negativo en el lado derecho de la ecuación final, la ecuación no representaría curva alguna. Si obtuviésemos cero, la ecuación representaría un solo punto $(1, -3)$. ■

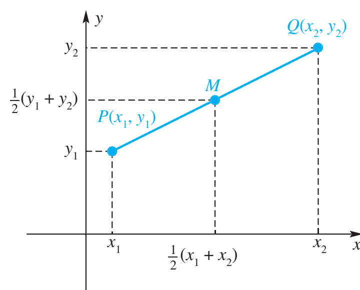


Figura 6

La fórmula del punto medio Considere dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ con $x_1 \le x_2$ y $y_1 \le y_2$, como en la figura 6. La distancia entre x_1 y x_2 es $x_2 - x_1$. Cuando le sumamos la mitad de esta distancia, $\frac{1}{2}(x_2 - x_1)$, a x_1, obtenemos el punto medio entre x_1 y x_2.

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Por lo tanto, el punto $(x_1 + x_2)/2$ es el punto medio entre x_1 y x_2 sobre el eje x y, en consecuencia, el punto medio M del segmento PQ tiene a $(x_1 + x_2)/2$ como su coordenada x. De manera análoga, podemos mostrar que $(y_1 + y_2)/2$ es la coordenada y de M. Así, tenemos la **fórmula del punto medio**

> El punto medio del segmento de recta que une $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es
> $$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

EJEMPLO 4 Determine la ecuación de la circunferencia que tiene como un diámetro el segmento que va de $(1, 3)$ a $(7, 11)$.

SOLUCIÓN El centro de la circunferencia está en el punto medio del diámetro; por lo tanto, el centro tiene coordenadas $(1 + 7)/2 = 4$ y $(3 + 11)/2 = 7$. La longitud del diámetro, obtenida por medio de la fórmula de distancia, es

$$\sqrt{(7 - 1)^2 + (11 - 3)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

de modo que el radio de la circunferencia es 5. La ecuación de la circunferencia es

$$(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 25$$ ■

Rectas Considere la recta de la figura 7. Del punto A al punto B existe una **elevación** (cambio vertical) de 2 unidades y un **avance** (cambio horizontal) de 5 unidades. Decimos que la recta tiene una pendiente de 2/5. En general (véase la figura 8), para una recta que pasa por $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, en donde $x_1 \neq x_2$, definimos la **pendiente** m de esa recta como

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{avance}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

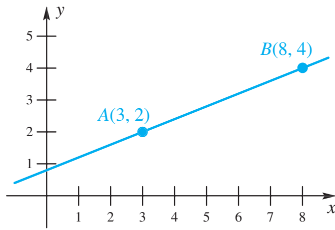


Figura 7

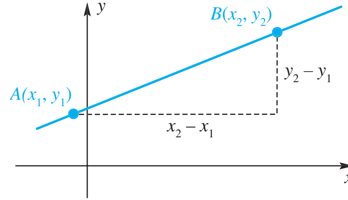


Figura 8

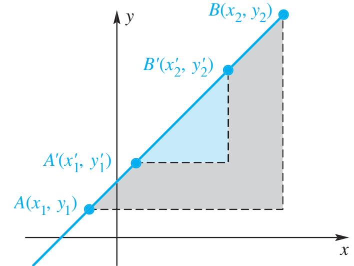


Figura 9

¿El valor que obtuvimos para la pendiente depende de la pareja de puntos que utilicemos para A y B? Los triángulos semejantes en la figura 9 nos muestran que

$$\frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Así, los puntos A' y B' darían lo mismo que A y B. Incluso, no importa si A está a la izquierda o a la derecha de B, ya que

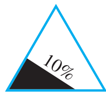
$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Todo lo que importa es que restemos las coordenadas en el mismo orden en el numerador y el denominador.

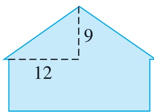
La pendiente m es una medida de la inclinación de una recta, como se ilustra en la figura 10. Observe que una recta horizontal tiene pendiente cero, una recta que se eleva hacia la derecha tiene pendiente positiva y una recta que desciende a la derecha tiene pendiente negativa. Mientras mayor sea el valor absoluto de la pendiente, más inclinada será la recta. El concepto de pendiente de una recta vertical no tiene sentido, ya que implicaría la división entre cero. Por lo tanto, la pendiente para una recta vertical se deja indefinida.

Grado (nivel) e inclinación

El símbolo internacional para la pendiente de un camino (llamado grado) se muestra abajo. El grado está dado como porcentaje. Un grado de 10% corresponde a una pendiente de ±0.10.



Los carpinteros utilizan el término *inclinación*. Una inclinación de 9:12 corresponde a una pendiente de $\frac{9}{12}$.



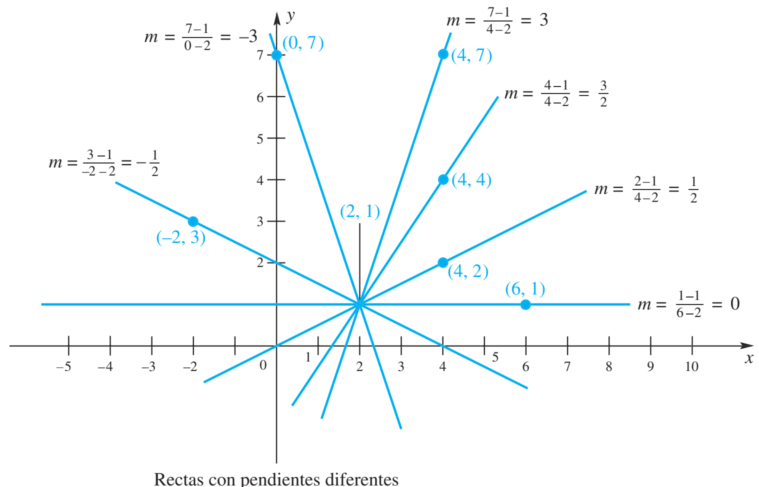


Figura 10

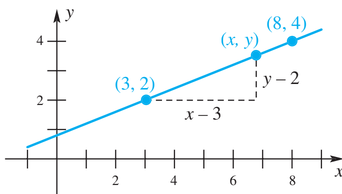


Figura 11

La forma punto-pendiente Otra vez, considere la recta de nuestro estudio inicial; se reproduce en la figura 11. Sabemos que esta recta

1. pasa por $(3, 2)$ y
2. tiene pendiente $\frac{2}{5}$.

Tome cualquier otro punto de esta recta, como el que tiene coordenadas (x, y). Si utilizamos este punto y el punto (3, 2) para medir la pendiente, debemos obtener $\frac{2}{5}$, es decir,

$$\frac{y - 2}{x - 3} = \frac{2}{5}$$

o, después de multiplicar por $x - 3$,

$$y - 2 = \tfrac{2}{5}(x - 3)$$

Observe que a esta última ecuación la satisfacen todos los puntos de la recta, incluso (3, 2). Además, ningún punto que no pertenezca a la recta puede satisfacer esta ecuación.

Lo que acabamos de hacer en un ejemplo lo podemos hacer en general. La recta que pasa por el punto (fijo) (x_1, y_1) con pendiente m tiene ecuación

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

A esta forma le llamamos **punto–pendiente** de la ecuación de una recta.

Una vez más considere la recta de nuestro ejemplo. Esa recta pasa por (8, 4), así como por (3, 2). Si utilizamos (8, 4) como (x_1, y_1), obtenemos la ecuación

$$y - 4 = \tfrac{2}{5}(x - 8)$$

la cual parece muy diferente de $y - 2 = \frac{2}{5}(x - 3)$. Sin embargo, ambas pueden simplificarse a $5y - 2x = 4$; son equivalentes.

EJEMPLO 5 Determine una ecuación de la recta que pasa por $(-4, 2)$ y $(6, -1)$.

SOLUCIÓN La pendiente es $m = (-1 - 2)/(6 + 4) = -\frac{3}{10}$. Por lo tanto, usando $(-4, 2)$ como el punto fijo obtenemos la ecuación

$$y - 2 = -\tfrac{3}{10}(x + 4)$$ ■

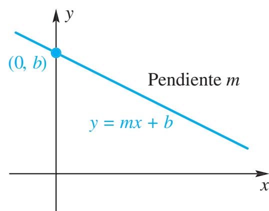


Figura 12

La forma pendiente intersección La ecuación de una recta puede expresarse de varias formas. Suponga que se nos ha dado la pendiente m de la recta y la intersección b con el eje y —es decir, la recta intersecta al eje y en $(0, b)$—, como se muestra en la figura 12. Al seleccionar $(0, b)$ como (x_1, y_1) y al aplicar la forma punto–pendiente, obtenemos

$$y - b = m(x - 0)$$

que puede reescribirse como

$$\boxed{y = mx + b}$$

La última se denomina forma **pendiente intersección**. En todo momento que veamos una ecuación escrita en esta forma, la reconocemos como una recta y de manera inmediata leemos su pendiente y su intersección con el eje y. Por ejemplo, considere la ecuación

$$3x - 2y + 4 = 0$$

Si despejamos la y, obtenemos

$$y = \tfrac{3}{2}x + 2$$

Ésta es la ecuación de una recta con pendiente $\frac{3}{2}$ e intersección con el eje y igual a 2.

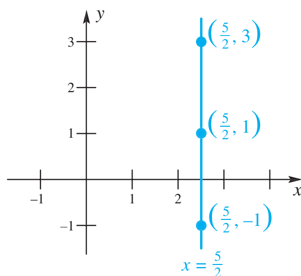


Figura 13

Ecuación de una recta vertical Las rectas verticales no caen dentro del estudio precedente, ya que el concepto de pendiente no está definido para ellas; aunque tienen ecuaciones muy sencillas. La recta en la figura 13 tiene ecuación $x = \frac{5}{2}$, ya que un punto está en la recta si y sólo si satisface esta ecuación. La ecuación de cualquier recta vertical puede escribirse en la forma $x = k$, donde k es una constante. Debe notarse que la ecuación de una recta horizontal puede escribirse en la forma $y = k$.

La forma $Ax + By + C = 0$ Sería bueno tener una forma que cubra todos los casos, incluyendo las rectas verticales. Por ejemplo, considere,

Resumen: ecuaciones de rectas
Recta vertical: $x = k$
Recta horizontal: $y = k$
Forma punto–pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$
Forma pendiente intercepción: $y = mx + b$
Ecuación lineal general: $Ax + By + C = 0$

$$y - 2 = -4(x + 2)$$

$$y = 5x - 3$$

$$x = 5$$

Éstas pueden reescribirse (pasando todo al lado izquierdo) como sigue:

$$4x + y + 6 = 0$$
$$-5x + y + 3 = 0$$
$$x + 0y - 5 = 0$$

Todas tienen la forma

$$Ax + By + C = 0, \qquad A \text{ y } B \text{ no son cero al mismo tiempo}$$

que llamamos la **ecuación lineal general** (o ecuación general de la recta). Sólo se requiere un poco de reflexión para ver que la ecuación de cualquier recta puede escribirse en esta forma. Recíprocamente, la gráfica de la ecuación lineal general siempre es una recta.

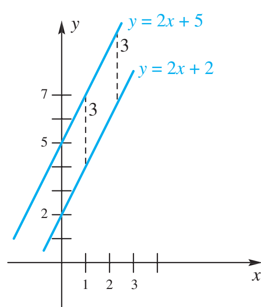


Figura 14

Rectas paralelas Se dice que dos rectas son paralelas cuando no tienen puntos en común. Por ejemplo, las rectas cuyas ecuaciones son $y = 2x + 2$ y $y = 2x + 5$ son paralelas porque, para todo valor de x, la segunda recta está tres unidades por arriba de la primera (véase la figura 14). De manera análoga, las rectas con ecuaciones $-2x + 3y + 12 = 0$ y $4x - 6y = 5$ son paralelas. Para ver esto, de cada ecuación despéjese y (*i.e., es decir*, escriba cada una en la forma pendiente intersección. Esto da $y = \frac{2}{3}x - 4$ y $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$, respectivamente. Otra vez, como las pendientes son iguales, una recta estará un número fijo de unidades por arriba o por debajo de la otra, de modo que las rectas nunca se intersectarán. Si dos rectas tienen la misma pendiente y la misma intersección y, entonces las dos rectas son la misma y no son paralelas.

Resumimos estableciendo que dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente y diferentes intersecciones con el eje y. Dos rectas verticales son paralelas si y sólo si son rectas distintas.

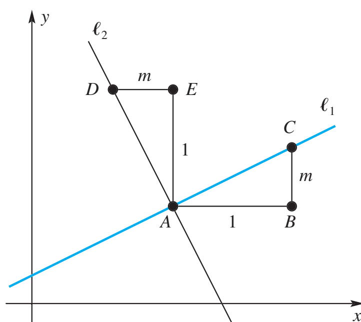


Figura 15

EJEMPLO 6 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por (6, 8) y es paralela a la recta con ecuación $3x - 5y = 11$.

SOLUCIÓN Cuando despejamos la y de $3x - 5y = 11$, obtenemos $y = \frac{3}{5}x - \frac{11}{5}$, de la cual leemos que la pendiente de la recta es $\frac{3}{5}$. La ecuación de la recta deseada es

$$y - 8 = \tfrac{3}{5}(x - 6)$$

o, de manera equivalente, $y = \frac{3}{5}x + \frac{22}{5}$. Sabemos que estas rectas son distintas porque las intersecciones con el eje y son diferentes. ■

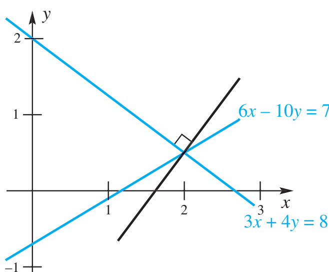


Figura 16

Rectas perpendiculares ¿Existe alguna condición sencilla que caracterice a las rectas perpendiculares? Sí; *dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son recíprocas negativas, una respecto de la otra.* Para ver por qué esto es verdadero, considere la figura 15. Ésta cuenta casi toda la historia; se deja como ejercicio (problema 57) construir una demostración geométrica de que dos rectas (no verticales) son perpendiculares si y sólo si $m_2 = -1/m_1$.

EJEMPLO 7 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas con ecuaciones $3x + 4y = 8$ y $6x - 10y = 7$ y que es perpendicular a la primera de estas rectas (véase la figura 16).

SOLUCIÓN Para encontrar el punto de intersección de las dos rectas, multiplicamos la primera ecuación por -2 y la sumamos a la segunda ecuación

$$\begin{aligned} -6x - 8y &= -16 \\ 6x - 10y &= 7 \\ \hline - 18y &= -9 \\ y &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Al sustituir $y = \frac{1}{2}$ en cualesquiera de las ecuaciones originales se obtiene $x = 2$. El punto de intersección es $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Cuando despejamos la y de la primera ecuación (para ponerla en la forma pendiente intersección), obtenemos $y = -\frac{3}{4}x + 2$. Una recta perpendicular a ellas tiene pendiente $\frac{4}{3}$. La ecuación de la recta requerida es

$$y - \frac{1}{2} = \frac{4}{3}(x - 2)$$ ■

Revisión de conceptos

1. La distancia entre los puntos $(-2, 3)$ y (x, y) es ________.

2. La ecuación de la circunferencia de radio 5 y centro en $(-4, 2)$ es ________.

3. El punto medio del segmento de recta que une a $(-2, 3)$ y $(5, 7)$ es ________.

4. La recta que pasa por (a, b) y (c, d) tiene pendiente $m =$ ________, siempre que $a \neq c$.

Conjunto de problemas 0.3

En los problemas del 1 al 4 grafique los puntos dados en el plano coordenado y luego determine la distancia entre ellos.

1. $(3, 1), (1, 1)$ **2.** $(-3, 5), (2, -2)$

3. $(4, 5), (5, -8)$ **4.** $(-1, 5), (6, 3)$

5. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $(5, 3)$, $(-2, 4)$ y $(10, 8)$ es isósceles.

6. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $(2, -4)$, $(4, 0)$ y $(8, -2)$ es un triángulo rectángulo.

7. Los puntos $(3, -1)$ y $(3, 3)$ son dos vértices de un cuadrado. Proporcione otros tres pares de posibles vértices.

8. Encuentre el punto en el eje x que sea equidistante de $(3, 1)$ y $(6, 4)$.

9. Determine la distancia entre $(-2, 3)$ y el punto medio del segmento de recta que une a $(-2, -2)$ y $(4, 3)$.

10. Determine la longitud del segmento de recta que une los puntos medios de los segmentos AB y CD, donde $A = (1, 3)$, $B = (2, 6)$, $C = (4, 7)$ y $D = (3, 4)$.

En los problemas del 11 al 16 determine la ecuación de la circunferencia que satisface las condiciones dadas.

11. Centro en $(1, 1)$, radio 1.

12. Centro en $(-2, 3)$, radio 4.

13. Centro en $(2, -1)$ y que pasa por $(5, 3)$.

14. Centro en $(4, 3)$ y que pasa por $(6, 2)$.

15. Diámetro AB, donde $A = (1, 3)$ y $B = (3, 7)$.

16. Centro en $(3, 4)$ y tangente al eje x.

En los problemas del 17 al 22 determine el centro y el radio de la circunferencia con la ecuación dada.

17. $x^2 + 2x + 10 + y^2 - 6y - 10 = 0$

18. $x^2 + y^2 - 6y = 16$

19. $x^2 + y^2 - 12x + 35 = 0$

20. $x^2 + y^2 - 10x + 10y = 0$

21. $4x^2 + 16x + 15 + 4y^2 + 6y = 0$

22. $x^2 + 16x + \frac{105}{16} + 4y^2 + 3y = 0$

En los problemas del 23 al 28, determine la pendiente de la recta que contiene los dos puntos dados.

23. $(1, 1)$ y $(2, 2)$ **24.** $(3, 5)$ y $(4, 7)$

25. $(2, 3)$ y $(-5, -6)$ **26.** $(2, -4)$ y $(0, -6)$

27. $(3, 0)$ y $(0, 5)$ **28.** $(-6, 0)$ y $(0, 6)$

En los problemas del 29 al 34 determine una ecuación para cada recta. Luego escriba su respuesta en la forma $Ax + By + C = 0$.

29. Pasa por $(2, 2)$ con pendiente -1

30. Pasa por $(3, 4)$ con pendiente -1

31. Con intercepción y igual a 3 y pendiente 2

32. Con intercepción y igual a 5 y pendiente 0

33. Pasa por $(2, 3)$ y $(4, 8)$

34. Pasa por $(4, 1)$ y $(8, 2)$

En los problemas del 35 al 38 determine la pendiente y la intercepción con el eje y de cada recta.

35. $3y = -2x + 1$ **36.** $-4y = 5x - 6$

37. $6 - 2y = 10x - 2$ **38.** $4x + 5y = -20$

39. Escriba una ecuación para la recta que pasa por $(3, -3)$ y que es

(a) paralela a la recta $y = 2x + 5$;

(b) perpendicular a la recta $y = 2x + 5$;

(c) paralela a la recta $2x + 3y = 6$;

(d) perpendicular a la recta $2x + 3y = 6$;

(e) paralela a la recta que pasa por $(-1, 2)$ y $(3, -1)$;

(f) paralela a la recta $x = 8$;

(g) perpendicular a la recta $x = 8$.

40. Determine el valor de c para el cual la recta $3x + cy = 5$

(a) pasa por el punto $(3, 1)$;

(b) es paralela al eje y;

(c) es paralela a la recta $2x + y = -1$;

(d) tiene intersecciones con el eje x y con el eje y iguales;

(e) es perpendicular a la recta $y - 2 = 3(x + 3)$.

41. Escriba la ecuación para la recta que pasa por $(-2, -1)$ y que es perpendicular a la recta $y + 3 = -\frac{2}{3}(x - 5)$.

42. Determine el valor de k, tal que la recta $kx - 3y = 10$

(a) es paralela a la recta $y = 2x + 4$;

(b) es perpendicular a la recta $y = 2x + 4$;

(c) es perpendicular a la recta $2x + 3y = 6$.

43. ¿El punto $(3, 9)$ está por arriba o por debajo de la recta $y = 3x - 1$?

44. Demuestre que la ecuación de la recta con intersección con el eje x igual a $a \neq 0$ e intersección con el eje y igual a $b \neq 0$ puede escribirse como

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

En los problemas del 45 al 48 determine las coordenadas del punto de intersección. Después escriba una ecuación para la recta que pasa por ese punto y que es perpendicular a la primera de las rectas dadas.

45. $2x + 3y = 4$, $-3x + y = 5$ **46.** $4x - 5y = 8$, $2x + y = -10$

47. $3x - 4y = 5$, $2x + 3y = 9$ **48.** $5x - 2y = 5$, $2x + 3y = 6$

49. Los puntos $(2, 3)$, $(6, 3)$, $(6, -1)$ y $(2, -1)$ son vértices de un cuadrado. Determine las ecuaciones de la circunferencia inscrita y de la circunferencia circunscrita.

≈ **50.** Un banda se ajusta estrechamente alrededor de dos circunferencias, con ecuaciones $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$ y $(x + 9)^2 + (y - 10)^2 = 16$. ¿Cuál es la longitud de dicha banda?

51. Demuestre que el punto medio de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo equidista de los tres vértices.

52. Encuentre una ecuación de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo rectángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(8, 0)$ y $(0, 6)$.

53. Demuestre que las dos circunferencias $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 11 = 0$ y $x^2 + y^2 + 20x - 12y + 72 = 0$ no se intersectan. *Sugerencia:* Determine la distancia entre los dos centros.

54. ¿Qué relación deben cumplir a, b y c, si $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ es la ecuación de una circunferencia?

55. El techo de un ático forma un ángulo de 30° con el piso. Un tubo de 2 pulgadas de radio se coloca a lo largo del borde del ático, de tal manera que un lado del tubo toca el techo y el otro lado toca el piso (véase la figura 17). ¿Cuál es la distancia d desde el borde del ático hasta donde el tubo toca el piso?

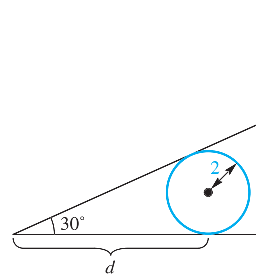


Figura 17

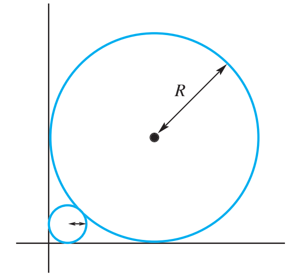


Figura 18

56. Una circunferencia de radio R se coloca en el primer cuadrante, como se muestra en la figura 18. ¿Cuál es el radio r de la circunferencia más grande que puede colocarse entre la primera circunferencia y el origen?

57. Construya una demostración geométrica, con base en la figura 15, que pruebe que dos rectas son perpendiculares sí y sólo si sus pendientes son recíprocas negativas una de la otra.

58. Demuestre que el conjunto de puntos que están al doble de distancia de $(3, 4)$ que de $(1, 1)$ forman una circunferencia. Determine su centro y radio.

59. El Teorema de Pitágoras dice que las áreas A, B y C de los cuadrados en la figura 19 satisfacen $A + B = C$. Demuestre que los semicírculos y los triángulos equiláteros satisfacen la misma relación y luego sugiera un teorema general de estos hechos.

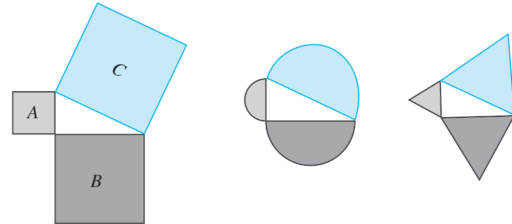


Figura 19

60. Considere una circunferencia C y un punto P exterior a ella. Sea PT el segmento de recta tangente a C en T, y suponga que la recta que pasa por P y por el centro de C intersecta a C en M y en N. Demuestre que $(PM)(PN) = (PT)^2$.

≈ **61.** Una banda se ajusta alrededor de las tres circunferencias $x^2 + y^2 = 4$, $(x - 8)^2 + y^2 = 4$ y $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 4$, como se muestra en la figura 20. Determine la longitud de esta banda.

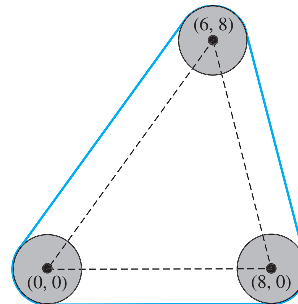


Figura 20

62. Estudie los problemas 50 y 61. Considere un conjunto de circunferencias de radio r que no se intersectan, cuyos centros son los vértices de un polígono convexo de n lados con longitudes $d_1, d_2, \ldots, d_n$. ¿Cuál es la longitud de la banda que se ajusta alrededor de estas circunferencias (de la misma forma que se muestra en la figura 20)?

Puede demostrarse que la distancia d del punto (x_1, y_1) a la recta $Ax + By + C = 0$ es

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Utilice este resultado para determinar la distancia desde el punto dado hasta la recta dada.

63. $(-3, 2); 3x + 4y = 6$

64. $(4, -1); 2x - 2y + 4 = 0$

65. $(-2, -1); 5y = 12x + 1$

66. $(3, -1); y = 2x - 5$

En los problemas 67 y 68 determine la distancia (perpendicular) entre las rectas paralelas dadas. Sugerencia: primero encuentre un punto sobre una de las rectas.

67. $2x + 4y = 7, 2x + 4y = 5$

68. $7x - 5y = 6, 7x - 5y = -1$

69. Determine la ecuación para la recta que biseca al segmento de recta que va de (–2, 3) a (1, –2) y que forma ángulos rectos con este segmento de recta.

70. El centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo se encuentra en los bisectores perpendiculares (mediatrices) de los lados. Utilice este hecho para encontrar el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo con vértices (0, 4), (2, 0) y (4, 6).

71. Determine el radio de la circunferencia que está inscrita en un triángulo con lados de longitudes 3, 4 y 5 (véase la figura 21).

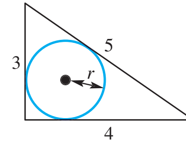


Figura 21

72. Suponga que (a, b) está en la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$. Demuestre que la recta $ax + by = r^2$ es tangente a la circunferencia en (a, b).

73. Determine las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$ que pasan por el punto (12, 0). *Sugerencia:* véase el problema 72.

74. Exprese la distancia perpendicular entre las rectas paralelas $y = mx + b$ y $y = mx + B$, en términos de m, b y B. *Sugerencia:* la distancia pedida es la misma que aquella entre $y = mx$ y $y = mx + B - b$.

75. Demuestre que la recta que pasa por los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado. Sugerencia: puede suponer que el triángulo tiene vértices en (0, 0), $(a, 0)$ y (b, c).

76. Demuestre que los segmentos de recta que unen a los puntos medios de lados adyacentes de cualquier cuadrilátero (polígono con cuatro lados) forman un paralelogramo.

≈ **77.** Una rueda cuyo borde tiene ecuación $x^2 + (y - 6)^2 = 25$ gira rápidamente en dirección contraria a las manecillas del reloj. Una partícula de lodo, en el borde, sale despedida en el punto (3, 2) y vuela hacia la pared en $x = 11$. ¿Aproximadamente a qué altura pegará en la pared? *Sugerencia:* la partícula de lodo vuela de forma tangente tan rápido que los efectos de la gravedad son despreciables durante el tiempo que le toma golpear la pared.

Respuestas a la revisión de conceptos:
1. $\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2}$ **2.** $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$
3. (1.5, 5) **4.** $(d - b)/(c - a)$

0.4 Gráficas de ecuaciones

El uso de coordenadas para puntos en el plano nos permite describir curvas (un objeto geométrico) por medio de una ecuación (un objeto algebraico). En las secciones anteriores vimos cómo esto se hizo para circunferencias y rectas. Ahora queremos considerar el proceso inverso: graficar una ecuación. La **gráfica de una ecuación** en x y y consiste en aquellos puntos en el plano cuyas coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación; es decir, hacen verdadera la igualdad.

Procedimiento para graficar Para graficar una ecuación, por ejemplo, $y = 2x^3 - x + 19$, manualmente, podemos seguir un procedimiento sencillo de tres pasos:

Paso 1: Obtener las coordenadas de algunos puntos que satisfagan la ecuación.

Paso 2: Graficar estos puntos en el plano.

Paso 3: Conectar los puntos con una curva suave.

Este método simplista tendrá que ser suficiente hasta el capítulo 3, cuando utilizaremos métodos más avanzados para graficar ecuaciones. La mejor forma de hacer el paso 1 es construir una tabla de valores. Asignar valores a una de las variables, tal como x, y determinar los valores correspondientes de la otra variable, creando una lista, en forma tabular, de los resultados.

Una calculadora gráfica o un sistema de álgebra por computadora (CAS, del inglés computer algebra sistem) seguirán un procedimiento muy similar, aunque su proceso es transparente para el usuario. Un usuario sólo define la función y pide a la calculadora gráfica, o a la computadora, que la grafique.

EJEMPLO 1 Haga la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 3$.

SOLUCIÓN El procedimiento de tres pasos se muestra en la figura 1.

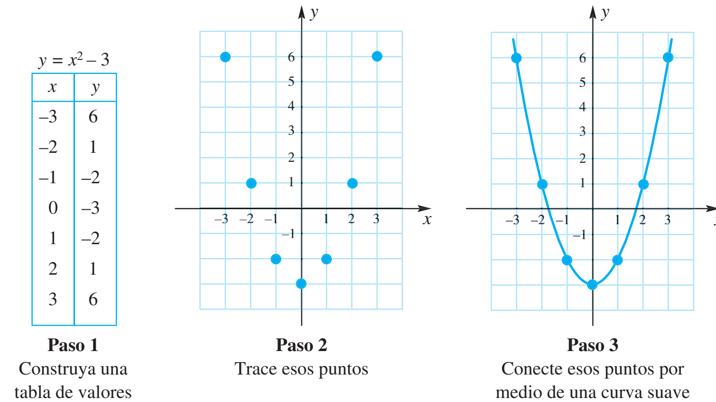


Figura 1 ■

Por supuesto, usted necesita un poco de sentido común y hasta un poco de fe. Cuando obtenga puntos que parecen fuera de lugar, verifique sus cálculos. Cuando conecte los puntos que ha trazado por medio de una curva suave, estará suponiendo que la curva se comporta de manera regular entre puntos consecutivos, lo cual es un acto de fe. Por esto, usted debe graficar suficientes puntos de modo que el esbozo de la curva parezca ser claro; entre más puntos grafique, menos fe necesitará. También, debe reconocer que rara vez muestra la curva completa. En nuestro ejemplo, la curva tiene ramas infinitamente largas que se amplían cada vez más. Pero nuestra gráfica muestra las características esenciales. Ésta es nuestra meta al graficar. Mostrar lo suficiente de la gráfica de modo que las características esenciales sean visibles. Más adelante (sección 3.5) usaremos las herramientas del cálculo para refinar y mejorar nuestra comprensión de las gráficas.

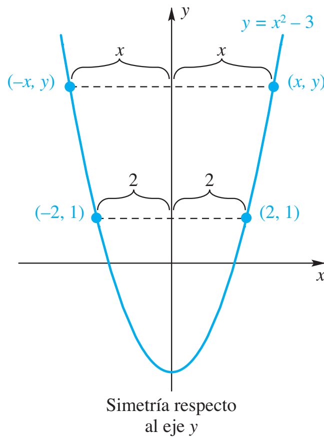


Figura 2

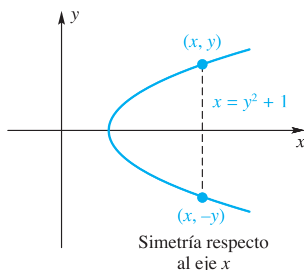


Figura 3

Simetría de una gráfica Algunas veces podemos reducir a la mitad el trabajo de graficar, si reconocemos ciertas simetrías de la gráfica reveladas por su ecuación. Observe la gráfica de $y = x^2 - 3$, dibujada anteriormente y otra vez en la figura 2. Si el plano coordenado se doblase a lo largo del eje y, las dos ramas de la gráfica coincidirían. Por ejemplo, (3, 6) coincidiría con (−3, 6); (2, 1) coincidiría con (−2, 1); y de una manera más general, (x, y) coincidiría con $(-x, y)$. De forma algebraica, esto corresponde al hecho de que reemplazar x por $-x$ en la ecuación $y = x^2 - 3$ resulta en una ecuación equivalente.

Considere una gráfica arbitraria. Es simétrica respecto al eje y si siempre que (x, y) está en la gráfica, entonces $(-x, y)$ también está en la gráfica (véase la figura 2). De forma análoga, es simétrica respecto al eje x si siempre que (x, y) está en la gráfica, $(x, -y)$ también está en la gráfica (véase la figura 3). Por último, una gráfica es simétrica respecto al origen si cada vez que (x, y) está en la gráfica, $(-x, -y)$ también está en la gráfica (véase el ejemplo 2).

En términos de ecuaciones, tenemos tres pruebas sencillas. La gráfica de una ecuación es

1. simétrica respecto al eje y, si al reemplazar x por $-x$ se obtiene una ecuación equivalente (por ejemplo, $y = x^2$);
2. simétrica respecto al eje x, si al reemplazar y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente (por ejemplo, $x = y^2 + 1$);
3. simétrica respecto al origen, si al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente [$y = x^3$ es un buen ejemplo ya que $-y = (-x)^3$ es equivalente a $y = x^3$].

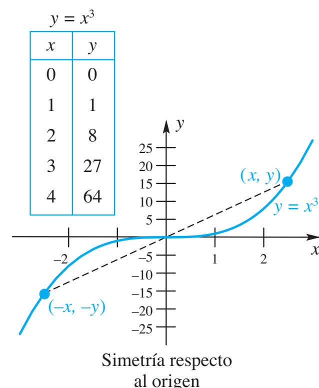


Figura 4

EJEMPLO 2 Haga un bosquejo de la gráfica de $y = x^3$.

SOLUCIÓN Notemos, como se señaló anteriormente, que la gráfica será simétrica con respecto al origen, así que sólo necesitamos obtener una tabla de valores para x no negativa; por medio de la simetría podemos determinar puntos que estén apareados. Por ejemplo, que $(2, 8)$ pertenezca a la gráfica nos dice que $(-2, -8)$ está en la gráfica; que $(3, 27)$ esté en la gráfica nos dice que $(-3, -27)$ está en la gráfica, y así sucesivamente. Véase la figura 4. ■

Al graficar $y = x^3$, utilizamos una escala más pequeña en el eje y que en el eje x. Esto hizo posible mostrar una parte mayor de la gráfica (al aplanarse, la gráfica también se distorsionó). Cuando grafique a mano, le sugerimos que antes de colocar las escalas en los dos ejes debe examinar su tabla de valores. Seleccione escalas de modo que todos, o la mayoría de los puntos, puedan graficarse y se conserve su gráfica de tamaño razonable. Con frecuencia, una calculadora gráfica o un sistema de álgebra computacional (CAS) seleccionan la escala para las y una vez que usted ha elegido las x que se utilizarán. Por lo tanto, la primera elección que usted hace es graficar los valores de x. La mayoría de las calculadoras gráficas y los CAS le permiten pasar por alto el escalamiento automático del eje y. Es posible que en algunos casos usted necesite esta opción.

Calculadoras gráficas

Si usted tiene una calculadora gráfica, utilícela siempre que sea posible para reproducir las gráficas que se muestran en las figuras.

Intersecciones con los ejes coordenados Los puntos en donde la gráfica de una ecuación cruza los ejes coordenados tienen un papel importante en muchos problemas. Por ejemplo, considere

$$y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

Observe que $y = 0$ cuando $x = -2, 1, 3$. Los números –2, 1 y 3 se denominan **intersecciones con el eje *x***. De manera análoga, $y = 6$ cuando $x = 0$, y así, 6 se llama la **intersección con el eje *y***.

EJEMPLO 3 Determine todas las intersecciones con los ejes coordenados de la gráfica de $y^2 - x + y - 6 = 0$.

SOLUCIÓN Haciendo $y = 0$ en la ecuación dada, obtenemos $x = -6$, y así, la intersección con el eje x es –6. Haciendo $x = 0$ en la ecuación, encontramos que $y^2 + y - 6 = 0$, o $(y + 3)(y - 2) = 0$; las intersecciones con el eje y son -3 y 2. Una verificación de las simetrías indica que la gráfica no tiene ninguna simetría de los tres tipos estudiados anteriormente. La gráfica se muestra en la figura 5. ■

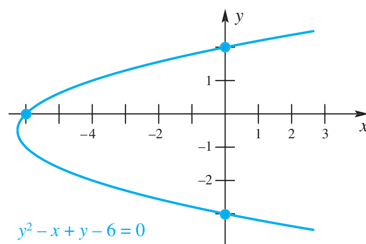


Figura 5

Como las ecuaciones cuadráticas y cúbicas con frecuencia se utilizarán como ejemplos en el trabajo posterior, mostramos sus gráficas comunes en la figura 6.

Las gráficas de las ecuaciones cuadráticas son curvas en forma de copas llamadas **parábolas**. Si una ecuación tiene la forma $y = ax^2 + bx + c$, o $x = ay^2 + by + c$, con $a \neq 0$; su gráfica es una parábola. En el primer caso, la gráfica se abre hacia arriba, si $a > 0$ y se abre hacia abajo si $a < 0$. En el segundo caso, la gráfica se abre hacia la derecha si $a > 0$ y se abre hacia la izquierda si $a < 0$. Observe que la ecuación del ejemplo 3 puede ponerse en la forma $x = y^2 + y - 6$.

Intersecciones de gráficas Con frecuencia, necesitamos conocer los puntos de intersección de dos gráficas. Estos puntos se determinan cuando se resuelven, de manera simultánea, las dos ecuaciones para las gráficas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Determine los puntos de intersección de la recta $y = -2x + 2$ y la parábola $y = 2x^2 - 4x - 2$, y haga un bosquejo de ambas gráficas en el mismo plano de coordenadas.

SOLUCIÓN Debemos resolver de manera simultánea las dos ecuaciones. Esto es fácil de hacer al sustituir la expresión para y de la primera ecuación en la segunda y al despejar enseguida la x de la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} -2x + 2 &= 2x^2 - 4x - 2 \\ 0 &= 2x^2 - 2x - 4 \\ 0 &= 2(x + 1)(x - 2) \\ x &= -1, \qquad x = 2 \end{aligned}$$

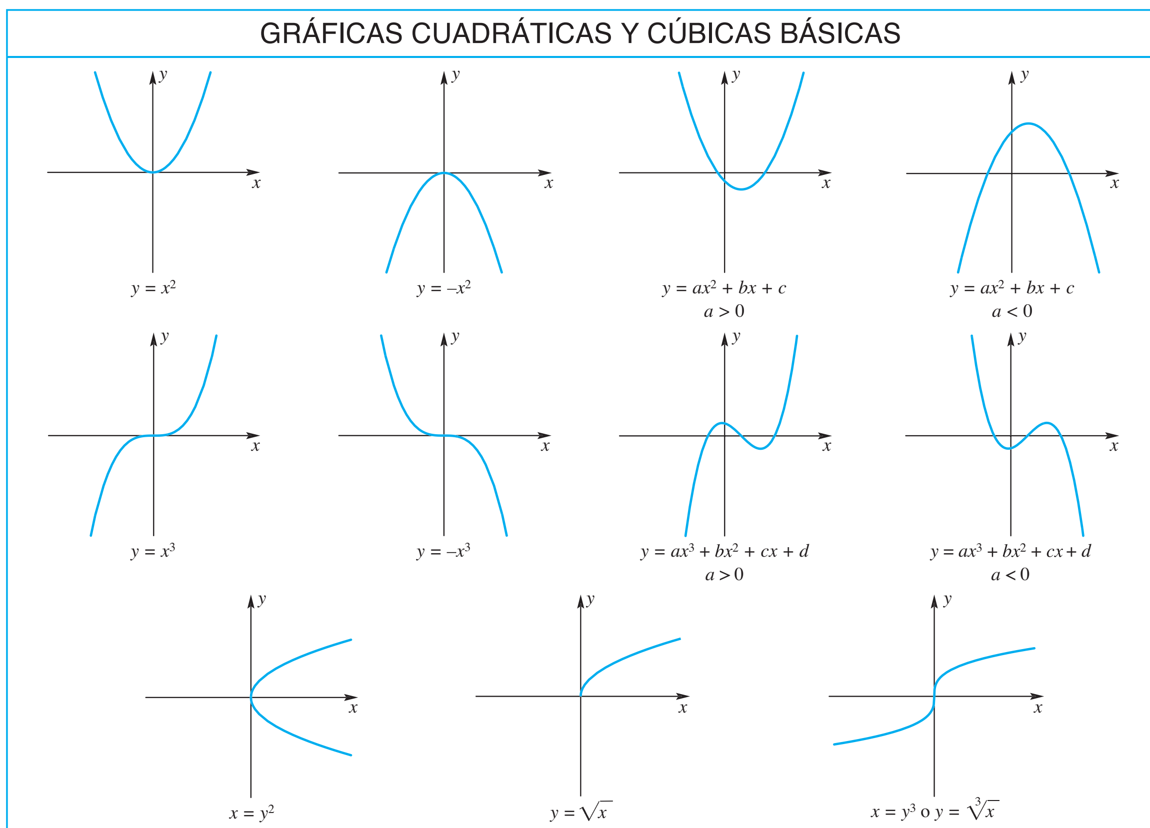


Figura 6

Por medio de sustitución, encontramos que los valores correspondientes de y son 4 y -2; por lo tanto, los puntos de intersección son $(-1, 4)$ y $(2, -2)$. Las dos gráficas se muestran en la figura 7.

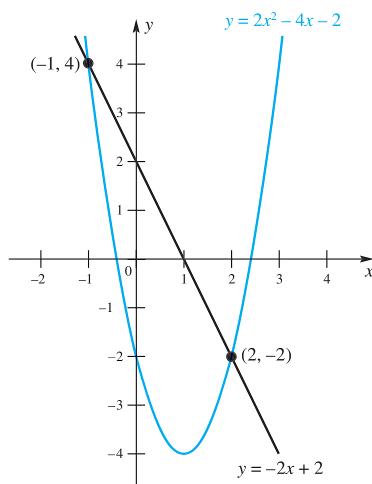


Figura 7

■

Revisión de conceptos

1. Si cada vez que (x, y) está en la gráfica, $(-x, y)$ también está en ella; entonces, la gráfica es simétrica respecto a _______.

2. Si $(-4, 2)$ está en una gráfica que es simétrica respecto al origen, entonces _______ también está en la gráfica.

3. La gráfica de $y = (x + 2)(x - 1)(x - 4)$ tiene intersección con el eje y _______ e intersecciones con el eje x _______.

4. La gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una _______ si $a = 0$ y una _______ si $a \neq 0$.

Conjunto de problemas 0.4

En los problemas del 1 al 30 trace la gráfica de cada ecuación. Comience con la verificación de las simetrías y asegúrese de encontrar todas las intersecciones con el eje x *y el eje* y.

1. $y = -x^2 + 1$

2. $x = -y^2 + 1$

3. $x = -4y^2 - 1$

4. $y = 4x^2 - 1$

5. $x^2 + y = 0$

6. $y = x^2 - 2x$

7. $7x^2 + 3y = 0$

8. $y = 3x^2 - 2x + 2$

9. $x^2 + y^2 = 4$

10. $3x^2 + 4y^2 = 12$

11. $y = -x^2 - 2x + 2$

12. $4x^2 + 3y^2 = 12$

13. $x^2 - y^2 = 4$

14. $x^2 + (y - 1)^2 = 9$

15. $4(x - 1)^2 + y^2 = 36$

16. $x^2 - 4x + 3y^2 = -2$

17. $x^2 + 9(y + 2)^2 = 36$

GC **18.** $x^4 + y^4 = 1$

GC **19.** $x^4 + y^4 = 16$

GC **20.** $y = x^3 - x$

GC **21.** $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

GC **22.** $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

GC **23.** $2x^2 - 4x + 3y^2 + 12y = -2$

GC **24.** $4(x - 5)^2 + 9(y + 2)^2 = 36$

GC **25.** $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

GC **26.** $y = x^2(x - 1)(x - 2)$

GC **27.** $y = x^2(x - 1)^2$

GC **28.** $y = x^4(x - 1)^4(x + 1)^4$

GC **29.** $|x| + |y| = 1$

GC **30.** $|x| + |y| = 4$

GC *En los problemas del 31 al 38, en el mismo plano coordenado, trace las gráficas de ambas ecuaciones. Determine y etiquete los puntos de intersección de las dos gráficas (véase el ejemplo 4).*

31. $y = -x + 1$
$y = (x + 1)^2$

32. $y = 2x + 3$
$y = -(x - 1)^2$

33. $y = -2x + 3$
$y = -2(x - 4)^2$

34. $y = -2x + 3$
$y = 3x^2 - 3x + 12$

35. $y = x$
$x^2 + y^2 = 4$

36. $y = x - 1$
$2x^2 + 3y^2 = 12$

37. $y - 3x = 1$
$x^2 + 2x + y^2 = 15$

38. $y = 4x + 3$
$x^2 + y^2 = 81$

39. Seleccione la ecuación que corresponda a cada una de las gráficas en la figura 8.

(a) $y = ax^2$, con $a > 0$

(b) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a > 0$

(c) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a < 0$

(d) $y = ax^3$, con $a > 0$

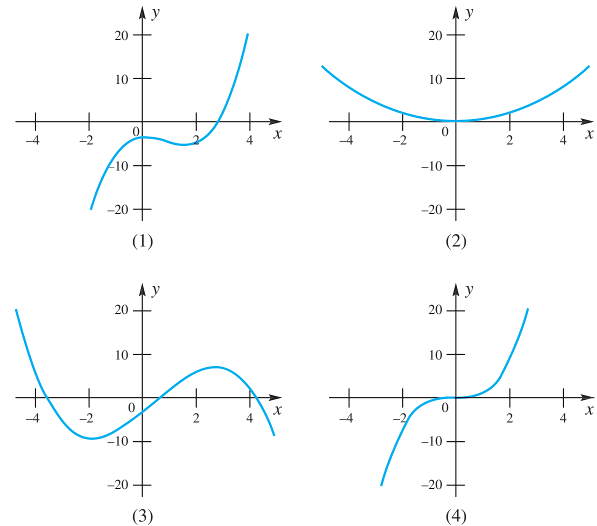


Figura 8

≈ **40.** Determine la distancia entre los puntos en la circunferencia $x^2 + y^2 = 13$ con abscisas -2 y 2. De tales distancias, ¿cuántas existen?

≈ **41.** Determine la distancia entre los puntos en la circunferencia $x^2 + 2x + y^2 - 2y = 20$ con abscisas -2 y 2. De tales distancias, ¿cuántas existen?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** el eje y **2.** $(4, -2)$ **3.** 8; $-2, 1, 4$ **4.** recta; parábola

0.5 Funciones y sus gráficas

En todas las matemáticas, el concepto de función es uno de los más básicos y desempeña un papel indispensable en cálculo.

> **Definición**
>
> Una **función** f es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x en un conjunto —denominado **dominio**— un solo valor $f(x)$ de un segundo conjunto. El conjunto de todos los valores así obtenidos se denomina **rango** de la función. (Véase la figura 1).

Piense en una función como una máquina que toma como entrada un valor x y produce una salida $f(x)$. (Véase la figura 2). Cada valor de entrada se hace corresponder con un *solo* valor de salida. No obstante, puede suceder que diferentes valores de entrada den el mismo valor de salida.

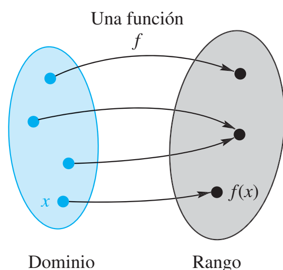


Figura 1

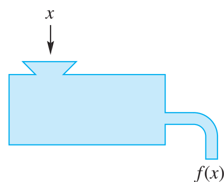


Figura 2

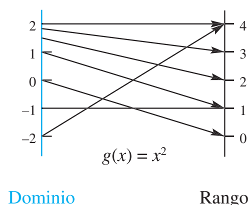


Figura 3

La definición no pone restricción sobre los conjuntos del dominio y del rango. El dominio podría consistir en el conjunto de personas en su curso de cálculo, el rango el conjunto de calificaciones $\{A, B, C, D, F\}$ que obtendrán y la regla de correspondencia la asignación de calificaciones. Casi todas las funciones que usted encontrará en este texto serán funciones de uno o más números reales. Por ejemplo, la función g podría tomar un número real x y elevarlo al cuadrado, lo cual produciría el número real x^2. En este caso tenemos una fórmula que da la regla de correspondencia; esto es, $g(x) = x^2$. Un diagrama esquemático de esta función se muestra en la figura 3.

Notación funcional Una sola letra como f (o g o F) se utiliza para nombrar una función. Entonces $f(x)$, que se lee "f de x" o "f en x", denota el valor que f asigna a x. Por lo tanto, si $f(x) = x^3 - 4$, entonces

$$f(2) = 2^3 - 4 = 4$$
$$f(a) = a^3 - 4$$
$$f(a + h) = (a + h)^3 - 4 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 4$$

Estudie cuidadosamente los siguientes ejemplos. Aunque algunos podrían parecer extraños, tendrán un papel importante en el capítulo 2.

EJEMPLO 1 Para $f(x) = x^2 - 2x$, determine y simplifique

(a) $f(4)$ (b) $f(4 + h)$
(c) $f(4 + h) - f(4)$ (d) $[f(4 + h) - f(4)]/h$

SOLUCIÓN

(a) $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8$

(b) $f(4 + h) = (4 + h)^2 - 2(4 + h) = 16 + 8h + h^2 - 8 - 2h$
$= 8 + 6h + h^2$

(c) $f(4 + h) - f(4) = 8 + 6h + h^2 - 8 = 6h + h^2$

(d) $\dfrac{f(4 + h) - f(4)}{h} = \dfrac{6h + h^2}{h} = \dfrac{h(6 + h)}{h} = 6 + h$ ■

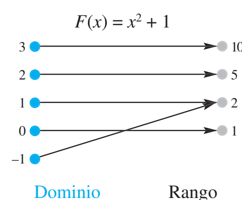


Figura 4

Dominio y rango Para especificar por completo una función, debemos establecer, además de la regla de correspondencia, el dominio de la función. Por ejemplo, si F es la función definida por $F(x) = x^2 + 1$ con dominio $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ (véase la figura 4), entonces el rango es $\{1, 2, 5, 10\}$. La regla de correspondencia, junto con el dominio, determina el rango.

Cuando no se especifica un dominio para una función, suponemos que es el conjunto más grande de números reales para el cual la regla de la función tiene sentido. Éste se denomina **dominio natural**. Los números que debe recordar para excluirlos del dominio natural son aquellos que causarían una división entre cero o la raíz cuadrada de un número negativo.

EJEMPLO 2 Determine los dominios naturales para

(a) $f(x) = 1/(x - 3)$ (b) $g(t) = \sqrt{9 - t^2}$

(c) $h(w) = 1/\sqrt{9 - w^2}$

SOLUCIÓN

(a) Debemos excluir al 3 del dominio porque requeriría una división entre cero. Así, el dominio natural es $\{x: x \neq 3\}$. Esto se puede leer como "el conjunto de las x, tales que x no es igual a 3".

(b) Para evitar la raíz cuadrada de un número negativo debemos elegir t, de modo que $9 - t^2 \geq 0$. Así, t debe satisfacer $|t| \leq 3$. Por lo tanto, el dominio natural es $\{t: |t| \leq 3\}$, que mediante la notación de intervalos puede escribirse como $[-3, 3]$.

(c) Ahora debemos evitar la división entre cero y las raíces cuadradas de números negativos, de modo que excluimos a -3 y 3 del dominio natural. Por lo tanto, el dominio natural es el intervalo $(-3, 3)$. ■

Cuando la regla para una función está dada por medio de una ecuación de la forma $y = f(x)$, llamamos a la x **variable independiente** y a la y **variable dependiente**. *Cualquier* valor en el dominio puede sustituirse por la variable independiente. Una vez seleccionado, este valor de x determina completamente el correspondiente valor de la variable dependiente y.

La entrada para una función no necesita ser un solo número real. En muchas aplicaciones importantes, una función depende de más de una variable independiente. Por ejemplo, el monto A del pago mensual de un automóvil depende del préstamo del capital P, la tasa de interés r y el número n de pagos mensuales solicitados. Podríamos escribir tal función como $A(P, r, n)$. El valor de A (16000, 0.07, 48) —es decir, el pago mensual requerido para saldar un préstamo de $16,000 en 48 meses a una tasa de interés anual de 7%— es $383.14. En esta situación no existe una fórmula matemática sencilla que proporcione la salida A en términos de las variables de entrada P, r y n.

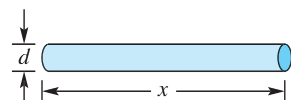


Figura 5

EJEMPLO 3 Denótese con $V(x, d)$ el volumen de una varilla cilíndrica de longitud x y diámetro d. (Véase la figura 5.) Determine

(a) una fórmula para $V(x, d)$
(b) el dominio y rango de V
(c) $V(4, 0.1)$

SOLUCIÓN

(a) $V(x, d) = x \cdot \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi x d^2}{4}$

(b) Puesto que la longitud y el diámetro de la varilla deben ser positivos, el dominio es el conjunto de pares ordenados (x, d) donde $x > 0$ y $d > 0$. Cualquier volumen positivo es posible, de modo que el rango es $(0, \infty)$.

(c) $V(4, 0.1) = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 0.1^2}{4} = 0.01\pi$ ■

Calculadora graficadora

Recuerde, utilice su calculadora graficadora para reproducir las figuras en este libro. Experimente con diferentes ventanas hasta que se convenza de que comprende todos los aspectos importantes de la gráfica.

Gráficas de funciones Cuando el dominio y el rango de una función son conjuntos de números reales, podemos describir la función mediante el trazo de su gráfica en un plano coordenado. La **gráfica de una función** f simplemente es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

EJEMPLO 4 Bosqueje las gráficas de

(a) $f(x) = x^2 - 2$ (b) $g(x) = 2/(x - 1)$

SOLUCIÓN Los dominios naturales de f y g son todos los números reales y todos los números reales excepto el 1, respectivamente. Mediante el procedimiento descrito en la sección 0.4 (construir una tabla de valores, trazar los puntos correspondientes, conectarlos por medio de una curva suave) obtenemos las dos gráficas que se muestran en las figuras 6 y 7a. ■

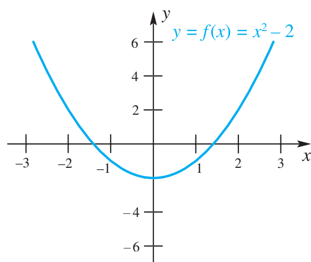
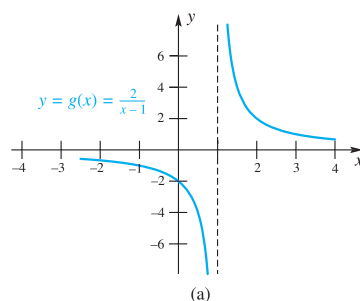


Figura 6



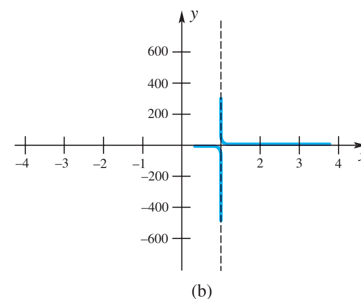


Figura 7

Ponga atención especial en la gráfica de g; ésta apunta a una sobresimplificación de lo que hemos realizado y ahora necesitamos corregir. Cuando se unen los puntos por medio de una curva suave, no se efectúa de una manera mecánica que ignore las características especiales que podrían ser aparentes en la fórmula de la función. En el caso $g(x) = 2/(x - 1)$, algo drástico sucede cuando x se aproxima a 1. De hecho, los valores de $|g(x)|$ aumentan sin cota; por ejemplo, $g(0.99) = 2/(0.99 - 1) = -200$ y $g(1.001) = 2000$. Esto lo hemos indicado mediante una recta vertical, llamada **asíntota**, en $x = 1$. Cuando x se acerca a 1, la gráfica se aproxima cada vez más a esta recta, aunque la recta no es parte de la gráfica. Más bien es una guía. Observe que la gráfica de g también tiene una asíntota horizontal, el eje x.

Funciones como $g(x) = 2/(x - 1)$ pueden causar problemas cuando usted las grafica por medio de un CAS. Por ejemplo, cuando se le pidió a *Maple* graficar $g(x) = 2/(x - 1)$ en el dominio $[-4, 4]$ respondió con la gráfica que se muestra en la figura 7b. Los CAS utilizan un algoritmo muy parecido al que se describió en la sección 0.4; seleccionan diversos valores para x en el dominio establecido; encuentran los correspondientes valores de y, y dibujan estos puntos conectándolos con rectas. Cuando *Maple* seleccionó un número cercano a 1, la salida resultante fue grande, lo cual llevó al eje y a escalar en la figura. *Maple* también conecta los puntos que cruzan el punto de corte en $x = 1$. Siempre debe tener precaución y ser cuidadoso cuando utilice una calculadora gráfica o un CAS para graficar funciones.

Los dominios y rangos para las funciones f y g se muestran en la siguiente tabla.

Función	Dominio	Rango
$f(x) = x^2 - 2$	todos los números reales	$\{y: y \geq -2\}$
$g(x) = \dfrac{2}{x - 1}$	$\{x: x \neq 1\}$	$\{y: y \neq 0\}$

Funciones pares y funciones impares Con frecuencia podemos predecir las simetrías de la gráfica de una función al examinar la fórmula para la función. Si $f(-x) = f(x)$ para toda x, entonces la gráfica es simétrica respecto al eje y. Tal función se denomina

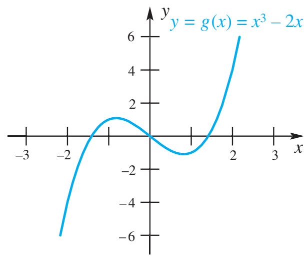


Figura 8

función par, quizá porque una función que se especifica $f(x)$ como una suma de sólo potencias pares de x es par. La función $f(x) = x^2 - 2$ (graficada en la figura 6) es par; al igual que $f(x) = 3x^6 - 2x^4 + 11x^2 - 5$, $f(x) = x^2/(1 + x^4)$ y $f(x) = (x^3 - 2x)/3x$.

Si $f(-x) = -f(x)$ para toda x, la gráfica es simétrica con respecto al origen. A tal función le llamamos **función impar**. Una función que da $f(x)$ como una suma de sólo potencias impares de x es impar. Así, $g(x) = x^3 - 2x$ (graficada en la figura 8) es impar. Observe que

$$g(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -g(x)$$

Considere la función $g(x) = 2/(x - 1)$ del ejemplo 4 que graficamos en la figura 7. No es par ni impar. Para ver esto, note que $g(-x) = 2/(-x - 1)$, que no es igual ni a $g(x)$ ni a $-g(x)$. Observe que la gráfica de $y = g(x)$ no es simétrica respecto al eje y ni con respecto al origen.

EJEMPLO 5 ¿$f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{x^4 - 3x^2 + 4}$ es par, impar o ninguna de éstas?

SOLUCIÓN Como

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 3(-x)}{(-x)^4 - 3(-x)^2 + 4} = \frac{-(x^3 + 3x)}{x^4 - 3x^2 + 4} = -f(x)$$

f es una función impar. La gráfica de $y = f(x)$ (véase la figura 9) es simétrica respecto al origen. ■

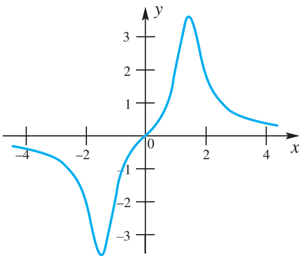


Figura 9

Dos funciones especiales Entre las funciones que con frecuencia utilizaremos como ejemplos, hay dos que son muy especiales: la **función valor absoluto**, $|\ \ |$, y la **función máximo entero,** $[\![\ \ ]\!]$. Se definen como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y

$$[\![x]\!] = \text{el mayor entero que es menor o igual a } x$$

Así, $|-3.1| = |3.1| = 3.1$, mientras que $[\![-3.1]\!] = -4$ y $[\![3.1]\!] = 3$. En las figuras 10 y 11 mostramos las gráficas de estas dos funciones. La función valor absoluto es par, ya que $|-x| = |x|$. La función máximo entero no es par ni impar, como lo puede ver con base en su gráfica.

Con frecuencia recurrimos a las siguientes características especiales de estas gráficas. La gráfica de $|x|$ tiene un pico en el origen, mientras que la gráfica de $[\![x]\!]$ da un salto en cada entero.

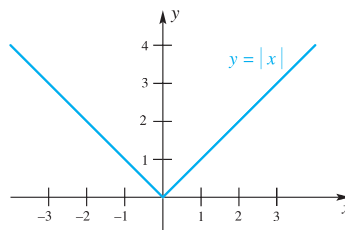


Figura 10

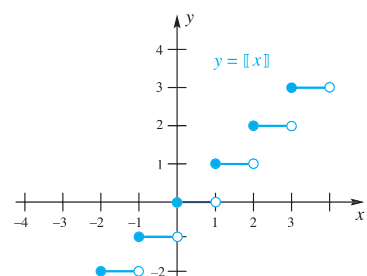


Figura 11

Revisión de conceptos

1. El conjunto de entradas permisibles para una función se denomina _______ de la función; el conjunto de salidas que se obtienen se denomina _______ de la función.

2. Si $f(x) = 3x^2$, entonces $f(2u) =$ _______ y $f(x+h) =$ _______.

3. Si $f(x)$ se acerca cada vez más a L, cuando $|x|$ aumenta indefinidamente, entonces la recta $y = L$ es una _______ para la gráfica de f.

4. Si $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f, entonces f se denomina función _______; si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f, entonces f se llama función _______. En el primer caso, la gráfica de f es simétrica con respecto al _______; en el segundo caso, es simétrica con respecto al _______.

Conjunto de problemas 0.5

1. Para $f(x) = 1 - x^2$, determine cada valor.

(a) $f(1)$ (b) $f(-2)$ (c) $f(0)$
(d) $f(k)$ (e) $f(-5)$ (f) $f\left(\frac{1}{4}\right)$
(g) $f(1+h)$ (h) $f(1+h) - f(1)$
(i) $f(2+h) - f(2)$

2. Para $F(x) = x^3 + 3x$, determine cada valor.

(a) $F(1)$ (b) $F\left(\sqrt{2}\right)$ (c) $F\left(\frac{1}{4}\right)$
(d) $F(1+h)$ (e) $F(1+h) - F(1)$
(f) $F(2+h) - F(2)$

3. Para $G(y) = 1/(y-1)$, determine cada valor.

(a) $G(0)$ (b) $G(0.999)$ (c) $G(1.01)$
(d) $G(y^2)$ (e) $G(-x)$ (f) $G\left(\frac{1}{x^2}\right)$

4. Para $\Phi(u) = \dfrac{u + u^2}{\sqrt{u}}$, encuentre cada valor. (Φ es la letra griega fi mayúscula).

(a) $\Phi(1)$ (b) $\Phi(-t)$ (c) $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$
(d) $\Phi(u+1)$ (e) $\Phi(x^2)$ (f) $\Phi(x^2 + x)$

5. Para

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

determine cada valor.

(a) $f(0.25)$ (b) $f(\pi)$ (c) $f\left(3 + \sqrt{2}\right)$

C **6.** Para $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}/\left(x - \sqrt{3}\right)$, determine cada valor.

(a) $f(0.79)$ (b) $f(12.26)$ (c) $f\left(\sqrt{3}\right)$

7. ¿Cuáles de las siguientes relaciones determinan una función f con fórmula $y = f(x)$? Para aquellas que lo sean, determine $f(x)$. *Sugerencia:* despeje la y en términos de x y observe que la definición requiere un solo valor de y para cada x.

(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $xy + y + x = 1, x \neq -1$
(c) $x = \sqrt{2y + 1}$ (d) $x = \dfrac{y}{y+1}$

8. ¿Cuáles de las gráficas de la figura 12 son gráficas de funciones?

Este problema sugiere una regla: *para que una gráfica sea la gráfica de una función, cada recta vertical debe cortar la gráfica en sólo un punto.*

9. Para $f(x) = 2x^2 - 1$ determine y simplifique $[f(a+h) - f(a)]/h$.

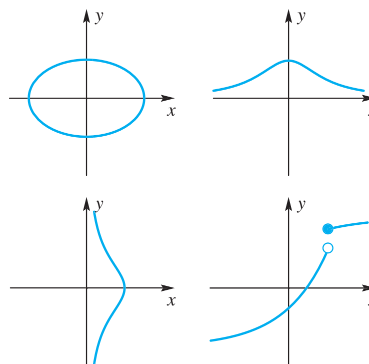


Figura 12

10. Para $F(t) = 4t^2$ determine y simplifique $[F(a+h) - F(a)]/h$.

11. Para $g(u) = 3/(u-2)$ determine y simplifique $[g(x+h) - g(x)]/h$.

12. Para $G(t) = t/(t+4)$ determine y simplifique $[G(a+h) - G(a)]/h$.

13. Determine el dominio natural para cada caso siguiente.

(a) $F(z) = \sqrt{2z + 3}$ (b) $g(v) = 1/(4v - 1)$
(c) $\psi(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ (d) $H(y) = -\sqrt{625 - y^4}$

14. En cada caso determine el dominio natural.

(a) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2 - x - 6}$ (b) $G(y) = \sqrt{(y+1)^{-1}}$
(c) $\phi(u) = |2u + 3|$ (d) $F(t) = t^{2/3} - 4$

En los problemas del 15 al 30 especifique si la función dada es par, impar o ninguna de las dos, y luego bosqueje su gráfica.

15. $f(x) = -4$ **16.** $f(x) = 3x$
17. $F(x) = 2x + 1$ **18.** $F(x) = 3x - \sqrt{2}$
19. $g(x) = 3x^2 + 2x - 1$ **20.** $g(u) = \dfrac{u^3}{8}$
21. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ **22.** $\phi(z) = \dfrac{2z + 1}{z - 1}$
23. $f(w) = \sqrt{w - 1}$ **24.** $h(x) = \sqrt{x^2 + 4}$
25. $f(x) = |2x|$ **26.** $F(t) = -|t + 3|$
27. $g(x) = \left[\!\left[\dfrac{x}{2}\right]\!\right]$ **28.** $G(x) = [\![2x - 1]\!]$

29. $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 0 \\ t+1 & \text{si } 0 < t < 2 \\ t^2 - 1 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$

30. $h(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

31. Una planta tiene la capacidad para producir desde 0 hasta 100 computadoras por día. Los gastos generales diarios de la planta ascienden a \$5000 y el costo directo (mano de obra y materiales) para producir una computadora es de \$805. Escriba una fórmula para $T(x)$, el costo total de producir x computadoras en un día y, también, para el costo unitario $u(x)$ (costo promedio por computadora). ¿Cuáles son los dominios de estas funciones?

C **32.** A la compañía ABC le cuesta $400 + 5\sqrt{x(x-4)}$ dólares fabricar x estufas de juguete que vende en \$6 cada una.

(a) Determine una fórmula para $P(x)$, la utilidad total de fabricar x estufas.

(b) Evalúe $P(200)$ y $P(1000)$.

(c) ¿Cuántas estufas debe fabricar ABC para estar en equilibrio?

C **33.** Determine la fórmula para la cantidad $E(x)$ por la cual un número x excede a su cuadrado. Haga una gráfica de $E(x)$ para $0 \leq x \leq 1$. Utilice la gráfica para estimar el número positivo menor o igual a uno que excede a su cuadrado en la máxima cantidad.

34. Sea p el perímetro de un triángulo equilátero. Determine una fórmula para $A(p)$, el área de tal triángulo.

35. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa fija de longitud h y un cateto tiene longitud x. Determine una fórmula para la longitud, $L(x)$, del otro cateto.

36. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa fija de longitud h y un cateto tiene longitud x. Determine una fórmula para el área, $A(x)$, del triángulo.

37. La Agencia de Renta de Automóviles Acme cobra \$24 por día por la renta de un automóvil más \$0.40 por milla.

(a) Escriba una fórmula para el gasto de renta total $E(x)$ por un día, en donde x es el número de millas recorridas.

(b) Si usted renta un automóvil durante un día, ¿cuántas millas puede recorrer por \$120?

38. Un cilindro circular recto de radio r está inscrito en una esfera de radio $2r$. Determine una fórmula para $V(r)$, el volumen del cilindro en términos de r.

39. Una pista de una milla tiene lados paralelos y extremos semicirculares iguales. Determine una fórmula para el área encerrada por la pista, $A(d)$, en términos del diámetro d de los semicírculos. ¿Cuál es el dominio natural para esta función?

40. Sea $A(c)$ el área de la región acotada por arriba por la recta $y = x + 1$, del lado izquierdo por el eje y, por abajo por el eje x y por la derecha por la recta $x = c$. Tal función se conoce como **función de acumulación**. (Véase la figura 13.) Determine

(a) $A(1)$ (b) $A(2)$

(c) $A(0)$ (d) $A(c)$

(e) Esboce la gráfica de $A(c)$.

(f) ¿Cuáles son el dominio y el rango de A?

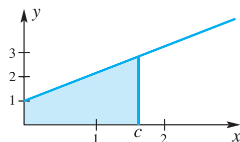


Figura 13

41. Sea $B(c)$ el área de la región acotada por arriba por la gráfica de la curva $y = x(1 - x)$, por abajo por el eje x, y por la derecha por la recta $x = c$. El dominio de B es el intervalo $[0, 1]$. (Véase la figura 14.) Dado que $B(1) = \frac{1}{6}$.

(a) Determine $B(0)$ (b) Determine $B\left(\frac{1}{2}\right)$

(c) Haga una gráfica de $B(c)$, como mejor pueda.

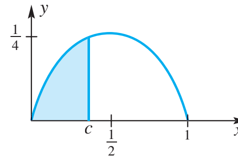


Figura 14

42. ¿Cuál de las siguientes funciones satisface $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todos los números reales x y y?

(a) $f(t) = 2t$ (b) $f(t) = t^2$

(c) $f(t) = 2t + 1$ (d) $f(t) = -3t$

43. Sea $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para toda x y y. Demuestre que existe un número m, tal que $f(t) = mt$ para todos los números racionales t. *Sugerencia:* primero decida cuánto tiene que valer m. Luego proceda por pasos, iniciando con $f(0) = 0$, $f(p) = mp$ para un número natural p; $f(1/p) = m/p$, etcétera.

44. Un diamante de beisbol es un cuadrado con lados de 90 pies. Un jugador, después de conectar un cuadrangular, corrió alrededor del diamante a una velocidad de 10 pies por segundo. Sea s la distancia del jugador al *home* después de t segundos.

(a) Exprese s como una función de t por medio de una fórmula con cuatro partes.

(b) Exprese s como una función de t por medio de una fórmula con tres partes.

GC *Para utilizar la tecnología de manera eficiente, usted necesita descubrir sus capacidades, fortalezas y debilidades. Le pedimos que practique la graficación de funciones de varios tipos utilizando su propio paquete de cómputo o su calculadora. Los problemas del 45 al 50 están diseñados con este propósito.*

45. Sea $f(x) = (x^3 + 3x - 5)/(x^2 + 4)$.

(a) Evalúe $f(1.38)$ y $f(4.12)$.

(b) Para esta función, construya una tabla de valores correspondiente a $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$.

46. Siga las instrucciones del problema 45 para $f(x) = (\text{sen}^2 x - 3 \tan x)/\cos x$.

47. Trace la gráfica de $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 8$ en el dominio $[-2, 5]$.

(a) Determine el rango de f.

(b) En este dominio, ¿dónde $f(x) \geq 0$?

48. Superponga la gráfica de $g(x) = 2x^2 - 8x - 1$ con dominio $[-2, 5]$ sobre la gráfica de $f(x)$ del problema 47.

(a) Estime los valores de x donde $f(x) = g(x)$.

(b) En $[-2, 5]$, ¿dónde $f(x) \geq g(x)$?

(c) En $[-2, 5]$, estime el valor más grande de $|f(x) - g(x)|$.

49. Grafique $f(x) = (3x - 4)/(x^2 + x - 6)$ en el dominio $[-6, 6]$.

(a) Determine las intersecciones con el eje x y con el eje y.

(b) Determine el rango de f para el dominio dado.

(c) Determine las asíntotas verticales de la gráfica.

(d) Determine la asíntota horizontal para la gráfica, cuando el dominio se amplía a todo el dominio natural.

50. Siga las instrucciones del problema 49 para la función $g(x) = (3x^2 - 4)/(x^2 + x - 6)$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** dominio, rango **2.** $12u^2$; $3(x+h)^2 = 3x^2 + 6xh + 3h^2$ **3.** asíntota **4.** par; impar; eje y; origen.

0.6 Operaciones con funciones

Al igual que dos números a y b pueden sumarse para producir un nuevo número $a + b$, también dos funciones f y g pueden sumarse para producir una nueva función $f + g$. Ésta es sólo una de las diferentes operaciones sobre funciones que describiremos en esta sección.

Sumas, diferencias, productos, cocientes y potencias Considere las funciones f y g con las fórmulas

$$f(x) = \frac{x-3}{2}, \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

Podemos construir una nueva función $f + g$ al asignar a x el valor $f(x) + g(x) = (x - 3)/2 + \sqrt{x}$; esto es,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x-3}{2} + \sqrt{x}$$

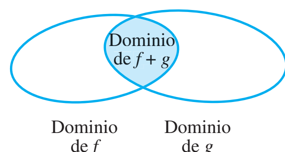


Figura 1

Por supuesto, debemos tener un poco de cuidado con respecto a los dominios. Claramente, x debe ser un número en el que tanto f como g funcionen. En otras palabras, el dominio de $f + g$ es la intersección (parte común) de los dominios de f y g (véase la figura 1).

Las funciones $f - g$, $f \cdot g$ y f/g se introducen de una manera completamente análoga. Suponiendo que f y g tienen sus dominios naturales, entonces:

Fórmula	Dominio
$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x-3}{2} + \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x-3}{2} - \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{x-3}{2}\sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-3}{2\sqrt{x}}$	$(0, \infty)$

Hemos excluido al 0 del dominio de f/g para evitar la división entre cero.

También podemos elevar una función a una potencia. Con f^n representamos la función que a cada x asigna el valor $[f(x)]^n$. Así,

$$g^3(x) = [g(x)]^3 = \left(\sqrt{x}\right)^3 = x^{3/2}$$

Existe una excepción en la convención anterior sobre exponentes; a saber, cuando $n = -1$. Reservamos el símbolo f^{-1} para la función inversa que se estudiará en la sección 6.2. Por lo tanto, f^{-1} no significa $1/f$.

EJEMPLO 1 Sean $F(x) = \sqrt[4]{x+1}$ y $G(x) = \sqrt{9 - x^2}$, con dominios naturales respectivos $[-1, \infty)$ y $[-3, 3]$. Determine fórmulas para $F + G$, $F - G$, $F \cdot G$, F/G y F^5 y proporcione sus dominios naturales.

SOLUCIÓN

Fórmula	Dominio
$(F+G)(x) = F(x) + G(x) = \sqrt[4]{x+1} + \sqrt{9-x^2}$	$[-1, 3]$
$(F-G)(x) = F(x) - G(x) = \sqrt[4]{x+1} - \sqrt{9-x^2}$	$[-1, 3]$
$(F\cdot G)(x) = F(x)\cdot G(x) = \sqrt[4]{x+1}\sqrt{9-x^2}$	$[-1, 3]$
$\left(\frac{F}{G}\right)(x) = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{9-x^2}}$	$[-1, 3)$
$F^5(x) = [F(x)]^5 = \left(\sqrt[4]{x+1}\right)^5 = (x+1)^{5/4}$	$[-1, \infty)$ ■

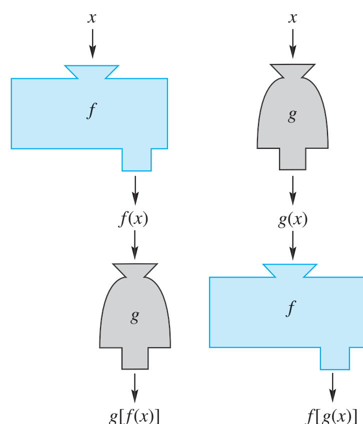


Figura 2

Composición de funciones Al principio, le pedimos que pensase en una función como una máquina. Que recibe x como entrada, trabaja sobre x y produce $f(x)$ como salida. Con frecuencia, dos máquinas se ponen una tras otra para producir una máquina más compleja; del mismo modo, dos funciones f y g (véase la figura 2). Si f actúa sobre x para producir $f(x)$ y luego g actúa sobre $f(x)$ para producir $g(f(x))$, decimos que hemos *compuesto* g con f. La función resultante, llamada **composición** de g con f, se denota con $g \circ f$. Así,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

En nuestros ejemplos anteriores teníamos $f(x) = (x-3)/2$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Podemos componer estas funciones de dos maneras:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x-3}{2}\right) = \sqrt{\frac{x-3}{2}}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\sqrt{x}-3}{2}$$

Enseguida notamos que $g \circ f$ no es igual a $f \circ g$. Por lo tanto, decimos que la composición de funciones no es conmutativa.

Debemos tener cuidado al describir el dominio de una función compuesta. El dominio de $g \circ f$ es igual al conjunto de aquellos valores de x que satisfacen las siguientes propiedades:

1. x está en el dominio de f.
2. $f(x)$ está en el dominio de g.

En otras palabras, x debe ser una entrada válida para f y $f(x)$ debe ser una entrada válida para g. En nuestro ejemplo, el valor $x = 2$ está en el dominio de f, pero no está en el dominio de $g \circ f$ porque esto llevaría a la raíz cuadrada de un número negativo.

$$g(f(2)) = g((2-3)/2) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{-\frac{1}{2}}$$

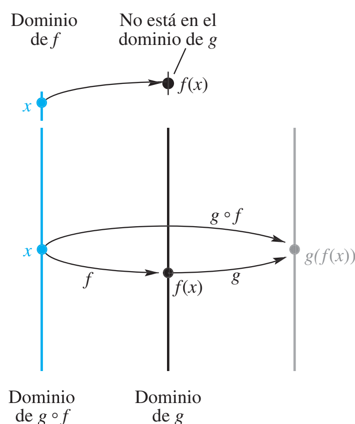


Figura 3

El dominio de $g \circ f$ es el intervalo $[3, \infty)$ ya que $f(x)$ es no negativa en este intervalo, y la entrada para g debe ser no negativa. El dominio para $f \circ g$ es el intervalo $[0, \infty)$ (¿por qué?), así vemos que los dominios de $g \circ f$ y $f \circ g$ pueden ser diferentes. La figura 3 muestra cómo el dominio de $g \circ f$ excluye aquellos valores de x para los cuales $f(x)$ no está en el dominio de g.

EJEMPLO 2 Sean $f(x) = 6x/(x^2 - 9)$ y $g(x) = \sqrt{3x}$, con sus dominios naturales. Primero, determine $(g \circ f)(12)$; luego $(f \circ g)(x)$ y proporcione su dominio.

SOLUCIÓN

$$(f \circ g)(12) = f(g(12)) = f\left(\sqrt{36}\right) = f(6) = \frac{6\cdot 6}{6^2 - 9} = \frac{4}{3}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{3x}\right) = \frac{6\sqrt{3x}}{\left(\sqrt{3x}\right)^2 - 9}$$

La expresión $\sqrt{3x}$ aparece tanto en el numerador como en el denominador. Cualquier número negativo para x conduce a la raíz cuadrada de un número negativo. Por lo tanto, todos los números negativos deben excluirse del dominio de $f \circ g$. Para $x \geq 0$, tenemos $\left(\sqrt{3x}\right)^2 = 3x$, permitiéndonos escribir

$$(f \circ g)(x) = \frac{6\sqrt{3x}}{3x - 9} = \frac{2\sqrt{3x}}{x - 3}$$

También debemos excluir $x = 3$ del dominio de $f \circ g$ porque $g(3)$ no está en el dominio de f. (Causaría la división entre cero.) Así, el dominio de $f \circ g$ es $[0, 3) \cup (3, \infty)$. ■

En cálculo, con frecuencia necesitamos tomar una función dada y escribirla como la composición de dos funciones más simples. Usualmente, esto puede hacerse de varias formas. Por ejemplo, $p(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ puede escribirse como

$$p(x) = g(f(x)), \qquad \text{donde } g(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad f(x) = x^2 + 4$$

o como

$$p(x) = g(f(x)), \qquad \text{donde } g(x) = \sqrt{x + 4} \quad \text{y} \quad f(x) = x^2$$

(Usted debe verificar que las dos composiciones dan $p(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ con dominio $(-\infty, \infty)$.) La descomposición $p(x) = g(f(x))$ con $f(x) = x^2 + 4$ y $g(x) = \sqrt{x}$ se considera más sencilla y por lo regular se prefiere. Por lo tanto, podemos visualizar a $p(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ como la raíz cuadrada de una función de x. Esta manera de ver las funciones será importante en el capítulo 2.

EJEMPLO 3 Escriba la función $p(x) = (x + 2)^5$ como una función compuesta $g \circ f$.

SOLUCIÓN La manera más obvia de descomponer p es escribir

$$p(x) = g(f(x)), \qquad \text{donde } g(x) = x^5 \quad \text{y} \quad f(x) = x + 2.$$

Así vemos a $p(x) = (x + 2)^5$ como la quinta potencia de una función de x. ■

Traslaciones La observación de cómo se construye una función a partir de otras más sencillas puede ser de gran ayuda al graficar. Podemos hacer esta pregunta: ¿cómo están relacionadas las gráficas de

$$y = f(x) \qquad y = f(x - 3) \qquad y = f(x) + 2 \qquad y = f(x - 3) + 2?$$

Como ejemplo, considere $f(x) = |x|$. Las cuatro gráficas correspondientes se muestran en la figura 4.

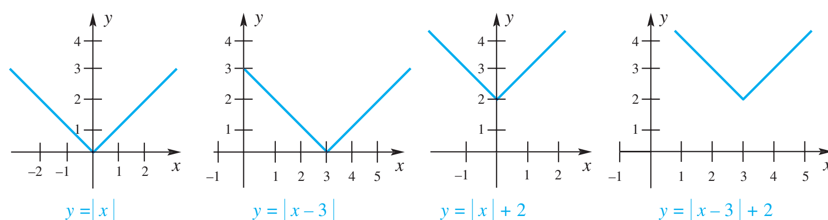


Figura 4

Observe que las cuatro gráficas tienen la misma forma; las últimas tres sólo son traslaciones de la primera. Al reemplazar x por $x - 3$ se traslada la gráfica 3 unidades hacia la derecha; al sumar 2 se traslada 2 unidades hacia arriba.

Lo que sucede con $f(x) = |x|$ es común. La figura 5 ofrece una ilustración para la función $f(x) = x^3 + x^2$.

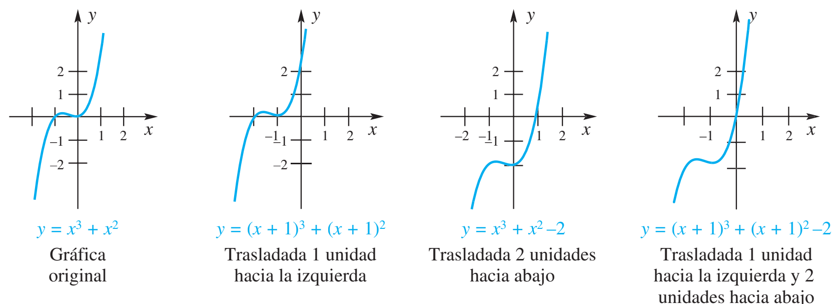


Figura 5

Los mismos principios se aplican a la situación general. Se ilustran en la figura 6 con h y k positivas. Si $h < 0$, la traslación es hacia la izquierda, si $k < 0$ la traslación es hacia abajo.

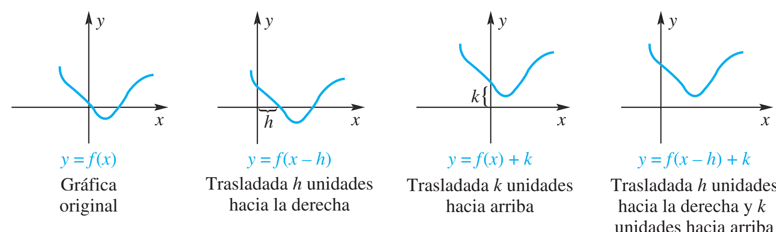


Figura 6

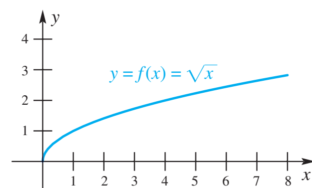


Figura 7

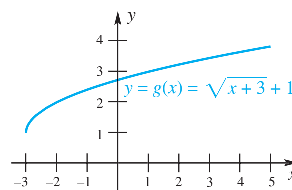


Figura 8

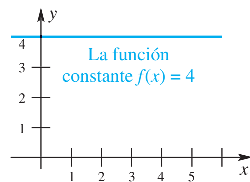


Figura 9

EJEMPLO 4 Bosqueje la gráfica de $g(x) = \sqrt{x + 3} + 1$ graficando primero $f(x) = \sqrt{x}$ y luego haciendo las traslaciones apropiadas.

SOLUCIÓN Por medio de la traslación de la gráfica de f (véase la figura 7) 3 unidades hacia la izquierda y una unidad hacia arriba, obtenemos la gráfica de g (véase la figura 8). ■

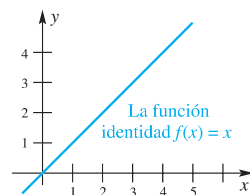


Figura 10

Catálogo parcial de funciones Una función de la forma $f(x) = k$, donde k es una constante (número real), se denomina **función constante**. Su gráfica es una recta horizontal (véase la figura 9). La función $f(x) = x$ se denomina **función identidad**. Su gráfica es una recta que pasa por el origen con pendiente 1 (véase la figura 10). Con base en estas funciones sencillas, podemos construir muchas funciones importantes.

Cualquier función que pueda obtenerse a partir de las funciones constantes y la función identidad, mediante el uso de las operaciones de suma, diferencia y multiplicación, se denomina **función polinomial**. Esto equivale a decir que f es una función polinomial si es de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde las *aes* son números reales y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, n es el **grado** de la función polinomial. En particular, $f(x) = ax + b$ es una función polinomial de primer grado, o **función lineal**, y $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una función polinomial de segundo grado, o **función cuadrática**.

Los cocientes de funciones polinomiales se llaman funciones racionales. Así, f es una **función racional** si es de la forma

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

El dominio de una función racional consiste en aquellos números reales para los cuales el denominador es distinto de cero.

Una **función algebraica explícita** es aquella que puede obtenerse a partir de las funciones constantes y la función identidad por medio de las cinco operaciones de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces. Algunos ejemplos son

$$f(x) = 3x^{2/5} = 3\sqrt[5]{x^2} \qquad g(x) = \frac{(x+2)\sqrt{x}}{x^3 + \sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

Las funciones listadas hasta el momento, junto con las funciones trigonométricas, trigonométricas inversas, exponencial y logarítmicas (que se introducen más adelante) son la materia prima para cálculo.

Revisión de conceptos

1. Si $f(x) = x^2 + 1$, entonces $f^3(x) =$ _____.

2. El valor de la función compuesta $f \circ g$ en x está dada por $(f \circ g)(x) =$ _____.

3. Comparada con la gráfica de $y = f(x)$, la gráfica de $y = f(x + 2)$ está trasladada _______ unidades hacia _______.

4. Una función racional se define como _____.

Conjunto de problemas 0.6

1. Para $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2$, determine cada uno de los valores (si esto es posible).

(a) $(f + g)(2)$ (b) $(f \cdot g)(0)$ (c) $(g/f)(3)$
(d) $(f \circ g)(1)$ (e) $(g \circ f)(1)$ (f) $(g \circ f)(-8)$

2. Para $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = 2/(x + 3)$, determine cada uno de los valores.

(a) $(f - g)(2)$ (b) $(f/g)(1)$ (c) $g^2(3)$
(d) $(f \circ g)(1)$ (e) $(g \circ f)(1)$ (f) $(g \circ g)(3)$

3. Para $\Phi(u) = u^3 + 1$ y $\Psi(v) = 1/v$, determine cada uno de los valores.

(a) $(\Phi + \Psi)(t)$ (b) $(\Phi \circ \Psi)(r)$
(c) $(\Psi \circ \Phi)(r)$ (d) $\Phi^3(z)$
(e) $(\Phi - \Psi)(5t)$ (f) $((\Phi - \Psi) \circ \Psi)(t)$

4. Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $g(x) = 2/x$, determine fórmulas para lo siguiente y también sus dominios.

(a) $(f \cdot g)(x)$ (b) $f^4(x) + g^4(x)$
(c) $(f \circ g)(x)$ (d) $(g \circ f)(x)$

5. Si $f(s) = \sqrt{s^2 - 4}$ y $g(w) = |1 + w|$, determine fórmulas para $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

6. Si $g(x) = x^2 + 1$, determine fórmulas para $g^3(x)$ y $(g \circ g \circ g)(x)$.

C **7.** Calcule $g(3.141)$, si $g(u) = \dfrac{\sqrt{u^3 + 2u}}{2 + u}$.

C **8.** Calcule $g(2.03)$ si $g(x) = \dfrac{(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^4}{1 - x + x^2}$.

C **9.** Calcule $[g^2(\pi) - g(\pi)]^{1/3}$, si $g(v) = |11 - 7v|$.

C **10.** Calcule $[g^3(\pi) - g(\pi)]^{1/3}$, si $g(x) = 6x - 11$.

11. Determine f y g de modo que $F = g \circ f$. (Véase el ejemplo 3).

(a) $F(x) = \sqrt{x + 7}$ (b) $F(x) = (x^2 + x)^{15}$

12. Encuentre f y g tales que $p = f \circ g$.

(a) $p(x) = \dfrac{2}{(x^2 + x + 1)^3}$ (b) $p(x) = \dfrac{1}{x^3 + 3x}$

13. Escriba $p(x) = 1/\sqrt{x^2 + 1}$ como una composición de tres funciones, hágalo de dos maneras distintas.

14. Escriba $p(x) = 1/\sqrt{x^2 + 1}$ como una composición de cuatro funciones.

15. Bosqueje la gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 2} - 3$, haciendo primero la gráfica de $g(x) = \sqrt{x}$ y luego trasladando ésta. (Véase el ejemplo 4).

16. Bosqueje la gráfica de $g(x) = |x + 3| - 4$; primero grafique $h(x) = |x|$ y luego trasládela.

17. Por medio de traslaciones, bosqueje la gráfica de $f(x) = (x - 2)^2 - 4$.

18. Por medio de traslaciones, bosqueje la gráfica de $g(x) = (x + 1)^3 - 3$.

19. Bosqueje las gráficas de $f(x) = (x - 3)/2$ y $g(x) = \sqrt{x}$; utilice los mismos ejes coordenados. Luego trace $f + g$ al sumar las ordenadas y.

20. Siga las instrucciones del problema 19 para $f(x) = x$ y $g(x) = |x|$.

21. Bosqueje la gráfica de $F(t) = \dfrac{|t| - t}{t}$.

22. Bosqueje la gráfica de $G(t) = t - [\![t]\!]$.

23. Establezca si cada una de las siguientes funciones es impar o par, o bien ninguna de las dos. Demuestre sus afirmaciones.

(a) La suma de dos funciones pares.

(b) La suma de dos funciones impares.

(c) El producto de dos funciones pares.

(d) El producto de dos funciones impares.

(e) El producto de una función par y una función impar.

24. Sea F cualquier función cuyo dominio contiene a $-x$ siempre que contenga a x. Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones.

(a) $F(x) - F(-x)$ es una función impar.

(b) $F(x) + F(-x)$ es una función par.

(c) F puede expresarse siempre como la suma de una función impar y una función par.

25. ¿Todo polinomio de grado par es una función par? ¿Todo polinomio de grado impar es una función impar? Explique.

26. Clasifique cada una de las siguientes como FP (función polinomial), FR (función racional pero no función polinomial) o ninguna de éstas.

(a) $f(x) = 3x^{1/2} + 1$ (b) $f(x) = 3$

(c) $f(x) = 3x^2 + 2x^{-1}$ (d) $f(x) = \pi x^3 - 3\pi$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ (f) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x + 3}}$

27. La relación entre el precio por unidad P (en centavos) para cierto producto y la demanda D (en miles de unidades) parece satisfacer

$$P = \sqrt{29 - 3D + D^2}$$

Por otra parte, la demanda se ha incrementado, durante los t años, desde 1970 de acuerdo a $D = 2 + \sqrt{t}$.

(a) Exprese P como una función de t.

(b) Evalúe P cuando $t = 15$.

28. Después de estar en los negocios durante t años, un fabricante de automóviles está produciendo $120 + 2t + 3t^2$ unidades por año. Los precios de venta en dólares por unidad han aumentado de acuerdo con la fórmula $6000 + 700t$. Escriba una fórmula para los ingresos anuales del fabricante $R(t)$ después de t años.

29. Al comenzar el mediodía, el aeroplano A vuela con rumbo norte a una velocidad de 400 millas por hora. Exactamente 1 hora más tarde, el aeroplano B vuela con rumbo este a 300 millas por hora. Despreciando la curvatura de la Tierra y suponiendo que los aeroplanos vuelan a la misma altitud, determine una fórmula para $D(t)$, la distancia entre los dos aeroplanos t horas, contadas a partir del mediodía. *Sugerencia:* serán dos fórmulas para $D(t)$, una si $0 \le t < 1$ y la otra si $t \ge 1$.

≈ C **30.** Determine la distancia entre los aeroplanos del problema 29 a las 2:30 p. m.

31. Sea $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx - a}$. Demuestre que $f(f(x)) = x$, siempre y cuando $a^2 + bc \neq 0$ y $x \neq a/c$.

32. Sea $f(x) = \dfrac{x - 3}{x + 1}$. Demuestre que $f(f(f(x))) = x$, siempre y cuando $x \neq \pm 1$.

33. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$. Determine y simplifique cada valor.

(a) $f(1/x)$ (b) $f(f(x))$ (c) $f(1/f(x))$

34. Sea $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x} - 1}$. Encuentre y simplifique.

(a) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (b) $f(f(x))$

35. Demuestre que la operación de composición de funciones es asociativa; es decir, $f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = (f_1 \circ f_2) \circ f_3$.

36. Sean $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/x$, $f_3(x) = 1 - x$, $f_4(x) = 1/(1 - x)$, $f_5(x) = (x - 1)/x$ y $f_6(x) = x/(x - 1)$. Observe que $f_3(f_4(x)) = f_3(1/(1 - x)) = 1 - 1/(1 - x) = x/(x - 1) = f_6(x)$; esto es, $f_3 \circ f_4 = f_6$. De hecho, la composición de cualesquiera dos de estas funciones es otra de la lista. Llene la tabla de composiciones de la figura 11.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1						
f_2						
f_3				f_6		
f_4						
f_5						
f_6						

Figura 11

Después utilice esta tabla para determinar cada una de las siguientes. Con base en el problema 35, sabe que se cumple la ley asociativa.

(a) $f_3 \circ f_3 \circ f_3 \circ f_3 \circ f_3$ (b) $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4 \circ f_5 \circ f_6$

(c) F, si $F \circ f_6 = f_1$ (d) G, si $G \circ f_3 \circ f_6 = f_1$

(e) H si $f_2 \circ f_5 \circ H = f_5$

GC *En los problemas del 37 al 40, utilice una computadora o una calculadora graficadora.*

37. Sea $f(x) = x^2 - 3x$. Utilizando los mismos ejes, dibuje las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(x - 0.5) - 0.6$ y $y = f(1.5x)$, todas sobre el dominio $[-2, 5]$.

38. Sea $f(x) = |x^3|$. Utilizando los mismos ejes, dibuje las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(3x)$ y $y = f(3(x - 0.8))$, todas sobre el dominio $[-3, 3]$.

39. Sea $f(x) = 2\sqrt{x} - 2x + 0.25x^2$. Utilizando los mismos ejes, dibuje las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(1.5x)$ y $y = f(x - 1) + 0.5$, todas en el dominio $[0, 5]$.

40. Sea $f(x) = 1/(x^2 + 1)$. Utilizando los mismos ejes, dibuje las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(2x)$ y $y = f(x - 2) + 0.6$, todas en el dominio $[-4, 4]$.

CAS **41.** Su sistema de álgebra computacional (CAS) puede permitir el uso de parámetros en la definición de funciones. En cada caso, dibuje la gráfica de $y = f(x)$ para los valores especificados del parámetro k; utilice los mismos ejes y $-5 \le x \le 5$.

(a) $f(x) = |kx|^{0.7}$ para $k = 1, 2, 0.5$ y 0.2.

(b) $f(x) = |x - k|^{0.7}$ para $k = 0, 2, -0.5$ y -3.

(c) $f(x) = |x|^k$ para $k = 0.4, 0.7, 1$ y 1.7.

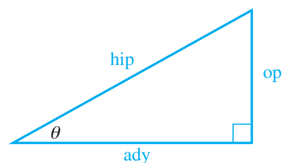
CAS **42.** Utilizando los mismos ejes, dibuje la gráfica de $f(x) = |k(x - c)|^n$ para la siguiente elección de parámetros.

(a) $c = -1, k = 1.4, n = 0.7$ (b) $c = 2, k = 1.4, n = 1$

(c) $c = 0, k = 0.9, n = 0.6$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $(x^2 + 1)^3$ **2.** $f(g(x))$ **3.** 2; la izquierda **4.** un cociente de dos funciones polinomiales.

0.7 Funciones trigonométricas



$\text{sen}\,\theta = \dfrac{\text{op}}{\text{hip}}$ $\cos\theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{hip}}$ $\tan\theta = \dfrac{\text{op}}{\text{ady}}$

Figura 1

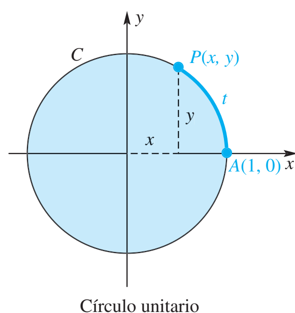


Figura 2

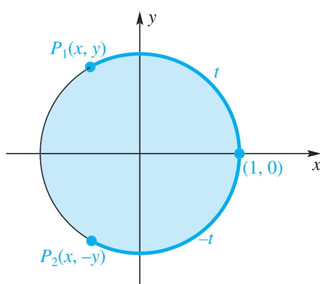


Figura 3

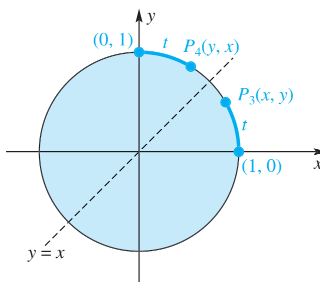


Figura 4

Probablemente ha visto la definición de las funciones trigonométricas, con base en triángulos rectángulos. La figura 1 resume las definiciones de las funciones seno, coseno y tangente. Debe revisar con cuidado la figura 1, ya que estos conceptos son necesarios para muchas aplicaciones posteriores en este texto.

Más generalmente, definimos las funciones trigonométricas con base en el círculo unitario. El círculo unitario, que denotamos con C, es el círculo con radio 1 y centro en el origen, cuya circunferencia tiene ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Sea A el punto $(1, 0)$ y sea t un número positivo. Existe un solo punto P en el círculo C tal que la distancia, medida en *sentido contrario de las manecillas del reloj* alrededor del arco AP, es igual a t. (Véase la figura 2). Recuerde que la circunferencia de un círculo con radio r es $2\pi r$, de modo que la circunferencia de C es 2π. Por lo tanto, si $t = \pi$, entonces el punto P está exactamente a la mitad del camino alrededor del círculo iniciando en el punto A; en este caso, P es el punto $(-1, 0)$. Si $t = 3\pi/2$, entonces P es el punto $(0, -1)$ y si $t = 2\pi$, entonces P es el punto A. Si $t > 2\pi$, entonces le tomará más de un circuito completo del círculo para trazar el arco AP.

Cuando $t < 0$, trazamos el círculo en el *sentido de las manecillas del reloj*. Habrá un solo punto P en el círculo C tal que la longitud del arco, medida en dirección de las manecillas del reloj a partir de A, sea t. Así, para cada número real t, podemos asociar un único punto $P(x, y)$ en el círculo unitario. Esto nos permite construir las definiciones clave de las funciones seno y coseno. Las funciones seno y coseno se escriben como sen y cos, en lugar de una sola letra como f o g. Por lo regular, se omiten los paréntesis alrededor de la variable independiente, a menos que exista alguna ambigüedad.

> **Definición** Funciones seno y coseno
>
> Sea t un número real que determina el punto $P(x, y)$, como se explicó anteriormente. Entonces
>
> $$\text{sen}\,t = y \quad \text{y} \quad \cos t = x$$

Propiedades básicas del seno y del coseno Varios hechos son casi inmediatos a partir de las definiciones dadas anteriormente. Primero, como t puede ser cualquier número real, el dominio de las funciones seno y coseno es $(-\infty, \infty)$ Segundo, x y y siempre están entre -1 y 1. Así, el rango para las funciones seno y coseno es el intervalo $[-1, 1]$.

Puesto que el círculo unitario tiene 2π de circunferencia, los valores de t y $t + 2\pi$ determinan el *mismo* punto $P(x, y)$. Por lo tanto,

$$\text{sen}(t + 2\pi) = \text{sen}\,t \quad \text{y} \quad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

(Observe que los paréntesis son necesarios para dejar claro que queremos $\text{sen}(t + 2\pi)$ en lugar de $(\text{sen}\,t) + 2\pi$. La expresión $\text{sen}\,t + 2\pi$ sería ambigua).

Los puntos P_1 y P_2 que corresponden a t y $-t$, respectivamente, son simétricos con respecto al eje x (véase la figura 3). Por lo tanto, las abscisas para P_1 y P_2 son las mismas y las ordenadas y sólo difieren en el signo. En consecuencia,

$$\text{sen}(-t) = -\text{sen}\,t \quad \text{y} \quad \cos(-t) = \cos t$$

En otras palabras, seno es una función impar y coseno es una función par.

Los puntos P_3 y P_4 correspondientes a t y $\pi/2 - t$, respectivamente, son simétricos con respecto a la recta $y = x$ y, por lo tanto, tenemos sus coordenadas intercambiadas (véase la figura 4). Esto significa que

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t \quad \text{y} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \text{sen}\,t$$

Por último, mencionamos una identidad importante que relaciona las funciones seno y coseno:

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

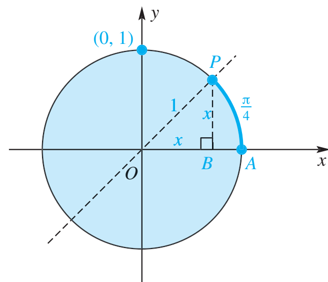


Figura 5

para todo número real t. Esta identidad se deriva del hecho de que el punto (x, y) está en la circunferencia del círculo unitario, de aquí que x y y deben satisfacer $x^2 + y^2 = 1$.

Gráficas de seno y coseno Para graficar $y = \operatorname{sen} t$ y $y = \cos t$, seguimos nuestro procedimiento usual de construir una tabla de valores, trazar los puntos correspondientes y unir estos puntos con una curva suave. Sin embargo, hasta ahora sólo conocemos los valores de seno y coseno para pocos valores de t. Otros valores pueden determinarse a partir de argumentos geométricos. Por ejemplo, si $t = \pi/4$, entonces t determina el punto medio del camino, si se recorre el círculo unitario en sentido contrario a las manecillas del reloj, entre los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Por simetría, x y y estarán en la recta $y = x$, de modo que $y = \operatorname{sen} t$ y $x = \cos t$ serán iguales. Así, los dos catetos del triángulo rectángulo OBP son iguales, y la hipotenusa es 1 (véase la figura 5). Puede aplicarse el Teorema de Pitágoras para obtener:

$$1 = x^2 + x^2 = \cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4}$$

De esto concluimos que $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$. De manera análoga, $\operatorname{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2$. Podemos determinar sen t y cos t para otros valores de t. Algunos de éstos se muestran en la tabla que aparece en el margen. Utilizando estos resultados, junto con varios resultados de una calculadora (en modo de radianes), obtenemos las gráficas que se muestran en la figura 6.

t	sen t	cos t
0	0	1
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	1	0
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$
π	0	-1

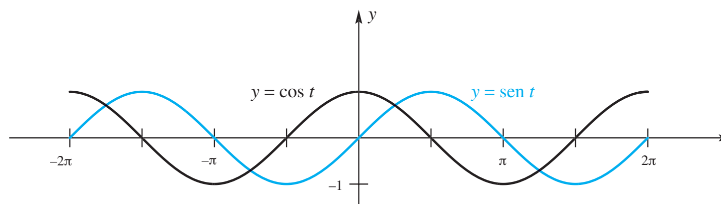


Figura 6

Con respecto a estas gráficas, cuatro cosas son notables:

1. Tanto sen t como cos t tienen como rango de -1 a 1.
2. Ambas gráficas se repiten en intervalos adyacentes de longitud 2π.
3. La gráfica de $y = \operatorname{sen} t$ es simétrica respecto al origen, y $y = \cos t$ es simétrica con respecto al eje y. (Por lo tanto, la función seno es impar y la función coseno es par).
4. La gráfica de $y = \operatorname{sen} t$ es la misma que la de $y = \cos t$, pero trasladada $\pi/2$ unidades hacia la derecha.

El siguiente ejemplo trata con funciones de la forma sen(at) o cos(at), que con frecuencia aparecen en las aplicaciones.

EJEMPLO 1 Bosqueje las gráficas de

(a) $y = \operatorname{sen}(2\pi t)$ (b) $y = \cos(2t)$

SOLUCIÓN

(a) Cuando t va de 0 a 1, el argumento $2\pi t$ varía de 0 a 2π. Por lo tanto, la gráfica de esta función se repetirá en intervalos adyacentes de longitud 1. Con base en las entradas de la siguiente tabla, podemos bosquejar una gráfica de $y = \operatorname{sen}(2\pi t)$.

t	$\text{sen}(2\pi t)$	t	$\text{sen}(2\pi t)$
0	$\text{sen}(2\pi \cdot 0) = 0$	$\frac{5}{8}$	$\text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{5}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{8}$	$\text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{3}{4}\right) = -1$
$\frac{1}{4}$	$\text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{1}{4}\right) = 1$	$\frac{7}{8}$	$\text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{7}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3}{8}$	$\text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{3}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\text{sen}(2\pi \cdot 1) = 0$
$\frac{1}{2}$	$\text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{1}{2}\right) = 0$	$\frac{9}{8}$	$\text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{9}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

La figura 7 muestra un bosquejo de la gráfica de $y = \text{sen}(2\pi t)$.

(b) Conforme t varía de 0 a π, el argumento $2t$ varía de 0 a 2π. Por lo tanto, la gráfica de $y = \cos(2t)$ se repetirá en intervalos adyacentes de longitud π. Una vez que construimos una tabla podemos bosquejar una gráfica de $y = \cos(2t)$. La figura 8 muestra la gráfica de $y = \cos(2t)$.

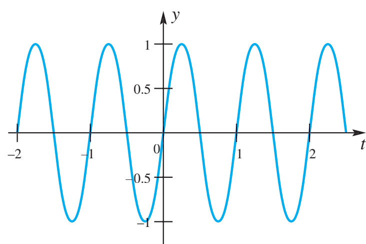


Figura 7

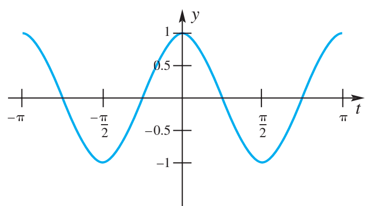


Figura 8

t	$\cos(2t)$	t	$\cos(2t)$
0	$\cos(2 \cdot 0) = 1$	$\frac{5\pi}{8}$	$\cos\left(2 \cdot \frac{5\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{8}$	$\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cos\left(2 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) = 0$
$\frac{\pi}{4}$	$\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 0$	$\frac{7\pi}{8}$	$\cos\left(2 \cdot \frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{8}$	$\cos\left(2 \cdot \frac{3\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	π	$\cos(2 \cdot \pi) = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -1$	$\frac{9\pi}{8}$	$\cos\left(2 \cdot \frac{9\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

■

Periodo y amplitud de las funciones trigonométricas Una función f es **periódica** si existe un número p tal que

$$f(x + p) = f(x)$$

para todos los números reales x en el dominio de f. El número positivo p más pequeño de tales números se denomina **periodo** de f. La función seno es periódica porque $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}\, x$ para toda x. También es cierto que

$$\text{sen}(x + 4\pi) = \text{sen}(x - 2\pi) = \text{sen}(x + 12\pi) = \text{sen}\, x$$

para toda x. Por lo tanto, 4π, -2π y 12π son números p con la propiedad de que $\text{sen}(x + p) = \text{sen}\, x$. El periodo se define como el número positivo más pequeño p. Para la función seno, el positivo más pequeño p con la propiedad de que $\text{sen}(x + p) = \text{sen}\, x$ es $p = 2\pi$. En consecuencia, decimos que la función seno es periódica, con periodo 2π. La función coseno también es periódica, con periodo 2π.

La función $\text{sen}(at)$, con $a > 0$, $2\pi/a$ ya que

$$\text{sen}\left[a\left(t + \frac{2\pi}{a}\right)\right] = \text{sen}[at + 2\pi] = \text{sen}(at)$$

El periodo de la función $\cos(at)$ también es $2\pi/a$.

EJEMPLO 2 ¿Cuáles son los periodos de las funciones siguientes?

(a) $\operatorname{sen}(2\pi t)$ (b) $\cos(2t)$ (c) $\operatorname{sen}(2\pi t/12)$

SOLUCIÓN

(a) Como la función $\operatorname{sen}(2\pi t)$ es de la forma $\operatorname{sen}(at)$ con $a = 2\pi$, su periodo es $p = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

(b) La función $\cos(2t)$ es de la forma $\cos(at)$ con $a = 2$. Por lo tanto, el periodo de $\cos(2t)$ es $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

(c) La función $\operatorname{sen}(2\pi t/12)$ tiene periodo $p = \frac{2\pi}{2\pi/12} = 12$. ■

Si la función periódica f alcanza un máximo y un mínimo, definimos la **amplitud** A como la mitad de la distancia vertical entre el punto más bajo y el punto más alto de la gráfica.

EJEMPLO 3 Determine la amplitud de las siguientes funciones periódicas.

(a) $\operatorname{sen}(2\pi t/12)$ (b) $3\cos(2t)$

(c) $50 + 21\operatorname{sen}(2\pi t/12 + 3)$

SOLUCIÓN

(a) Como el rango de la función $\operatorname{sen}(2\pi t/12)$ es $[-1, 1]$, su amplitud es $A = 1$.

(b) La función $3\cos(2t)$ tomará valores de -3 (lo cual ocurre cuando $t = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$) a 3 (lo cual se da cuando $t = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$). Por lo tanto, la amplitud es $A = 3$.

(c) La función $21\operatorname{sen}(2\pi t/12 + 3)$ toma valores que van de -21 a 21. Por lo tanto, $50 + 21\operatorname{sen}(12\pi t/12 + 3)$ toma valores de $50 - 21 = 29$ a $50 + 21 = 71$. Por lo tanto, la amplitud es 21. ■

En general, para $a > 0$ y $A > 0$,

> $C + A\operatorname{sen}(a(t + b))$ y $C + A\cos(a(t + b))$ tienen periodo $\frac{2\pi}{a}$ y amplitud A.

Las funciones trigonométricas se pueden usar para modelar diferentes fenómenos físicos, incluyendo niveles diarios de la marea y temperaturas anuales.

EJEMPLO 4 La temperatura alta normal para San Luis, Missouri, varía desde 37°F para el 15 de enero hasta 89°F para el 15 de julio. La temperatura alta normal sigue aproximadamente una curva sinusoidal.

(a) Determine valores de C, A, a y b tales que

$$T(t) = C + A\operatorname{sen}(a(t + b))$$

donde t, expresada en meses desde el 1 de enero, es un modelo razonable para la temperatura alta normal.

(b) Utilice este modelo para aproximar la temperatura alta normal para el 15 de mayo.

SOLUCIÓN

(a) La función pedida debe tener periodo $t = 12$, ya que las estaciones se repiten cada 12 meses. Así, $\frac{2\pi}{a} = 12$, de modo que tenemos $a = \frac{2\pi}{12}$. La amplitud es la mitad de la diferencia entre los puntos más alto y más bajo; en este caso $A = \frac{1}{2}(89 - 37) = 26$.

El valor de C es igual a la mitad de las temperaturas baja y alta, de modo que $C = \frac{1}{2}(89 + 37) = 63$. Por lo tanto, la función $T(t)$ será de la forma

$$T(t) = 63 + 26 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{12}(t + b)\right)$$

La única constante que queda por determinar es b. La temperatura normal alta inferior es 37, que ocurre el 15 de enero, aproximadamente a mediados de enero. Así, nuestra función debe satisfacer $T(1/2) = 37$, y la función debe alcanzar su mínimo de 37 cuando $t = 1/2$. La figura 9 resume la información que tenemos hasta el momento. La función $63 + 26 \operatorname{sen}(2\pi t/12)$ alcanza su mínimo cuando $2\pi t/12 = -\pi/2$, esto es, cuando $t = -3$. Por lo tanto, debemos trasladar hacia la derecha $1/2 - (-3) = 7/2$ unidades, la curva definida por $y = 63 + 26 \operatorname{sen}(2\pi t/12)$. En la sección 0.6 mostramos que reemplazar x por $x - c$ traslada la gráfica de $y = f(x)$ hacia la derecha c unidades. Así, para trasladar la gráfica de $y = 63 + 26 \operatorname{sen}(2\pi t/12)$ hacia la derecha 7/2 unidades, debemos reemplazar t con $t - 7/2$. Por lo tanto,

$$T(t) = 63 + 26 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{12}\left(t - \frac{7}{2}\right)\right)$$

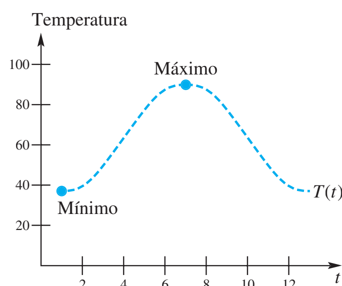


Figura 9

La figura 10 muestra una gráfica de la temperatura alta normal T como una función de t, donde t está dada en meses.

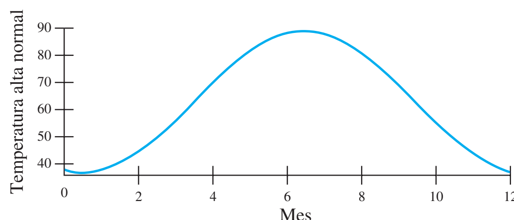


Figura 10

(b) Para estimar la temperatura alta normal el 15 de mayo, sustituimos $t = 4.5$ (ya que la mitad de mayo está a cuatro y medio meses del inicio del año) y obtenemos

$$T(4.5) = 63 + 26 \operatorname{sen}(2\pi(4.5 - 3.5)/12) = 76$$

La temperatura alta normal para San Luis el 15 de mayo realmente es de 75°F. De este modo, nuestro modelo sobreestima por 1°, lo cual es sorprendentemente preciso considerando la poca información que fue dada. ■

Modelos y modelación
Es importante tener presente que todos los modelos, como éste, son simplificaciones de la realidad. (Por esta razón se denominan *modelos*). Aunque tales modelos son inherentemente simplificaciones de la realidad, muchos de ellos son útiles para realizar pronósticos.

Otras cuatro funciones trigonométricas Podríamos valernos sólo de las funciones seno y coseno, pero es conveniente introducir cuatro funciones trigonométricas más: tangente, cotangente, secante y cosecante.

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$$

Lo que sabemos de seno y coseno nos proporcionará, de forma automática, conocimiento acerca de estas cuatro nuevas funciones.

EJEMPLO 5 Demuestre que la tangente es una función impar.

SOLUCIÓN

$$\tan(-t) = \frac{\operatorname{sen}(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos t} = -\tan t$$ ■

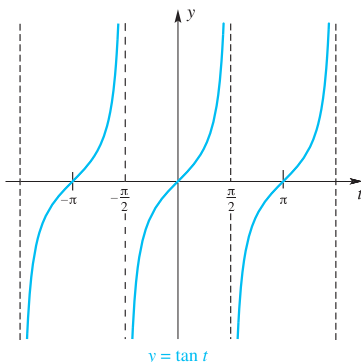


Figura 11

EJEMPLO 6 Verifique que las siguientes son identidades.

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t \qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

SOLUCIÓN

$$1 + \tan^2 t = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} = \sec^2 t$$

$$1 + \cot^2 t = 1 + \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} = \frac{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t} = \csc^2 t$$ ■

Cuando estudiamos la función tangente (figura 11) nos encontramos con dos pequeñas sorpresas. Primera, notamos que hay asíntotas verticales en $\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$, etcétera. Debimos haber anticipado esto, ya que $\cos t = 0$ en estos valores de t, lo cual significa que $(\operatorname{sen} t)/(\cos t)$ implicaría una división entre cero. Segunda, parece que la tangente es periódica (lo cual esperábamos), pero con periodo π (que podríamos no haber esperado). Usted verá la razón analítica para esto en el problema 33.

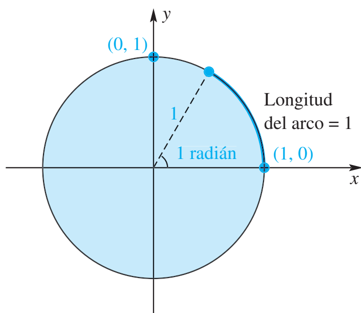


Figura 12

Relación con la trigonometría del ángulo Por lo común, los ángulos se miden en grados o en radianes. Por definición, un radián es el ángulo que corresponde a un arco de longitud 1 en un círculo unitario. Véase la figura 12. El ángulo que corresponde a una vuelta completa mide 360°, pero sólo 2π radianes. De manera equivalente, un ángulo llano (de lados colineales)medirá 180° o π radianes, un hecho importante para recordar.

$$180° = \pi \text{ radianes} \approx 3.1415927 \text{ radianes}$$

Grados	Radianes
0	0
30	π/6
45	π/4
60	π/3
90	π/2
120	2π/3
135	3π/4
150	5π/6
180	π
360	2π

Figura 13

Esto conduce a los resultados

$$1 \text{ radián} \approx 57.29578° \qquad 1° \approx 0.0174533 \text{ radián}$$

La figura 13 muestra algunas otras conversiones comunes entre grados y radianes.

La división de una vuelta en 360 partes es muy arbitraria (debida a los antiguos babilonios, a quienes les agradaban los múltiplos de 60). La división en 2π partes es más fundamental y yace en el uso casi universal de la medida radián en cálculo. En particular, observe que la longitud s del arco que corta un círculo de radio r por medio de un ángulo central de t radianes satisface (véase la figura 14)

$$\frac{s}{2\pi r} = \frac{t}{2\pi}$$

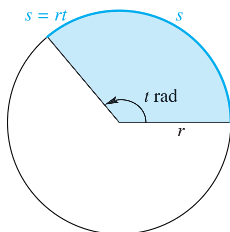


Figura 14

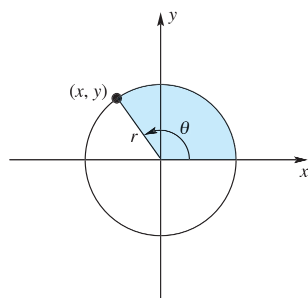
Esto es, la fracción de la circunferencia total $2\pi r$ correspondiente a un ángulo t es la misma fracción del círculo unitario que corresponde al mismo ángulo t. Esto implica que $s = rt$.

Cuando $r = 1$, esto da $s = t$, *lo cual* significa que *la longitud del arco en el círculo unitario cortado por un ángulo central de t radianes es t*. Esto es correcto incluso si t es negativa, con tal que interpretemos la longitud como negativa cuando se mide en dirección de las manecillas del reloj.

EJEMPLO 7 Determine la distancia recorrida por una bicicleta, cuyas ruedas tienen un radio de 30 centímetros, cuando éstas han girado 100 revoluciones.

Otra vista

Hemos tenido al círculo unitario como base de nuestro estudio de trigonometría. También podríamos utilizar un círculo de radio r.



Entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

SOLUCIÓN Utilizamos el hecho de que $s = rt$, reconociendo que 100 revoluciones corresponden a $100\cdot(2\pi)$ radianes.

$$s = (30)(100)(2\pi) = 6000\pi \approx 18{,}849.6 \text{ centímetros} \approx 188.5 \text{ metros}$$ ■

Ahora podemos hacer la conexión entre la trigonometría del ángulo y la trigonometría del círculo unitario. Si θ es un ángulo medido en k radianes, es decir, si θ es un ángulo que corta un arco de longitud t del círculo unitario, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} t \qquad \cos\theta = \cos t$$

En cálculo, cuando encontramos un ángulo medido en grados, casi siempre lo cambiamos a radianes antes de realizar cualquier cálculo. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen} 31.6° = \operatorname{sen}\left(31.6\cdot\frac{\pi}{180}\text{radián}\right) \approx \operatorname{sen} 0.552$$

Lista de identidades importantes No gastaremos espacio en verificar todas las identidades siguientes. Simplemente aseguraremos su validez y sugerimos que la mayoría de ellas será necesaria en alguna parte de este texto.

Identidades trigonométricas Lo siguiente es cierto para toda x y toda y, siempre que ambos lados estén definidos para las x y y seleccionadas.

Identidades par-impar

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

Identidades de las cofunciones

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades para la suma de ángulos

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Identidades del ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

Identidades del medio ángulo

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Identidades aditivas

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

Identidades multiplicativas

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = -\tfrac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$
$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$
$$\operatorname{sen} x \cos y = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)]$$

Revisión de conceptos

1. El dominio natural de la función seno es _______; su rango es _______.

2. El periodo de la función coseno es _______; el periodo de la función seno es _______; el periodo de la función tangente es _______.

3. Como sen(−x) = −sen x, la función seno es _______ y como cos (−x) = cos x, la función coseno es _______.

4. Si (−4, 3) está en el lado terminal de un ángulo θ cuyo vértice está en el origen y su lado inicial está a lo largo de la parte positiva del eje x, entonces cos θ = _______.

Conjunto de problemas 0.7

1. Convierta las siguientes medidas en grados a radianes (deje π en su respuesta)

(a) 30° (b) 45° (c) −60°
(d) 240° (e) −370° (f) 10°

2. Convierta las siguientes medidas en radianes a grados

(a) $\frac{7}{6}\pi$ (b) $\frac{3}{4}\pi$ (c) $-\frac{1}{3}\pi$
(d) $\frac{4}{3}\pi$ (e) $-\frac{35}{18}\pi$ (f) $\frac{3}{18}\pi$

C **3.** Convierta las siguientes medidas en grados a radianes ($1° = \pi/180 \approx 1.7453 \times 10^{-2}$ radianes).

(a) 33.3° (b) 46° (c) −66.6°
(d) 240.11° (e) −369° (f) 11°

C **4.** Convierta las siguientes medidas en radianes a grados (1 radián = $180/\pi \approx 57.296$ grados).

(a) 3.141 (b) 6.28 (c) 5.00
(d) 0.001 (e) −0.1 (f) 36.0

C **5.** Calcule (asegúrese de que su calculadora está en modo de radianes o de grados, según sea necesario).

(a) $\dfrac{56.4 \tan 34.2°}{\operatorname{sen} 34.1°}$ (b) $\dfrac{5.34 \tan 21.3°}{\operatorname{sen} 3.1° + \cot 23.5°}$

(c) $\tan 0.452$ (d) $\operatorname{sen}(-0.361)$

C **6.** Calcule

(a) $\dfrac{234.1 \operatorname{sen} 1.56}{\cos 0.34}$ (b) $\operatorname{sen}^2 2.51 + \sqrt{\cos 0.51}$

C **7.** Calcule.

(a) $\dfrac{56.3 \tan 34.2°}{\operatorname{sen} 56.1°}$ (b) $\left(\dfrac{\operatorname{sen} 35°}{\operatorname{sen} 26° + \cos 26°}\right)^3$

8. Verifique los valores de sen t y cos t de la tabla utilizada para construir la figura 6.

9. Sin utilizar calculadora, evalúe.

(a) $\tan \dfrac{\pi}{6}$ (b) $\sec \pi$ (c) $\sec \dfrac{3\pi}{4}$

(d) $\csc \dfrac{\pi}{2}$ (e) $\cot \dfrac{\pi}{4}$ (f) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

10. Evalúe sin utilizar calculadora.

(a) $\tan \dfrac{\pi}{3}$ (b) $\sec \dfrac{\pi}{3}$ (c) $\cot \dfrac{\pi}{3}$

(d) $\csc \dfrac{\pi}{4}$ (e) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ (f) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

11. Verifique que las siguientes son identidades (véase el ejemplo 6).

(a) $(1 + \operatorname{sen} z)(1 - \operatorname{sen} z) = \dfrac{1}{\sec^2 z}$

(b) $(\sec t - 1)(\sec t + 1) = \tan^2 t$

(c) $\sec t - \operatorname{sen} t \tan t = \cos t$

(d) $\dfrac{\sec^2 t - 1}{\sec^2 t} = \operatorname{sen}^2 t$

12. Verifique que las siguientes son identidades (véase el ejemplo 6).

(a) $\operatorname{sen}^2 v + \dfrac{1}{\sec^2 v} = 1$

(b) $\cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$. *Sugerencia:* utilice una identidad del ángulo doble.

(c) $\operatorname{sen} 4x = 8 \operatorname{sen} x \cos^3 x - 4 \operatorname{sen} x \cos x$. *Sugerencia:* utilice dos veces una identidad del ángulo doble.

(d) $(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) = \operatorname{sen}^2 \theta$

13. Verifique que las siguientes son identidades.

(a) $\dfrac{\operatorname{sen} u}{\csc u} + \dfrac{\cos u}{\sec u} = 1$

(b) $(1 - \cos^2 x)(1 + \cot^2 x) = 1$

(c) $\operatorname{sen} t(\csc t - \operatorname{sen} t) = \cos^2 t$

(d) $\dfrac{1 - \csc^2 t}{\csc^2 t} = \dfrac{-1}{\sec^2 t}$

14. Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones en $[-\pi, 2\pi]$.

(a) $y = \operatorname{sen} 2x$ (b) $y = 2 \operatorname{sen} t$

(c) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ (d) $y = \sec t$

15. Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones en $[-\pi, 2\pi]$.

(a) $y = \csc t$ (b) $y = 2 \cos t$

(c) $y = \cos 3t$ (d) $y = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$

Determine el periodo, amplitud y corrimiento (tanto horizontal como vertical) y dibuje una gráfica en el intervalo $-5 \le x \le 5$ para las funciones listadas en los problemas del 16 al 23.

16. $y = 3\cos\frac{x}{2}$ **17.** $y = 2\,\text{sen}\,2x$

18. $y = \tan x$ **19.** $y = 2 + \frac{1}{6}\cot 2x$

20. $y = 3 + \sec(x - \pi)$ **21.** $y = 21 + 7\,\text{sen}(2x + 3)$

22. $y = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ **23.** $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

24. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa la misma gráfica? Verifique su resultado de manera analítica por medio de identidades trigonométricas.

(a) $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (b) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(c) $y = -\text{sen}(x + \pi)$ (d) $y = \cos(x - \pi)$

(e) $y = -\text{sen}(\pi - x)$ (f) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

(g) $y = -\cos(\pi - x)$ (h) $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

25. ¿Cuáles de las siguientes son funciones impares? ¿Cuáles funciones pares? ¿Y cuáles ninguna de éstas?

(a) $t\,\text{sen}\,t$ (b) $\text{sen}^2 t$ (c) $\csc t$

(d) $|\text{sen}\,t|$ (e) $\text{sen}(\cos t)$ (f) $x + \text{sen}\,x$

26. ¿Cuáles de las siguiente son funciones impares? ¿Cuáles funciones pares? ¿Y cuáles ninguna de éstas?

(a) $\cot t + \text{sen}\,t$ (b) $\text{sen}^3 t$ (c) $\sec t$

(d) $\sqrt{\text{sen}^4 t}$ (e) $\cos(\text{sen}\,t)$ (f) $x^2 + \text{sen}\,x$

Determine los valores exactos en los problemas del 27 al 31. Sugerencia: las identidades del medio ángulo pueden serle útiles.

27. $\cos^2\frac{\pi}{3}$ **28.** $\text{sen}^2\frac{\pi}{6}$

29. $\text{sen}^3\frac{\pi}{6}$ **30.** $\cos^2\frac{\pi}{12}$

31. $\text{sen}^2\frac{\pi}{8}$

32. Determine las identidades análogas a las identidades de suma de ángulos para cada expresión.

(a) $\text{sen}(x - y)$ (b) $\cos(x - y)$ (c) $\tan(x - y)$

33. Utilice la identidad de suma de ángulo para la tangente, a fin de demostrar que $\tan(t + \pi) = \tan t$ para toda t en el dominio de $\tan t$.

34. Demuestre que $\cos(x - \pi) = -\cos x$ para toda x.

≈ C **35.** Suponga que la llanta de un camión tiene un radio exterior de 2.5 pies. ¿Cuántas revoluciones por minuto gira la llanta cuando el camión está viajando a 60 millas por hora?

≈ **36.** ¿Cuánto avanza una rueda, de radio 2 pies, que gira al nivel del piso dando 150 revoluciones?

≈ C **37.** Una banda pasa por dos poleas, como se muestra en la figura 15. ¿Cuántas revoluciones por segundo gira la polea pequeña cuando la polea grande gira a 21 revoluciones por segundo?



Figura 15

38. El **ángulo de inclinación** α de una recta es el ángulo positivo más pequeño, a partir del eje x a la recta ($\alpha = 0$, para una recta horizontal). Demuestre que la pendiente m de la recta es igual a tan a.

39. Determine el ángulo de inclinación de las siguientes rectas (véase el problema 38).

(a) $y = \sqrt{3}x - 7$ (b) $\sqrt{3}x + 3y = 6$

40. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas no verticales, que se intersectan, con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Si θ, el ángulo de ℓ_1 a ℓ_2, no es un ángulo recto, entonces

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Demuestre esto utilizando el hecho de que $\theta = \theta_2 - \theta_1$ en la figura 16.

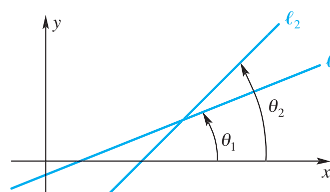


Figura 16

C **41.** Determine el ángulo (en radianes) de la primera a la segunda recta (véase el problema 40).

(a) $y = 2x,\ y = 3x$ (b) $y = \frac{x}{2},\ y = -x$

(c) $2x - 6y = 12,\ 2x + y = 0$

42. Deduzca la fórmula $A = \frac{1}{2}r^2 t$ para el área de un sector circular. Aquí, r es el radio y t es la medida en radianes del ángulo central (véase la figura 17).

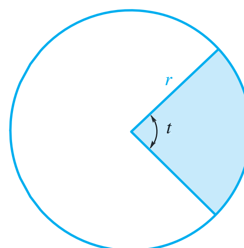


Figura 17

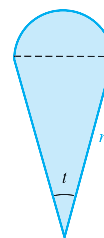


Figura 18

43. Determine el área del sector de un círculo de radio 5 centímetros y ángulo central de 2 radianes (véase el problema 42).

44. Un polígono regular de n lados está inscrito en un círculo de radio r. Determine fórmulas para el perímetro, P, y el área, A, del polígono en términos de n y r.

45. Un triángulo isósceles está coronado por un semicírculo, como se muestra en la figura 18. Encuentre una fórmula para el área A de la figura completa, en términos de la longitud del lado r y el ángulo t (radianes). (Decimos que A es una función de las dos variables independientes r y t.)

46. A partir de una identidad multiplicativa obtenemos

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{3}{4}x\right) + \cos\left(\frac{1}{4}x\right)\right]$$

Determine la correspondiente suma de cosenos para

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{16}$$

¿Puede visualizar una generalización?

47. La temperatura alta normal para Las Vegas, Nevada, es de 55°F para el 15 de enero y 105° para el 15 de julio. Suponiendo que éstas sean las temperaturas superior e inferior para el año, utilice esta información para aproximar la temperatura alta promedio para el 15 de noviembre.

48. Con frecuencia, las mareas se miden por medio de marcas de altura arbitrarias en alguna localidad. Suponga que una marea alta ocurre al mediodía cuando el nivel del agua está en 12 pies. Seis horas más tarde, sucede una marea baja con un nivel de 5 pies, y a medianoche tiene lugar otra marea alta con un nivel del agua de 12 pies. Suponiendo que el nivel del agua es periódico, utilice esta información para determinar una fórmula que proporcione el nivel del agua como una función del tiempo. Luego utilice esta función para aproximar el nivel del agua a las 5:30 p. m.

EXPL **49.** El movimiento circular puede modelarse mediante la representación paramétrica de la forma $x(t) = \text{sen } t$ y $y(t) = \cos t$. (Una *representación paramétrica* significa que una variable, en este caso t, determina a $x(t)$ y $y(t)$.) Ésta dará el círculo completo para $0 \le t \le 2\pi$. Si consideramos una rueda con un diámetro de 4 pies que gira en el sentido de las manecillas del reloj una vez cada 10 segundos, demuestre que el movimiento de un punto en la periferia de la rueda puede representarse por medio de $x(t) = 2\text{sen}(\pi t/5)$ y $y(t) = 2\cos(\pi t/5)$.

(a) Determine las posiciones del punto en el borde de la rueda cuando $t = 2, 6$ y 10 segundos. ¿En dónde estaba este punto cuando la rueda comenzó a girar en $t = 0$?

(b) Si la rueda está girando en *sentido contrario a las manecillas del reloj*, ¿cómo cambiarían las fórmulas para dar el movimiento del punto?

(c) ¿Para qué valor de t el punto está en $(2, 0)$ por primera vez?

EXPL **50.** La frecuencia circular v de oscilación de un punto está dada por $v = \dfrac{2\pi}{\text{periodo}}$. ¿Qué sucede cuando suma dos movimientos que tienen la misma frecuencia o periodo? Para investigar, podemos graficar las funciones $y(t) = 2\text{sen}(\pi t/5)$ y $y(t) = \text{sen}(\pi t/5) + \cos(\pi t/5)$ y buscar semejanzas. Armados con esta información, podemos investigar mediante la graficación de las funciones siguientes en el intervalo $[-5, 5]$:

(a) $y(t) = 3\,\text{sen}(\pi t/5) - 5\cos(\pi t/5) + 2\,\text{sen}((\pi t/5) - 3)$

(b) $y(t) = 3\cos(\pi t/5 - 2) + \cos(\pi t/5) + \cos((\pi t/5) - 3)$

EXPL **51.** Ahora exploramos la relación entre $A\,\text{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t)$ y $C\,\text{sen}(\omega t + \phi)$.

(a) Desarrollando $\text{sen}(\text{w}t + \phi)$ por medio de la fórmula para la suma de ángulos, demuestre que las dos expresiones son equivalentes si $A = C\cos\phi$ y $B = C\,\text{sen}\,\phi$.

(b) En consecuencia, demuestre que $A^2 + B^2 = C^2$ y que entonces ϕ satisface la ecuación $\tan\phi = \dfrac{B}{A}$.

(c) Generalice su resultado para establecer una proposición acerca de $A_1\,\text{sen}(\omega t + \phi_1) + A_2\,\text{sen}(\omega t + \phi_2) + A_3\,\text{sen}(\omega t + \phi_3)$.

(d) Escriba un ensayo, con sus propias palabras, que exprese la importancia de la identidad entre $A\,\text{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t)$ y $C\,\text{sen}(\omega t + \phi)$. Asegúrese de observar que $|C| \ge \text{máx}(|A|, |B|)$ y que la identidad sólo se cumple cuando usted forma una combinación lineal (sumando y/o restando múltiplos de una sola potencia) de senos y cosenos con la misma frecuencia.

Las funciones trigonométricas que tienen frecuencias altas plantean problemas especiales para su graficación. Ahora exploramos cómo graficar tales funciones.

GC **52.** Grafique la función $f(x) = \text{sen } 50x$; use la ventana dada por un rango de y de $-1.5 \le y \le 1.5$ y rango de x dado por

(a) $[-15, 15]$ (b) $[-10, 10]$ (c) $[-8, 8]$

(d) $[-1, 1]$ (e) $[-0.25, 0.25]$

Indique brevemente cuál ventana de x muestra el comportamiento verdadero de la función, y discuta las razones por las que otras ventanas dan resultados que son diferentes.

GC **53.** Grafique la función $f(x) = \cos x + \dfrac{1}{50}\text{sen } 50x$; utilice la ventana dada por los siguientes rangos para x y y.

(a) $-5 \le x \le 5, -1 \le y \le 1$

(b) $-1 \le x \le 1, 0.5 \le y \le 1.5$

(c) $-0.1 \le x \le 0.1, 0.9 \le y \le 1.1$

De manera breve indique cuál ventana (x, y) muestra el verdadero comportamiento de la función, y discuta las razones por las que las otras ventanas (x, y) dan resultados que son diferentes. En este caso, ¿es cierto que sólo una de las ventanas proporciona el comportamiento importante, o necesitamos más de una ventana para comunicar de manera gráfica el comportamiento de esta función?

GC EXPL **54.** Sean $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x^2 + 1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{100}\cos(100x)$.

(a) Utilice la composición de funciones para formar $h(x) = (f \circ g)(x)$, así como $j(x) = (g \circ f)(x)$.

(b) Determine la ventana o ventanas adecuadas que proporcionen una representación clara de $h(x)$.

(c) Determine la ventana o ventanas adecuadas que proporcionen una representación clara de $j(x)$.

55. Suponga que una función continua es periódica con periodo 1 y es lineal entre 0 y 0.25, y lineal entre -0.75 y 0. Además, tiene el valor 1 en 0 y 2 en 0.25. Bosqueje la función en el dominio $[-1, 1]$ y proporcione una definición por partes de la función.

56. Suponga que una función continua es periódica con periodo 2 y es cuadrática entre -0.25 y 0.25, y lineal entre -1.75 y -0.25. Además, tiene el valor 0 en 0 y 0.0625 en ± 0.25. Bosqueje la función en el dominio $[-2, 2]$ y proporcione una definición por partes de la función.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $(-\infty, \infty)$; $[-1, 1]$ **2.** 2π; 2π; π **3.** impar; par **4.** $-4/5$

0.8 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes aseveraciones. Esté preparado para justificar su respuesta. Por lo común, esto significa que usted debe proporcionar una razón si responde verdadero y dar un contraejemplo si responde falso.

1. Cualquier número que puede escribirse como una fracción p/q es racional.

2. La diferencia de cualesquiera dos números racionales es racional.

3. La diferencia de cualesquiera dos números irracionales es irracional.

4. Entre dos números irracionales distintos siempre hay otro número irracional.

5. $0.999\ldots$ (los 9 se repiten) es menor que 1.

6. La operación de exponenciación es conmutativa; esto es, $(a^m)^n = (a^n)^m$.

7. La operación * definida por $m*n = m^n$ es asociativa.

8. Las desigualdades $x \le y$, $y \le z$ y $z \le x$, juntas, implican que $x = y = z$.

9. Si $|x| < \varepsilon$ para todo número positivo ε , entonces $x = 0$.

10. Si x y y son números reales, entonces $(x - y)(y - x) \le 0$.

11. Si $a < b < 0$, entonces $1/a > 1/b$.

12. Es posible que dos intervalos cerrados tengan exactamente un punto en común.

13. Si dos intervalos abiertos tienen un punto en común, entonces tienen un número infinito de puntos en común.

14. Si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$.

15. Si x es un número real, entonces $|-x| = x$.

16. Si $|x| < |y|$, entonces $x < y$.

17. Si $|x| < |y|$, entonces $x^4 < y^4$.

18. Si x y y son negativos, entonces $|x + y| = |x| + |y|$.

19. Si $|r| < 1$, entonces $\dfrac{1}{1 + |r|} \le \dfrac{1}{1 - r} \le \dfrac{1}{1 - |r|}$.

20. Si $|r| > 1$, entonces $\dfrac{1}{1 - |r|} \le \dfrac{1}{1 - r} \le \dfrac{1}{1 + |r|}$.

21. Siempre es cierto que $||x| - |y|| \le |x + y|$.

22. Para cada número real positivo y existe un número real x, tal que $x^2 = y$.

23. Para cada número real y existe un número real x, tal que $x^3 = y$.

24. Es posible tener una desigualdad cuyo conjunto solución consista exactamente en un número.

25. La ecuación $x^2 + y^2 + ax + y = 0$ representa un circunferencia para todo número real a.

26. La ecuación $x^2 + y^2 + ax + by = c$ representa una circunferencia para todos los números reales a, b, c.

27. Si (a, b) pertenece a una recta con pendiente $\frac{3}{4}$, entonces $(a + 4, b + 3)$ también está en esa recta.

28. Si (a, b), (c, d) y (e, f) están en la misma recta, entonces $\dfrac{a - c}{b - d} = \dfrac{a - e}{b - f} = \dfrac{e - c}{f - d}$, siempre que los tres números sean diferentes.

29. Si $ab > 0$, entonces (a, b) está en el primero o en el tercer cuadrante.

30. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un número positivo x tal que $x < \varepsilon$.

31. Si $ab = 0$, entonces (a, b) está en alguno de los ejes coordenados x o y.

32. Si $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |x_2 - x_1|$, entonces (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen a la misma recta horizontal.

33. La distancia entre $(a + b, a)$ y $(a - b, a)$ es $|2b|$.

34. La ecuación de cualquier recta puede escribirse en la forma punto–pendiente.

35. La ecuación de cualquier recta puede escribirse en la forma lineal general $Ax + By + C = 0$.

36. Si dos rectas no verticales son paralelas, tienen la misma pendiente.

37. Es posible que dos rectas tengan pendientes positivas y sean perpendiculares.

38. Si las intersecciones de una recta con el eje x y el eje y son racionales distintos de cero, entonces la pendiente de la recta es racional.

39. Las rectas $ax + y = c$ y $ax - y = c$ son perpendiculares.

40. $(3x - 2y + 4) + m(2x + 6y - 2) = 0$ es la ecuación de una recta para cada número real m.

41. El dominio natural de

$$f(x) = \sqrt{-(x^2 + 4x + 3)}$$

es el intervalo $-3 \le x \le -1$.

42. El dominio natural de $T(\theta) = \sec(\theta) + \cos(\theta)$ es $(-\infty, \infty)$.

43. El rango de $f(x) = x^2 - 6$ es el intervalo $[-6, \infty)$.

44. El rango de la función $f(x) = \tan x - \sec x$ es el conjunto $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

45. El rango de la función $f(x) = \csc x - \sec x$ es el conjunto $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

46. La suma de dos funciones pares es una función par.

47. La suma de dos funciones impares es una función impar.

48. El producto de dos funciones impares es una función impar.

49. El producto de una función par con una función impar es una función impar.

50. La composición de una función par con una función impar es una función impar.

51. La composición de dos funciones impares es una función par.

52. La función $f(x) = (2x^3 + x)/(x^2 + 1)$ es impar.

53. La función

$$f(t) = \frac{(\operatorname{sen} t)^2 + \cos t}{\tan t \csc t}$$

es par

54. Si el rango de una función consiste en un solo número, entonces su dominio también consiste en un solo número.

55. Si el dominio de una función contiene al menos dos números, entonces el rango también contiene al menos dos números.

56. Si $g(x) = [\![x/2]\!]$, entonces $g(-1.8) = -1$.

57. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$, entonces $f \circ g = g \circ f$.

58. Si $f(x) = x^2$ si $g(x) = x^3$, entonces $(f \circ g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

59. Si f y g tienen el mismo dominio, entonces f/g también tiene ese dominio.

60. Si la gráfica de $y = f(x)$ tiene una intersección con el eje x en $x = a$, entonces la gráfica de $y = f(x + h)$ tiene una intersección con el eje x en $x = a - h$.

61. La cotangente es una función impar.

62. El dominio natural de la función tangente es el conjunto de todos los números reales.

63. Si $\cos s = \cos t$, entonces $s = t$.

Conjunto de problemas de práctica

1. Calcule cada valor para $n = 1, 2$ y -2.

(a) $\left(n + \dfrac{1}{n}\right)^n$ (b) $(n^2 - n + 1)^2$

(c) $4^{3/n}$ (d) $\sqrt[n]{\left|\dfrac{1}{n}\right|}$

2. Simplifique

(a) $\left(1 + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)\left(1 - \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)^{-1}$

(b) $\dfrac{\dfrac{2}{x + 1} - \dfrac{x}{x^2 - x - 2}}{\dfrac{3}{x + 1} - \dfrac{2}{x - 2}}$

(c) $\dfrac{t^3 - 1}{t - 1}$

3. Muestre que el promedio de dos números racionales es un número racional.

4. Escriba el decimal periódico 4.1282828... como un cociente de dos enteros.

5. Encuentre un número irracional entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{13}{25}$.

C **6.** Calcule $\left(\sqrt[3]{8.15 \times 10^4} - 1.32\right)^2/3.24$.

C **7.** Calcule $\left(\pi - \sqrt{2.0}\right)^{2.5} - \sqrt[3]{2.0}$.

C **8.** Calcule $\operatorname{sen}^2(2.45) + \cos^2(2.40) - 1.00$.

En los problemas del 9 al 18 determine el conjunto solución en la recta real y exprese este conjunto en la notación de intervalo.

9. $1 - 3x > 0$

10. $6x + 3 > 2x - 5$

11. $3 - 2x \le 4x + 1 \le 2x + 7$

12. $2x^2 + 5x - 3 < 0$

13. $21t^2 - 44t + 12 \le -3$

14. $\dfrac{2x - 1}{x - 2} > 0$

15. $(x + 4)(2x - 1)^2(x - 3) \le 0$

16. $|3x - 4| < 6$

17. $\dfrac{3}{1 - x} \le 2$

18. $|12 - 3x| \ge |x|$

19. Determine un valor de x para el cual $|-x| \ne x$.

20. ¿Para cuáles valores de x se cumple la ecuación $|-x| = x$?

21. ¿Para cuáles valores de t se cumple la ecuación $|t - 5| = 5 - t$?

22. ¿Para cuáles valores de a y t se cumple la ecuación $|t - a| = a - t$?

23. Suponga que $|x| \le 2$. Utilice las propiedades del valor absoluto para demostrar que

$$\left|\frac{2x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2}\right| \le 8$$

24. Escriba una proposición que incluya la palabra *distancia* para expresar las siguientes proposiciones algebraicas:

(a) $|x - 5| = 3$ (b) $|x + 1| \le 2$

(c) $|x - a| > b$

25. Haga un bosquejo del triángulo con vértices $A(-2, 6)$, $B(1, 2)$ y $C(5, 5)$ y demuestre que es un triángulo rectángulo.

26. Determine la distancia de $(3, -6)$ al punto medio del segmento de recta que va de $(1, 2)$ a $(7, 8)$.

27. Determine la ecuación de la circunferencia con diámetro AB, si $A = (2, 0)$ y $B = (10, 4)$.

28. Determine el centro y el radio de la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$.

29. Determine la distancia entre los centros de las circunferencias con ecuaciones

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y = 2 \quad \text{y} \quad x^2 + 6x + y^2 - 4y = -7$$

30. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto indicado y que es paralela a la recta que se indica; además, bosqueje ambas rectas.

(a) $(3, 2)$: $3x + 2y = 6$ (b) $(1, -1)$: $y = \frac{2}{3}x + 1$

(c) $(5, 9)$: $y = 10$ (d) $(-3, 4)$: $x = -2$

31. Escriba la ecuación de la recta que pasa por $(-2, 1)$ y que

(a) pasa por $(7, 3)$;

(b) es paralela a $3x - 2y = 5$;

(c) es perpendicular a $3x + 4y = 9$;

(d) es perpendicular a $y = 4$;

(e) tiene intersección con el eje y igual a 3.

32. Muestre que $(2, -1)$, $(5, 3)$ y $(11, 11)$ están en la misma recta.

33. ¿Cuál ecuación puede representar la curva de la figura 1?

(a) $y = x^3$ (b) $x = y^3$

(c) $y = x^2$ (d) $x = y^2$

34. ¿Cuál ecuación puede representar la curva de la figura 2?

(a) $y = ax^2 + bx + c$, con $a > 0$, $b > 0$, y $c > 0$

(b) $y = ax^2 + bx + c$, con $a < 0$, $b > 0$, y $c > 0$

(c) $y = ax^2 + bx + c$, con $a < 0$, $b > 0$, y $c < 0$

(d) $y = ax^2 + bx + c$, con $a > 0$, $b > 0$, y $c < 0$

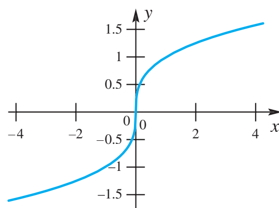


Figura 1

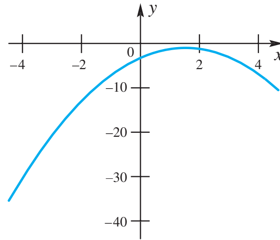


Figura 2

En los problemas del 35 al 38 bosqueje la gráfica de cada ecuación.

35. $3y - 4x = 6$ **36.** $x^2 - 2x + y^2 = 3$

GC **37.** $y = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$ GC **38.** $x = y^2 - 3$

GC **39.** Determine los puntos de intersección de las gráficas de $y = x^2 - 2x + 4$ y $y - x = 4$.

40. Entre todas las rectas perpendiculares a $4x - y = 2$, encuentre la ecuación de aquella que, junto con la parte positiva del eje x y del eje y, forma un triángulo de área 8.

41. Para $f(x) = 1/(x + 1) - 1/x$, determine cada valor (si esto es posible)

(a) $f(1)$ (b) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ (c) $f(-1)$

(d) $f(t - 1)$ (e) $f\left(\dfrac{1}{t}\right)$

42. Para $g(x) = (x + 1)/x$, encuentre y simplifique cada valor.

(a) $g(2)$ (b) $g\left(\frac{1}{2}\right)$

(c) $\dfrac{g(2 + h) - g(2)}{h}$

43. Describa el dominio natural de cada función.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ (b) $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$

44. ¿Cuál de las funciones siguientes son impares? ¿Cuáles son pares? ¿Y cuáles no son pares ni impares?

(a) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$ (b) $g(x) = |\text{sen}\, x| + \cos x$

(c) $h(x) = x^3 + \text{sen}\, x$ (d) $k(x) = \dfrac{x^2 + 1}{|x| + x^4}$

45. Dibuje la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = x^2 - 1$ (b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

(c) $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

46. Suponga que f es una función par que satisface $f(x) = -1 + \sqrt{x}$ para $x \ge 0$. Dibuje la gráfica de f para $-4 \le x \le 4$.

47. Una caja abierta se fabrica cortando cuadrados, de lado x pulgadas, en cada una de las cuatro esquinas de una hoja de cartón, de 24 por 32 pulgadas, y luego doblando hacia arriba los lados. Exprese el volumen $V(x)$ en términos de x. ¿Cuál es dominio para esta función?

48. Sea $f(x) = x - 1/x$ y $g(x) = x^2 + 1$. Encuentre cada valor.

(a) $(f + g)(2)$ (b) $(f \cdot g)(2)$ (c) $(f \circ g)(2)$

(d) $(g \circ f)(2)$ (e) $f^3(-1)$

(f) $f^2(2) + g^2(2)$

49. Dibuje la gráfica de cada una de las siguientes funciones; haga uso de traslaciones.

(a) $y = \frac{1}{4}x^2$ (b) $y = \frac{1}{4}(x + 2)^2$

(c) $y = -1 + \frac{1}{4}(x + 2)^2$

50. Sea $f(x) = \sqrt{16 - x}$ y $g(x) = x^4$. ¿Cuál es el dominio de cada una de las siguientes funciones?

(a) f (b) $f \circ g$ (c) $g \circ f$

51. Escriba $F(x) = \sqrt{1 + \text{sen}^2\, x}$ como la composición de cuatro funciones, $f \circ g \circ h \circ k$.

52. Calcule cada una de las siguientes expresiones sin utilizar una calculadora.

(a) sen 570° (b) $\cos \dfrac{9\pi}{2}$

(c) $\cos\left(\dfrac{-13\pi}{6}\right)$

53. Si sen $t = 0.8$ y cos $t < 0$, determine cada valor.

(a) $\text{sen}(-t)$ (b) $\cos t$ (c) $\text{sen}\, 2t$

(d) $\tan t$ (e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$ (f) $\text{sen}(\pi + t)$

54. Escriba sen $3t$ en términos de sen t. *Sugerencia:* $3t = 2t + t$.

55. Una mosca está en el borde de una rueda que gira a una velocidad de 20 revoluciones por minuto. Si el radio de la rueda es de 9 pulgadas, ¿cuánto recorre la mosca en 1 segundo?

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

1. Resuelva las siguientes desigualdades:

(a) $1 < 2x + 1 < 5$ (b) $-3 < \frac{x}{2} < 8$

2. Resuelva las siguientes desigualdades:

(a) $14 < 2x + 1 < 15$ (b) $-3 < 1 - \frac{x}{2} < 8$

3. Resuelva $|x - 7| = 3$ para x.

4. Resuelva $|x + 3| = 2$ para x.

5. La distancia a lo largo de la recta numérica entre x y 7 es igual a 3. ¿Cuáles son los posibles valores para x?

6. La distancia a lo largo de la recta numérica entre x y 7 es igual a d. ¿Cuáles son los posibles valores para x?

7. Resuelva las siguientes desigualdades:

(a) $|x - 7| < 3$ (b) $|x - 7| \leq 3$

(c) $|x - 7| \leq 1$ (d) $|x - 7| < 0.1$

8. Resuelva las siguientes desigualdades:

(a) $|x - 2| < 1$ (b) $|x - 2| \geq 1$

(c) $|x - 2| < 0.1$ (d) $|x - 2| < 0.01$

9. ¿Cuáles son los dominios naturales de las siguientes funciones?

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ (b) $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$

10. ¿Cuáles son los dominios naturales de las siguientes funciones?

(a) $F(x) = \frac{|x|}{x}$ (b) $G(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

11. Evalúe las funciones $f(x)$ y $g(x)$ del problema 9 en los siguientes valores de x: 0, 0.9, 0.99, 0.999, 1.001, 1.01, 1.1, 2.

12. Evalúe las funciones $F(x)$ y $G(x)$ del problema 10 en los siguientes valores de x: $-1, -0.1, -0.01, -0.001, 0.001, 0.01, 0.1, 1$.

13. La distancia entre x y 5 es menor que 0.1. ¿Cuáles son los posibles valores para x?

14. La distancia entre x y 5 es menor que e, donde e es un número positivo. ¿Cuáles son los posibles valores para x?

15. Verdadero o falso. Suponga que a, x y y son números reales y n es un número natural.

(a) Para toda $x > 0$ existe una y, tal que $y > x$.

(b) Para toda $a \geq 0$ existe una n, tal que $\frac{1}{n} < a$.

(c) Para toda $a > 0$ existe una n, tal que $\frac{1}{n} < a$.

(d) Para toda circunferencia C en el plano existe una n, tal que la circunferencia C y su interior se encuentran dentro de n unidades del origen.

16. Utilice la identidad aditiva para la función seno, a fin de determinar $\operatorname{sen}(c + h)$ en términos de $\operatorname{sen} c$, $\operatorname{sen} h$, $\cos c$ y $\cos h$.

CAPÍTULO 1 Límites

1.1 Introducción a límites

Los temas estudiados en el capítulo anterior son parte de lo que se denomina *precálculo*. Proporcionan los fundamentos para el cálculo, pero no son cálculo. Ahora estamos listos para una nueva idea importante, la noción de *límite*. Ésta es la idea que distingue al cálculo de otras ramas de las matemáticas. De hecho, podríamos definir cálculo de esta manera:

El cálculo es el estudio de los límites.

Problemas que conducen al concepto de límite El concepto de **límite** es primordial para muchos problemas en física, ingeniería y ciencias sociales. Básicamente, la pregunta es ésta: ¿qué le pasa con la función $f(x)$ cuando x se acerca a alguna constante c? Existen variaciones de este tema, pero la idea básica es la misma en muchas circunstancias.

Suponga que cuando un objeto se mueve de forma constante hacia adelante conocemos su posición en cualquier momento. Denotamos la posición en el instante t por $s(t)$. ¿Qué tan rápido se está moviendo el objeto en el instante $t = 1$? Podemos utilizar la fórmula "distancias iguales a tiempos iguales" para determinar la rapidez (tasa de cambio de la posición) en cualquier intervalo de tiempo; en otras palabras

$$\text{rapidez} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

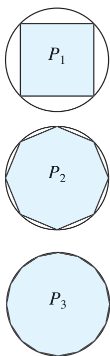


Figura 1

A esto le llamamos la rapidez "promedio" en el intervalo, ya que sin importar qué tan pequeño sea el intervalo, nunca sabemos si la rapidez es constante en este intervalo. Por ejemplo, en el intervalo [1, 2], la rapidez promedio es $\frac{s(2) - s(1)}{2 - 1}$; en el intervalo [1, 1.2], la rapidez promedio es $\frac{s(1.2) - s(1)}{1.2 - 1}$; en el intervalo [1, 1.02], la rapidez promedio es $\frac{s(1.02) - s(1)}{1.02 - 1}$, etcétera ¿Qué tan rápido viaja el objeto en el instante $t = 1$? Para dar significado a esta rapidez "instantánea" debemos hablar acerca del *límite* de la rapidez promedio en intervalos cada vez más pequeños.

Podemos determinar áreas de rectángulos y triángulos por medio de fórmulas de geometría; pero, ¿qué hay de regiones con fronteras curvas, como un círculo? Arquímedes tuvo esta idea hace más de dos mil años. Imagine polígonos regulares inscritos en un círculo, como se muestra en la figura 1. Arquímedes determinó el área de un polígono regular con n lados, y tomando el polígono cada vez con más lados fue capaz de aproximar el área de un círculo a cualquier nivel de precisión. En otras palabras, el área del círculo es el *límite* de las áreas de los polígonos inscritos cuando n (el número de lados del polígono) aumenta tanto como se quiera.

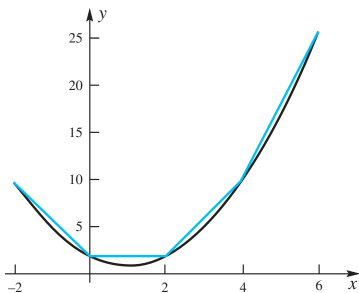


Figura 2

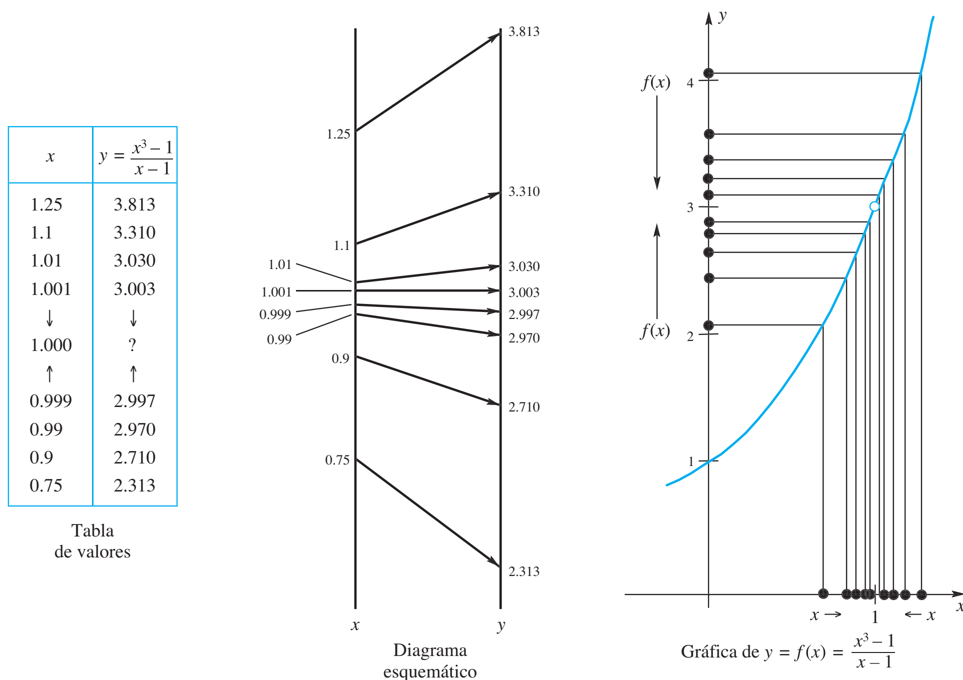
Considere la gráfica de la función $y = f(x)$, para $a \leq x \leq b$. Si la gráfica es una línea recta, la longitud de la curva es fácil de determinar mediante la fórmula de la distancia. Sin embargo, ¿qué sucede si la gráfica es curvada? Podemos determinar una gran cantidad de puntos a lo largo de la curva y conectarlos con segmentos de recta, como se muestra en la figura 2. Si sumamos las longitudes de estos segmentos de recta, debemos obtener una suma que es aproximadamente la longitud de la curva. De hecho, por "longitud de la curva" queremos decir el *límite* de la suma de las longitudes de estos segmentos de recta, cuando el número de éstos aumenta tanto como se desee.

Los últimos tres párrafos describen situaciones que conducen al concepto de *límite*. Existen muchos otros y los estudiaremos a lo largo del texto. Iniciamos con una explicación intuitiva de límites. La definición precisa se da en la siguiente sección.

Una noción intuitiva Considere la función definida por

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Observe que no está definida en $x = 1$, ya que en este punto $f(x)$ tiene la forma $\frac{0}{0}$, que carece de significado. Sin embargo, aún podemos preguntarnos qué le está sucediendo a $f(x)$ cuando x se aproxima a 1. Con mayor precisión, ¿cuando x se aproxima a 1, $f(x)$ se está aproximando a algún número específico? Para obtener la respuesta podemos hacer tres cosas: calcular algunos valores de $f(x)$ para x cercana a 1; mostrar estos valores en un diagrama esquemático, y bosquejar la gráfica de $y = f(x)$. Todo esto se ha hecho y los resultados se muestran en la figura 3.



x	$y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
1.25	3.813
1.1	3.310
1.01	3.030
1.001	3.003
↓	↓
1.000	?
↑	↑
0.999	2.997
0.99	2.970
0.9	2.710
0.75	2.313

Figura 3

Toda la información que hemos reunido parece apuntar a la misma conclusión: $f(x)$ se aproxima a 3 cuando x se aproxima a 1. En símbolos matemáticos, escribimos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Esto se lee "el límite de $(x^3 - 1)/(x - 1)$ cuando x tiende a 1 es 3".

Como buenos algebristas (es decir, conociendo cómo se factoriza una diferencia de cubos), podemos proporcionar más y mejor evidencia,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3\end{aligned}$$

Observe que $(x - 1)/(x - 1) = 1$ siempre que $x \neq 1$. Esto justifica el segundo paso. El tercer paso parece razonable; pero posteriormente se hará una justificación rigurosa.

Para asegurarnos de que estamos en el camino correcto, necesitamos tener una clara comprensión del significado de la palabra *límite*. A continuación haremos nuestro primer intento de una definición.

> **Definición** Significado intuitivo de límite
>
> Decir que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca pero diferente de c, entonces $f(x)$ está cerca de L.

Obsérvese que no pedimos nada *en* c. Incluso, la función no necesita estar definida en c, como no lo estaba en el ejemplo $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$ recién considerado. La noción de límite está asociada con el comportamiento de una función cuando x está *cerca* de c, pero no *en* c.

Seguramente, un lector cauto, objetará nuestro uso de la palabra *cerca*. ¿Qué significa *cerca*? ¿Qué tan cerca es cerca? Para precisar respuestas, tendrá que estudiar la siguiente sección; no obstante, algunos ejemplos más le ayudarán a aclarar la idea.

Más ejemplos Nuestro primer ejemplo es casi trivial aunque no menos importante.

EJEMPLO 1 Determine $\lim_{x \to 3} (4x - 5)$.

SOLUCIÓN Cuando x está cerca de 3, $4x - 5$ está cerca de $4 \cdot 3 - 5 = 7$. Escribimos

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$

■

EJEMPLO 2 Encuentre $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$.

SOLUCIÓN Observe que $(x^2 - x - 6)/(x - 3)$ no está definida en $x = 3$, pero todo está bien. Para tener una idea de lo que está sucediendo cuando x se aproxima a 3, podríamos emplear una calculadora para evaluar la expresión dada; por ejemplo, en 3.1, 3.01, 3.001, etcétera. Pero es mucho mejor utilizar un poco de álgebra para simplificar el problema.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 2) = 3 + 2 = 5$$

La cancelación de $x - 3$ en el segundo paso es válida ya que la definición de límite ignora el comportamiento *en* $x = 3$. Recuerde, $\frac{x - 3}{x - 3} = 1$ siempre que x no sea igual a 3. ■

x	$\frac{\text{sen } x}{x}$
1.0	0.84147
0.1	0.99833
0.01	0.99998
↓	↓
0	?
↑	↑
–0.01	0.99998
–0.1	0.99833
–1.0	0.84147

Figura 4

EJEMPLO 3 Determine $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$.

SOLUCIÓN Ningún truco algebraico simplificará nuestra tarea; ciertamente, no podemos cancelar las x. Una calculadora nos ayudará a tener una idea del límite. Utilice su propia calculadora (en modo de radianes) para verificar los valores en la tabla de la figura 4. La figura 5 muestra una gráfica de $y = (\text{sen } x)/x$. Nuestra conclusión, aunque admitimos que es poco firme, es que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Daremos una demostración rigurosa en la sección 1.4. ■

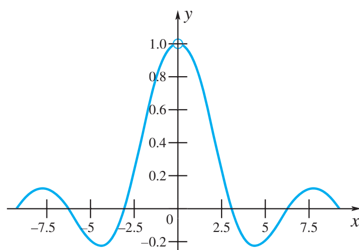


Figura 5

Algunas señales de alerta Las cosas no son tan sencillas como parecen. Las calculadoras podrían engañarnos, así como nuestra intuición. Los ejemplos que siguen sugieren algunas dificultades posibles.

x	$x^2 - \frac{\cos x}{10{,}000}$
$\pm$ 1	0.99995
$\pm$ 0.5	0.24991
$\pm$ 0.1	0.00990
$\pm$ 0.01	0.000000005
$\downarrow$	$\downarrow$
0	?

Figura 6

EJEMPLO 4 **(Su calculadora puede engañarlo).** Determine $\lim_{x\to 0}\left[x^2 - \frac{\cos x}{10{,}000}\right]$.

SOLUCIÓN Siguiendo el procedimiento utilizado en el ejemplo 3, construimos la tabla de valores que se muestra en la figura 6. La conclusión que sugiere es que el límite deseado es 0. Pero esto es incorrecto. Si recordamos la gráfica de $y = \cos x$, nos damos cuenta de que $\cos x$ se aproxima a 1 cuando x tiende a 0. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\left[x^2 - \frac{\cos x}{10{,}000}\right] = 0^2 - \frac{1}{10{,}000} = -\frac{1}{10{,}000}$$ ■

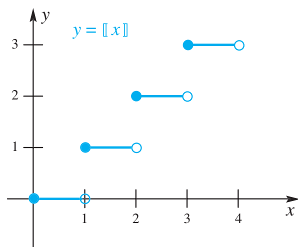


Figura 7

EJEMPLO 5 **(No hay límite en un salto).** Determine $\lim_{x\to 2}[\![x]\!]$.

SOLUCIÓN Recuerde que $[\![x]\!]$ denota al entero más grande que es menor o igual a x (véase la sección 0.5). La gráfica de $y = [\![x]\!]$ se muestra en la figura 7. Para todos los números x menores a 2, pero cercanos a 2, $[\![x]\!] = 1$, pero para todos los números x mayores que 2, pero cercanos a 2, $[\![x]\!] = 2$. ¿Está $[\![x]\!]$ cerca de un solo número L cuando x está cerca de 2? No. No importa qué número propongamos para L, habrá x arbitrariamente cercanas a 2 a cada lado, donde $[\![x]\!]$ difiere de L en al menos $\frac{1}{2}$. Nuestra conclusión es que $\lim_{x\to 2}[\![x]\!]$ no existe. Si usted verifica lo anterior, verá que no hemos afirmado que todo límite que podamos escribir deba existir. ■

EJEMPLO 6 **(Demasiadas oscilaciones).** Determine $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}(1/x)$.

SOLUCIÓN Este ejemplo plantea la interrogante más sutil acerca de límites que hayamos manifestado hasta el momento. Ya que no queremos hacer larga la historia, le pedimos que haga dos cosas. Primera, escoja una sucesión de valores para x que se aproxime a 0. Utilice su calculadora para evaluar $\operatorname{sen}(1/x)$ en estas x. A menos que corra con mucha suerte, sus valores oscilarán de manera desordenada.

Segunda, intente construir la gráfica de $y = \operatorname{sen}(1/x)$. Nadie hará esto muy bien, pero la tabla de valores en la figura 8 da una buena pista acerca de lo que está sucediendo. En cualquier vecindad alrededor del origen, la gráfica oscila de arriba abajo entre -1 y 1 un número infinito de veces (véase la figura 9). Claramente, $\operatorname{sen}(1/x)$ no está cerca de un solo número L, cuando x está cerca de cero. Concluimos que $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}(1/x)$ no existe. ■

x	$\operatorname{sen}\frac{1}{x}$
$2/\pi$	1
$2/(2\pi)$	0
$2/(3\pi)$	-1
$2/(4\pi)$	0
$2/(5\pi)$	1
$2/(6\pi)$	0
$2/(7\pi)$	-1
$2/(8\pi)$	0
$2/(9\pi)$	1
$2/(10\pi)$	0
$2/(11\pi)$	-1
$2/(12\pi)$	0
$\downarrow$	$\downarrow$
0	?

Figura 8

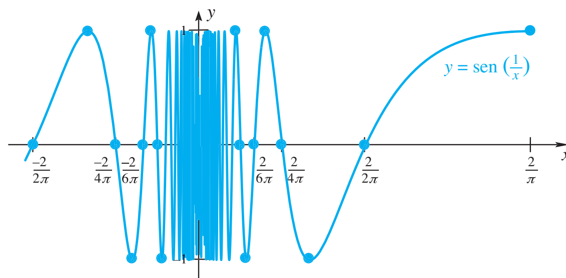


Figura 9

Límites laterales Cuando una función da un salto (como lo hace $[\![x]\!]$ en cada entero en el ejemplo 5), entonces el límite no existe en los puntos de salto. Para tales funciones, se introduce el concepto de **límites laterales**. El símbolo $x \to c^+$ significa que x se aproxima a c por la derecha, y $x \to c^-$ significa que x se aproxima a c por la izquierda.

Definición Límites por la derecha y por la izquierda

Decir que $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca pero a la derecha de c, entonces $f(x)$ está cerca de L. De manera análoga, decir que $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca pero a la izquierda de c, entonces $f(x)$ está cerca de L.

Por lo tanto, mientras que $\lim_{x \to 2} [\![x]\!]$ no existe, es correcto escribir (véase la gráfica en la figura 7)

$$\lim_{x \to 2^-} [\![x]\!] = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} [\![x]\!] = 2$$

Creemos que usted encontrará muy razonable el siguiente teorema.

Teorema A

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$.

La figura 10 debe darle una comprensión adicional. Dos de los límites no existen, aunque todos, excepto uno de los límites unilaterales, existen.

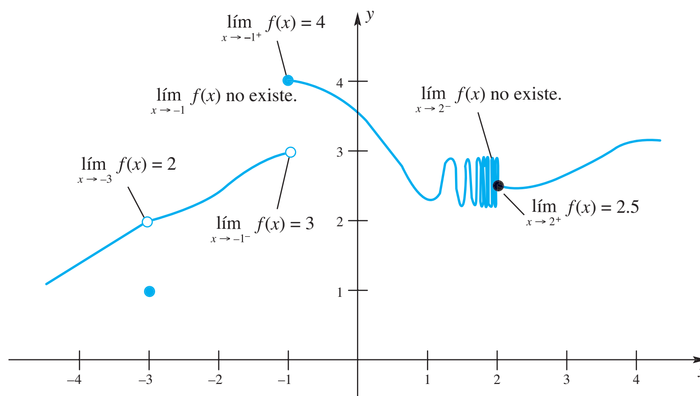


Figura 10

Revisión de conceptos

1. $\lim_{x \to c} f(x) = L$ significa que $f(x)$ está cerca de _____, cuando x está suficientemente cerca (pero es diferente) de _____.

2. Sea $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ donde $f(3)$ está indeterminada. Sin embargo, $\lim_{x \to 3} f(x) =$ _____.

3. $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ significa que $f(x)$ está cerca de _____ cuando x se aproxima a c por la _____.

4. Si $\lim_{x \to c^-} f(x) = M$ y $\lim_{x \to c^+} f(x) = M$, entonces _____.

Conjunto de problemas 1.1

En los problemas del 1 al 6 determine el límite que se indica.

1. $\lim_{x \to 3} (x - 5)$

2. $\lim_{t \to -1} (1 - 2t)$

3. $\lim_{x \to -2} (x^2 + 2x - 1)$

4. $\lim_{x \to -2} (x^2 + 2t - 1)$

5. $\lim_{t \to -1} (t^2 - 1)$

6. $\lim_{t \to -1} (t^2 - x^2)$

En los problemas del 7 al 18 determine el límite que se indica. En la mayoría de los casos, es buena idea usar primero un poco de álgebra (véase el ejemplo 2).

7. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

8. $\lim_{t \to -7} \frac{t^2 + 4t - 21}{t + 7}$

9. $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x + 1}$

10. $\lim_{x \to 0} \frac{x^4 + 2x^3 - x^2}{x^2}$

11. $\lim_{x \to -t} \frac{x^2 - t^2}{x + t}$

12. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

13. $\lim_{t \to 2} \frac{\sqrt{(t + 4)(t - 2)^4}}{(3t - 6)^2}$

14. $\lim_{t \to 7^+} \frac{\sqrt{(t - 7)^3}}{t - 7}$

15. $\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 18x^2 + 81}{(x - 3)^2}$

16. $\lim_{u \to 1} \frac{(3u + 4)(2u - 2)^3}{(u - 1)^2}$

17. $\lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^2 - 4}{h}$

18. $\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

GC *En los problemas del 19 al 28 utilice una calculadora para encontrar el límite indicado. Utilice una calculadora gráfica para trazar la función cerca del punto límite.*

19. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x}$

20. $\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{2t}$

21. $\lim_{x \to 0} \frac{(x - \operatorname{sen} x)^2}{x^2}$

22. $\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^2}$

23. $\lim_{t \to 1} \frac{t^2 - 1}{\operatorname{sen}(t - 1)}$

24. $\lim_{x \to 3} \frac{x - \operatorname{sen}(x - 3) - 3}{x - 3}$

25. $\lim_{x \to \pi} \frac{1 + \operatorname{sen}(x - 3\pi/2)}{x - \pi}$

26. $\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cot t}{1/t}$

27. $\lim_{x \to \pi/4} \frac{(x - \pi/4)^2}{(\tan x - 1)^2}$

28. $\lim_{u \to \pi/2} \frac{2 - 2 \operatorname{sen} u}{3u}$

29. Para la función *f* que se grafica en la figura 11 determine el límite que se indica o el valor de la función, o establezca que el límite o el valor de la función no existe.

(a) $\lim_{x \to -3} f(x)$ (b) $f(-3)$ (c) $f(-1)$

(d) $\lim_{x \to -1} f(x)$ (e) $f(1)$ (f) $\lim_{x \to 1} f(x)$

(g) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (h) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ (i) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$

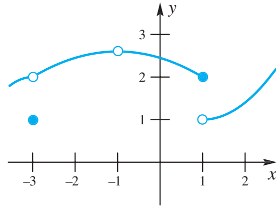


Figura 11

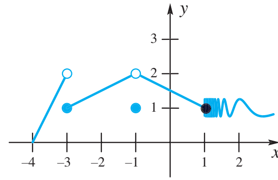


Figura 12

30. Siga las instrucciones del problema 29 para la función que se grafica en la figura 12.

31. Para la función que se grafica en la figura 13 determine el límite que se indica o el valor de la función, o bien, indique que no existe.

(a) $f(-3)$ (b) $f(3)$ (c) $\lim_{x \to -3^-} f(x)$

(d) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$ (e) $\lim_{x \to -3} f(x)$ (f) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

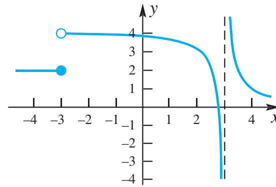


Figura 13

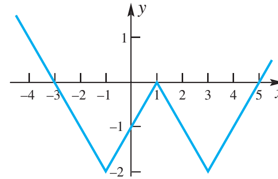


Figura 14

32. Para la función que se grafica en la figura 14 determine el límite que se indica o el valor de la función, o indique que no existe.

(a) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to -1} f(x)$

(d) $f(-1)$ (e) $\lim_{x \to 1} f(x)$ (f) $f(1)$

33. Bosqueje la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 + x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Luego determine cada uno de los siguientes o establezca que no existen.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 1} f(x)$

(c) $f(1)$ (d) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

34. Bosqueje la gráfica de

$$g(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 5 - x^2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Después determine cada uno de los siguientes o establezca que no existen.

(a) $\lim_{x \to 1} g(x)$ (b) $g(1)$

(c) $\lim_{x \to 2} g(x)$ (d) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$

35. Bosqueje la gráfica de $f(x) = x - [\![x]\!]$; luego encuentre cada uno de los siguientes o establezca que no existen.

(a) $f(0)$ (b) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 1/2} f(x)$

36. Siga las instrucciones del problema 35 para $f(x) = x/|x|$.

37. Determine $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1)/|x - 1|$ o establezca que no existe.

38. Evalúe $\lim_{x \to 0} \left(\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}\right)/x$. *Sugerencia:* racionalice el numerador multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt{x + 2} + \sqrt{2}$.

39. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ -x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Determine cada valor, si es posible.

(a) $\lim_{x \to 1} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0} f(x)$

40. Bosqueje, como mejor pueda, la gráfica de una función *f* que satisfaga todas las condiciones siguientes.

(a) Su dominio es el intervalo $[0, 4]$.

(b) $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1$

(c) $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ (d) $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$

(e) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$ (f) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 1$

41. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ x^4 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

¿Para qué valores de *a* existe $\lim_{x \to a} f(x)$?

42. La función $f(x) = x^2$ ha sido cuidadosamente graficada, pero durante la noche un visitante misterioso cambió los valores de *f* en un millón de lugares diferentes. ¿Esto afecta al valor de $\lim_{x \to a} f(x)$ en alguna *a*? Explique.

43. Determine cada uno de los siguientes límites o establezca que no existen.

(a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$ (b) $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$

(c) $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - |x - 1| - 1}{|x - 1|}$ (d) $\lim_{x \to 1^-} \left[\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{|x - 1|}\right]$

44. Determine cada uno de los siguientes límites o establezca que no existen.

(a) $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x - [\![x]\!]}$ (b) $\lim_{x \to 0^+} [\![1/x]\!]$

(c) $\lim_{x \to 0^+} x(-1)^{[\![1/x]\!]}$ (d) $\lim_{x \to 0^+} [\![x]\!](-1)^{[\![1/x]\!]}$

45. Determine cada uno de los siguientes límites o establezca que no existen.

(a) $\lim_{x \to 0^+} x[\![1/x]\!]$ (b) $\lim_{x \to 0^+} x^2[\![1/x]\!]$

(c) $\lim_{x \to 3^-} ([\![x]\!] + [\![-x]\!])$ (d) $\lim_{x \to 3^+} ([\![x]\!] + [\![-x]\!])$

46. Determine cada uno de los siguientes límites o establezca que no existen.

(a) $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]/x$ (b) $\lim_{x \to 0^+} [\![x]\!]/x$

(c) $\lim_{x \to 1.8} [\![x]\!]$ (d) $\lim_{x \to 1.8} [\![x]\!]/x$

CAS *Muchos paquetes de software tienen programas para calcular límites, aunque usted debe ser cuidadoso porque no son infalibles. Para adquirir confianza en su programa, utilícelo para volver a calcular algunos límites en los problemas del 1 al 28. Después para cada uno de los siguientes determine el límite o establezca que no existe.*

47. $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$ **48.** $\lim_{x \to 0^+} x^x$

49. $\lim_{x \to 0} \sqrt{|x|}$ **50.** $\lim_{x \to 0} |x|^x$

51. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen} 2x)/4x$

52. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen} 5x)/3x$

53. $\lim\limits_{x\to 0}\cos(1/x)$

54. $\lim\limits_{x\to 0}x\cos(1/x)$

55. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{2x+2}-2}$

56. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}(x^2)}$

57. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-x-2}{|x-2|}$

58. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{1+2^{1/(x-1)}}$

CAS **59.** Como los paquetes de software para cálculo encuentran $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ por medio de un muestreo de algunos valores de $f(x)$ para x cerca de a, pueden estar equivocados. Determine una función f para la que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no exista, pero por la que su software obtenga un valor para el límite.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $L; c$ **2.** 6 **3.** L; derecha **4.** $\lim\limits_{x\to c} f(x) = M$

1.2 Estudio riguroso (formal) de límites

En la sección anterior dimos una definición informal de *límite*. A continuación damos otra ligeramente mejor, pero todavía informal, reformulando esa definición. Decir que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ significa que $f(x)$ puede hacerse tan cercana como se desee a L siempre que x sea suficientemente cercana, pero no igual a c. El primer ejemplo ilustra este punto.

EJEMPLO 1 Utilice la gráfica de $y = f(x) = 3x^2$ para determinar qué tan cercana debe estar x de 2 para garantizar que $f(x)$ esté a no menos de 0.05 de 12.

SOLUCIÓN Para que $f(x)$ esté a menos de 0.05 de 12, debemos tener $11.95 < f(x) < 12.05$. En la figura 1 se dibujaron las rectas $y = 11.95$ y $y = 12.05$. Si despejamos x de $y = 3x^2$, obtenemos $x = \sqrt{y/3}$. Por lo tanto, $f\left(\sqrt{11.95/3}\right) = 11.95$ y $f\left(\sqrt{12.05/3}\right) = 12.05$. La figura 1 indica que si $\sqrt{11.95/3} < x < \sqrt{12.05/3}$ entonces $f(x)$ satisface $11.95 < f(x) < 12.05$. Este intervalo para x es aproximadamente $1.99583 < x < 2.00416$. De los dos extremos de este intervalo, el más cercano a 2 es el superior, 2.00416, y se encuentra a 0.00416 de 2. Por lo tanto, si x está a menos de 0.00416 de 2, entonces $f(x)$ está a menos de 0.05 de 12. ■

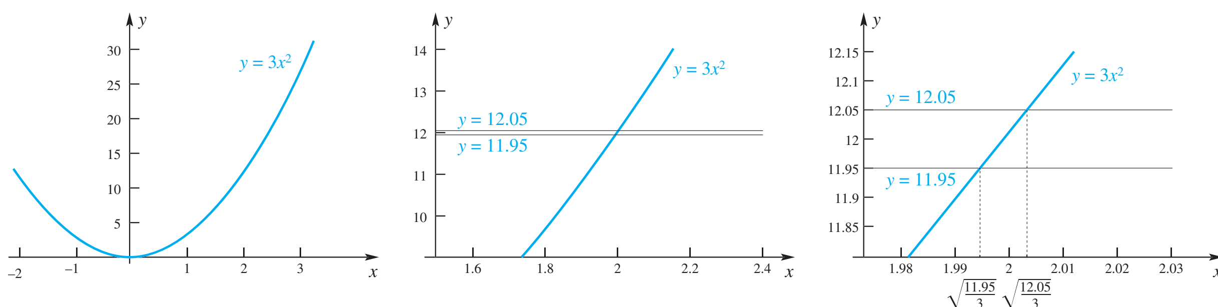


Figura 1

El valor absoluto como distancia

Considere dos puntos a y b en la recta numérica. ¿Cuál es la distancia entre ellos? Si $a < b$, entonces $b - a$ es la distancia; pero si $b < a$, entonces la distancia es $a - b$. Podemos combinar estos enunciados en uno y decir que la distancia es $|b - a|$. Esta interpretación geométrica del valor absoluto de una diferencia, como la distancia entre dos puntos en una recta numérica, es importante en la comprensión de nuestra definición del límite.

Si ahora preguntamos qué tan cerca debe estar x de 2 para garantizar que $f(x)$ esté a menos de 0.01 de 12, la solución seguiría las mismas líneas y determinaríamos que x tendría que estar en un intervalo más pequeño al que se obtuvo anteriormente. Si queremos que $f(x)$ esté a menos de 0.001 de 12, necesitaríamos un intervalo que fuese aún más angosto. En este ejemplo, parece plausible que no importa cuán cercano queramos que $f(x)$ esté de 12, podemos realizar esto tomando x suficientemente cercana a 2.

Ahora precisamos la definición de límite.

Precisando la definición Seguimos la tradición al utilizar las letras griegas ε (épsilon) y δ (delta) para representar números positivos arbitrarios (por lo regular pequeños).

Decir que $f(x)$ difiere de L en menos que ε, significa que $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, o de forma equivalente, $|f(x) - L| < \varepsilon$. Esto significa que $f(x)$ se encuentra en el intervalo abierto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, como se muestra en la gráfica de la figura 2.

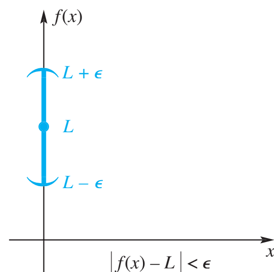


Figura 2

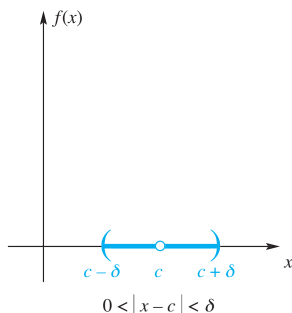


Figura 3

Ahora, decir que x está suficientemente cerca pero diferente de c es decir que, para alguna δ, x pertenece al intervalo abierto $(c - \delta, c + \delta)$, con c eliminado de éste. Tal vez la mejor forma de decir esto es escribir

$$0 < |x - c| < \delta$$

Obsérvese que $|x - c| < \delta$ describiría al intervalo $c - \delta < x < c + \delta$, mientras que $0 < |x - c|$ requiere que se excluya $x = c$. El intervalo que estamos describiendo se muestra en la figura 3.

Ahora estamos preparados para lo que algunas personas han denominado la definición más importante del cálculo.

Definición **Significado preciso de límite**

Decir que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ dada (no importa qué tan pequeña) existe una correspondiente $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, siempre que $0 < |x - c| < \delta$; esto es,

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Las gráficas de la figura 4 pueden ayudarle a comprender esta definición.

Debemos recalcar que el número real ε se debe dar *primero*; el número δ debe producirse y por lo regular depende de ε. Supóngase que David desea demostrar a Emilia que $\lim_{x \to c} f(x) = L$. Emilia puede retar a David con cualquier ε particular que

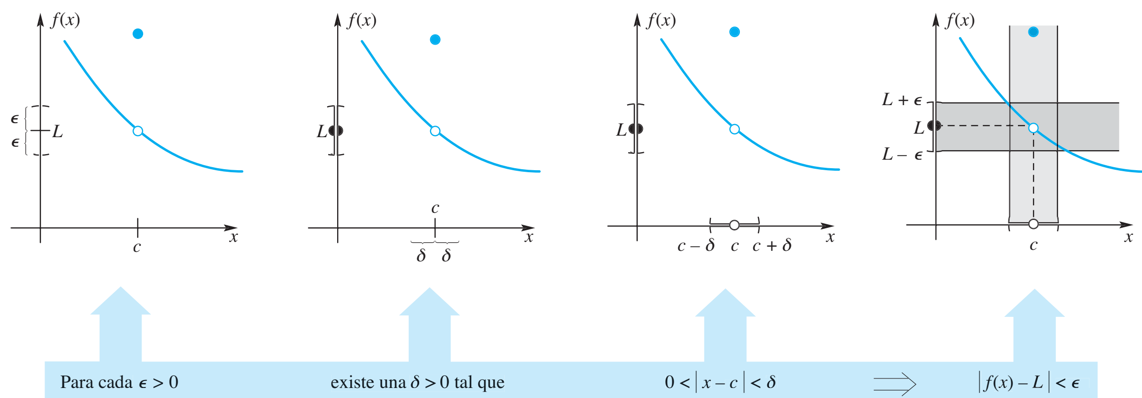


Figura 4

ella elija (por ejemplo, $\varepsilon = 0.01$) y pedir a David que obtenga una δ correspondiente. Apliquemos el razonamiento de David al límite $\lim_{x \to 3}(2x + 1)$. Por inspección, David conjeturaría que el límite es 7. Ahora, ¿podrá David determinar una δ tal que $|(2x + 1) - 7| < 0.01$ siempre que $0 < |x - 3| < \delta$? Un poco de álgebra muestra que

$$|(2x + 1) - 7| < 0.01 \Leftrightarrow 2|x - 3| < 0.01$$

$$\Leftrightarrow |x - 3| < \frac{0.01}{2}$$

Por lo tanto, la respuesta a la pregunta es ¡sí! David puede elegir $\delta = 0.01/2$ (o cualquier valor más pequeño) y esto garantizará que $|(2x + 1) - 7| < 0.01$ siempre que $0 < |x - 3| < 0.01/2$. En otras palabras, David puede hacer que $2x + 1$ esté a menos de 0.01 de 7, siempre que x esté a menos de 0.01/2 de 3.

Ahora, supóngase que Emilia reta a David de nueva cuenta, pero esta vez ella quiere que $|(2x + 1) - 7| < 0.000002$. ¿Podrá encontrar David una δ para este valor de ε? Siguiendo el razonamiento usado anteriormente,

$$|(2x + 1) - 7| < 0.000002 \Leftrightarrow 2|x - 3| < 0.000002$$
$$\Leftrightarrow |x - 3| < \frac{0.000002}{2}$$

Por lo tanto, $|(2x + 1) - 7| < 0.000002$ siempre que $|x - 3| < 0.000002/2$.

Esta clase de razonamiento, aunque podría convencer un poco, no es una prueba de que el límite sea 7. La definición dice que debe ser capaz de encontrar una δ para *toda* $\varepsilon > 0$ (no para *alguna* ε). Emilia podría retar continuamente a David, pero ambos nunca *demostrarían* que el límite es 7. David debe ser capaz de obtener una δ para *toda* ε positiva (sin importar qué tan pequeña sea).

David opta por tomar las cosas en sus manos y propone que ε sea cualquier número real positivo. Entonces sigue el mismo razonamiento como antes, pero esta vez utiliza ε en lugar de 0.000002.

$$|(2x + 1) - 7| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - 3| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$$

David puede elegir $\delta = \varepsilon/2$ y se deduce que $|(2x + 1) - 7| < \varepsilon$ siempre que $|x - 3| < \varepsilon/2$. En otras palabras, puede hacer que $2x + 1$ esté a menos de ε de 7 siempre que x esté a menos de $\varepsilon/2$ de 3. Ahora David tiene los requerimientos de la definición de límite y por lo tanto ha verificado que el límite es 7, como lo sospechaba.

¿Dos límites distintos?
Una pregunta natural es: "¿una función puede tener dos límites distintos en c?". La respuesta intuitiva obvia es no. Si una función se aproxima cada vez más a L, cuando $x \to c$, no puede acercarse también cada vez más a un número diferente M. En el problema 23 se le pide que demuestre esto de manera rigurosa.

Algunas demostraciones de límites En cada uno de los siguientes ejemplos empezamos con lo que denominamos un análisis preliminar. Lo incluimos para que nuestra elección de δ, en cada prueba, no parezca sugerir una increíble perspicacia de nuestra parte. Muestra la clase de trabajo que usted necesita hacer en borrador para determinar la ruta correcta a lo largo de la prueba. Una vez que usted sienta que comprende un ejemplo, véalo otra vez, pero oculte el análisis preliminar y note qué elegante, aunque misteriosa, parece ser la prueba.

EJEMPLO 2 Demuestre que $\lim_{x \to 4}(3x - 7) = 5$.

ANÁLISIS PRELIMINAR Sea ε cualquier número positivo. Debemos producir una $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |(3x - 7) - 5| < \varepsilon$$

Considere la desigualdad de la derecha

$$|(3x - 7) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 12| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |3(x - 4)| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |3||(x - 4)| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |x - 4| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Ahora vemos cómo elegir δ; esto es, $\delta = \varepsilon/3$. Por supuesto, cualquier δ más pequeña funcionaría.

DEMOSTRACIÓN FORMAL Sea $\varepsilon > 0$ dada. Seleccione $\delta = \varepsilon/3$. Entonces $0 < |x - 4| < \delta$ implica que

$$|(3x - 7) - 5| = |3x - 12| = |3(x - 4)| = 3|x - 4| < 3\delta = \varepsilon$$

Si usted lee esta cadena de igualdades y una desigualdad, de izquierda a derecha, y utiliza las propiedades transitivas de $=$ y $<$, usted ve que

$$|(3x - 7) - 5| < \varepsilon$$

Ahora David conoce una regla para elegir el valor de δ dada en el reto de Emilia. Si Emilia hubiera retado a David con $\varepsilon = 0.01$, entonces David respondería con $\delta = 0.01/3$. Si Emilia dijese $\varepsilon = 0.000003$, entonces David diría $\delta = 0.000001$. Si él diese un valor más pequeño para δ, también estaría bien.

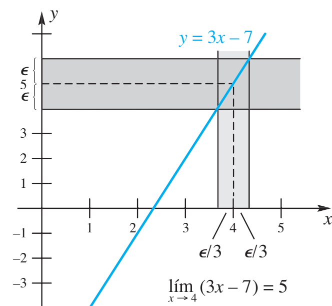


Figura 5

Por supuesto, si considera la gráfica de $y = 3x - 7$ (una recta con pendiente 3, como en la figura 5), sabe que para forzar a que $3x - 7$ esté cerca de 5 tendría que hacer a x aún más próximo a 4 (más cercano por un factor de un tercio). ■

Mire la figura 6 y convénzase de que $\delta = 2\varepsilon$ sería una elección apropiada para δ en la demostración de que $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 5$.

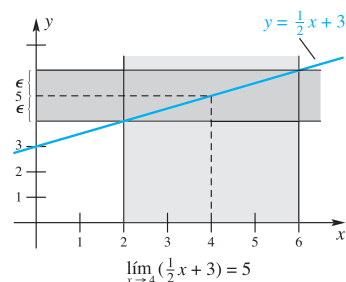


Figura 6

EJEMPLO 3 Demuestre que $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$.

ANÁLISIS PRELIMINAR Estamos buscando una δ tal que

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5\right| < \varepsilon$$

Ahora, para $x \neq 2$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5\right| < \varepsilon &\Leftrightarrow \left|\frac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2} - 5\right| < \varepsilon\\ &\Leftrightarrow |(2x + 1) - 5| < \varepsilon\\ &\Leftrightarrow |2(x - 2)| < \varepsilon\\ &\Leftrightarrow |2||x - 2| < \varepsilon\\ &\Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Esto indica que $\delta = \varepsilon/2$ funcionará (véase la figura 7)

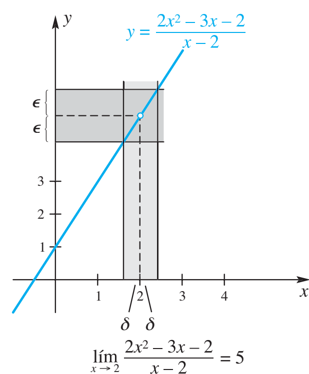


Figura 7

DEMOSTRACIÓN FORMAL Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos $\delta = \varepsilon/2$. Entonces $0 < |x - 2| < \delta$ implica que

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5\right| &= \left|\frac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2} - 5\right| = |2x + 1 - 5|\\ &= |2(x - 2)| = 2|x - 2| < 2\delta = \varepsilon\end{aligned}$$

La cancelación del factor $x - 2$ es válida porque $0 < |x - 2|$ implica que $x \neq 2$, y $\dfrac{x - 2}{x - 2} = 1$ siempre que $x \neq 2$. ■

EJEMPLO 4 Demuestre que $\lim\limits_{x\to c}(mx + b) = mc + b$.

ANÁLISIS PRELIMINAR Queremos encontrar una δ tal que

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |(mx + b) - (mc + b)| < \varepsilon$$

Ahora

$$|(mx + b) - (mc + b)| = |mx - mc| = |m(x - c)| = |m||x - c|$$

Parece que $\delta = \varepsilon/|m|$ funciona, con tal que $m \neq 0$. (Observe que m podría ser positiva o negativa, así que necesitamos conservar las barras de valor absoluto. Del capítulo 0 recuerde que $|ab| = |a||b|$).

DEMOSTRACIÓN FORMAL Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos $\delta = \varepsilon/|m|$. Entonces $0 < |x - c| < \delta$ implica que

$$|(mx + b) - (mc + b)| = |mx - mc| = |m||x - c| < |m|\delta = \varepsilon$$

Y en caso de que $m = 0$, cualquier δ funcionará bien ya que

$$|(0x + b) - (0c + b)| = |0| = 0$$

Esto último es menor que ε para toda x. ■

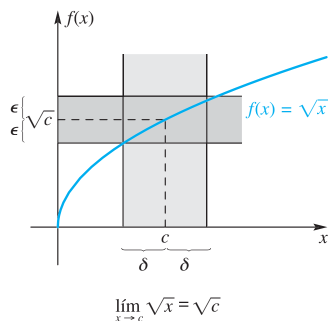


Figura 8

EJEMPLO 5 Demuestre que si $c > 0$ entonces $\lim\limits_{x\to c}\sqrt{x} = \sqrt{c}$.

ANÁLISIS PRELIMINAR Con respecto a la figura 8, debemos determinar una δ tal que

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{c}| < \varepsilon$$

Ahora

$$|\sqrt{x} - \sqrt{c}| = \left|\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{c})(\sqrt{x} + \sqrt{c})}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}\right| = \left|\frac{x - c}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}\right|$$

$$= \frac{|x - c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \le \frac{|x - c|}{\sqrt{c}}$$

Para hacer lo último menor que ε se requiere que tengamos $|x - c| < \varepsilon\sqrt{c}$.

DEMOSTRACIÓN FORMAL Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos a $\delta = \varepsilon\sqrt{c}$. Entonces $0 < |x - c| < \delta$ implica que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{c}| = \left|\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{c})(\sqrt{x} + \sqrt{c})}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}\right| = \left|\frac{x - c}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}\right|$$

$$= \frac{|x - c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \le \frac{|x - c|}{\sqrt{c}} < \frac{\delta}{\sqrt{c}} = \varepsilon$$

Aquí hay un punto técnico. Empezamos con $c > 0$, pero podría suceder que c esté muy cercano a 0 sobre el eje x. Deberíamos insistir en que $\delta \le c$, para que entonces $|x - c| < \delta$ implique que $x > 0$, de modo que $\sqrt{x}$ esté definida. Así, para un rigor absoluto, elegimos δ como el más pequeño entre c y $\varepsilon\sqrt{c}$. ■

Nuestra demostración en el ejemplo 5 depende de la *racionalización del numerador*, un truco que con frecuencia es útil en cálculo.

EJEMPLO 6 Demuestre que $\lim_{x \to 3}(x^2 + x - 5) = 7$.

ANÁLISIS PRELIMINAR Nuestra tarea es encontrar una δ tal que

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(x^2 + x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Ahora

$$|(x^2 + x - 5) - 7| = |x^2 + x - 12| = |x + 4||x - 3|$$

El factor $|x - 3|$ puede hacerse tan pequeño como queramos y sabemos que $|x + 4|$ estará alrededor de 7. Por lo tanto, buscamos una cota superior para $|x + 4|$. Para hacer esto, primero convenimos en hacer $\delta \le 1$. Entonces $|x - 3| < \delta$ implica que

$$\begin{aligned} |x + 4| &= |x - 3 + 7| \\ &\le |x - 3| + |7| \qquad \text{(desigualdad del triángulo)} \\ &< 1 + 7 = 8 \end{aligned}$$

(La figura 9 ofrece una demostración alternativa de este hecho). Si también requerimos que $\delta \le \varepsilon/8$, entonces el producto $|x + 4||x - 3|$ será menor que ε.

$$\begin{aligned} |x - 3| < 1 &\Rightarrow 2 < x < 4 \\ &\Rightarrow 6 < x + 4 < 8 \\ &\Rightarrow |x + 4| < 8 \end{aligned}$$

Figura 9

DEMOSTRACIÓN FORMAL Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos a $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/8\}$; esto es, elegimos a δ como el más pequeño entre 1 y $\varepsilon/8$. Entonces $0 < |x - 3| < \delta$ implica que

$$|(x^2 + x - 5) - 7| = |x^2 + x - 12| = |x + 4||x - 3| < 8 \cdot \frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon$$ ■

EJEMPLO 7 Demuestre que $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$.

DEMOSTRACIÓN Reproducimos la demostración en el ejemplo 6. Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos como $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/(1 + 2|c|)\}$. Entonces $0 < |x - c| < \delta$ implica que

$$\begin{aligned} |x^2 - c^2| &= |x + c||x - c| = |x - c + 2c||x - c| \\ &\le (|x - c| + 2|c|)|x - c| \qquad \text{(Desigualdad del triángulo)} \\ &< (1 + 2|c|)|x - c| < \frac{(1 + 2|c|) \cdot \varepsilon}{1 + 2|c|} = \varepsilon \end{aligned}$$ ■

Aunque parezca increíblemente perspicaz, en el ejemplo 7 no sacamos a δ "de la manga". Simplemente, esta vez no le mostramos el análisis preliminar.

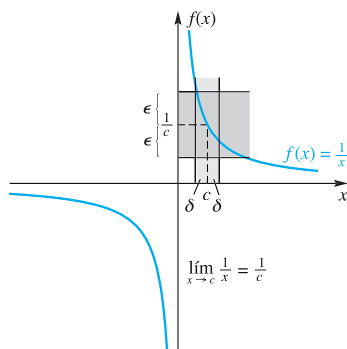


Figura 10

EJEMPLO 8 Demuestre que $\lim\limits_{x\to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$, $c \neq 0$.

ANÁLISIS PRELIMINAR Estudie la figura 10. Debemos determinar una δ tal que

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| < \varepsilon$$

Ahora

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{c - x}{xc}\right| = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{1}{|c|} \cdot |x - c|$$

El factor $1/|x|$ es problemático, en especial si x está cerca de cero. Podemos acotar este factor si podemos mantener a x alejado de 0. Con ese fin, observe que

$$|c| = |c - x + x| \leq |c - x| + |x|$$

de modo que

$$|x| \geq |c| - |x - c|$$

Por lo tanto, si elegimos $\delta \leq |c|/2$, tenemos éxito en hacer $|x| \geq |c|/2$. Por último, si también pedimos que $\delta \leq \varepsilon c^2/2$, entonces

$$\frac{1}{|x|} \cdot \frac{1}{|c|} \cdot |x - c| < \frac{1}{|c|/2} \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \frac{\varepsilon c^2}{2} = \varepsilon$$

DEMOSTRACIÓN FORMAL Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos $\delta = \text{mín}\{|c|/2, \varepsilon c^2/2\}$. Entonces $0 < |x - c| < \delta$ implica que

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{c - x}{xc}\right| = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{1}{|c|} \cdot |x - c| < \frac{1}{|c|/2} \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \frac{\varepsilon c^2}{2} = \varepsilon$$ ■

Límites unilaterales No se necesita mucha imaginación para dar las definiciones ε–δ del límite por la derecha y del límite por la izquierda.

Definición **Límite por la derecha**

Decir que $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe una correspondiente $\delta > 0$, tal que

$$0 < x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Al lector le dejamos la definición ε–δ para el límite por la izquierda. (Véase el problema 5).

El concepto ε–δ presentado en esta sección es probablemente el tema más intrincado y elusivo en un curso de cálculo. Le podría tomar algún tiempo entender este concepto, pero vale la pena. El cálculo es el estudio de límites, de modo que una clara comprensión del concepto de límite es una meta valiosa.

Por lo regular, el descubrimiento del cálculo se atribuye a Isaac Newton (1642–1727) y a Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), quienes trabajaron de manera independiente a finales de 1600. Aunque Newton y Leibniz, junto con sus sucesores, descubrieron muchas propiedades del cálculo y se encontró que tiene muchas aplicaciones en las ciencias físicas, no fue sino hasta el siglo XIX que se propuso una definición precisa de un límite. Augustin Louis Cauchy (1789–1857), un ingeniero y matemático francés, dio esta definición: "Si los valores sucesivos atribuidos a la misma variable que se aproxima indefinidamente a un valor fijo, tal que ellos finalmente difieren de él por tan poco como uno quiera, este último es llamado el límite de todos los demás." Incluso Cauchy, un maestro del rigor, fue un poco vago en su definición de límite. ¿Qué significa "valores sucesivos"? ¿Qué significa "finalmente difieren"? La frase "finalmente difieren de él por tan poco como uno quiera" contiene la semilla de la definición ε–δ,

pues indica que la diferencia entre $f(x)$ y su límite L puede hacerse más pequeña que cualquier número dado, el número que fue etiquetado como ε. El matemático alemán Karl Weierstrass (1815–1897) fue el primero en reunir la definición que es equivalente a nuestra definición $\varepsilon-\delta$ de límite.

Revisión de conceptos

1. La desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$ es equivalente a _____ $< f(x) <$ _____.

2. El significado preciso de $\lim_{x\to a} f(x) = L$ es éste: dado cualquier número positivo ε existe un correspondiente número positivo δ, tal que ______ implica ______.

3. Para asegurar que $|3x - 3| < \varepsilon$, requeriríamos que $|x - 1| <$ _____.

4. $\lim_{x\to a}(mx + b) =$ _____.

Conjunto de problemas 1.2

En los problemas del 1 al 6 dé la definición $\varepsilon-\delta$ apropiada para cada proposición.

1. $\lim_{t\to a} f(t) = M$

2. $\lim_{u\to b} g(u) = L$

3. $\lim_{z\to d} h(z) = P$

4. $\lim_{y\to e} \phi(y) = B$

5. $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$

6. $\lim_{t\to a^+} g(t) = D$

En los problemas del 7 al 10 trace la función $f(x)$ en el intervalo [1.5, 2.5]. *Haga un acercamiento a la gráfica de cada función para determinar qué tan cercano debe estar* x *de 2 para que $f(x)$ esté a menos de 0.002 de 4. Su respuesta debe ser de la forma "si* x *está a menos de _____ de 2, entonces $f(x)$ está a menos de 0.002 de 4".*

7. $f(x) = 2x$

8. $f(x) = x^2$

9. $f(x) = \sqrt{8x}$

10. $f(x) = \dfrac{8}{x}$

En los problemas del 11 al 22 proporcione una prueba $\varepsilon-\delta$ para cada límite dado.

11. $\lim_{x\to 0}(2x - 1) = -1$

12. $\lim_{x\to -21}(3x - 1) = -64$

13. $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$

14. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{2x^2 - x}{x}\right) = -1$

15. $\lim_{x\to 5}\dfrac{2x^2 - 11x + 5}{x - 5} = 9$

16. $\lim_{x\to 1}\sqrt{2x} = \sqrt{2}$

17. $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x - 3}} = \sqrt{7}$

18. $\lim_{x\to 1}\dfrac{14x^2 - 20x + 6}{x - 1} = 8$

19. $\lim_{x\to 1}\dfrac{10x^3 - 26x^2 + 22x - 6}{(x - 1)^2} = 4$

20. $\lim_{x\to 1}(2x^2 + 1) = 3$

21. $\lim_{x\to -1}(x^2 - 2x - 1) = 2$

22. $\lim_{x\to 0} x^4 = 0$

23. Demuestre que si $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} f(x) = M$, entonces $L = M$.

24. Sean F y G funciones tales que $0 \le F(x) \le G(x)$ para toda x cercana a c, excepto posiblemente en c. Demuestre que si $\lim_{x\to c} G(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to c} F(x) = 0$.

25. Demuestre que $\lim_{x\to 0} x^4 \operatorname{sen}^2(1/x) = 0$. *Sugerencia:* utilice los problemas 22 y 24.

26. Demuestre que $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$.

27. Considerando los límites por la derecha y por la izquierda, demuestre que $\lim_{x\to 0}|x| = 0$.

28. Demuestre que si $|f(x)| < B$ para $|x - a| < 1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ entonces $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

29. Suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y que $f(a)$ existe (aunque podría ser diferente de L). Demuestre que f está acotada en algún intervalo que contiene a a; esto es, demuestre que existen un intervalo (c, d) con $c < a < d$ y una constante M, tal que $|f(x)| \le M$ para toda x en (c, d).

30. Demuestre que si $f(x) \le g(x)$ para toda x en algún intervalo alrededor de a, al cual se le quite a, y si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces $L \le M$.

31. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son equivalentes a la definición de límite?

(a) Para algún $\varepsilon > 0$ y toda $\delta > 0$, $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

(b) Para toda $\delta > 0$, existe una correspondiente $\varepsilon > 0$ tal que

$$0 < |x - c| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \delta$$

(c) Para todo entero positivo N existe un entero correspondiente positivo M, tal que $0 < |x - c| < 1/M \Rightarrow |f(x) - L| < 1/N$.

(d) Para toda $\varepsilon > 0$, existe una correspondiente $\delta > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta$ y $|f(x) - L| < \varepsilon$ para alguna x.

32. En lenguaje $\varepsilon-\delta$ qué significa decir $\lim_{x\to c} f(x) \ne L$.

GC **33.** Suponga que deseamos dar una demostración con $\varepsilon-\delta$ de que

$$\lim_{x\to 3}\frac{x + 6}{x^4 - 4x^3 + x^2 + x + 6} = -1$$

Empezamos por escribir $\dfrac{x + 6}{x^4 - 4x^3 + x^2 + x + 6} + 1$ en la forma $(x - 3)g(x)$.

(a) Determine $g(x)$.

(b) ¿Podríamos elegir $\delta = \text{mín}(1, \varepsilon/n)$ para alguna n? Explique.

(c) Si elegimos $\delta = \text{mín}\left(\frac{1}{4}, \varepsilon/m\right)$, ¿cuál es el entero más pequeño m que podríamos utilizar?

Respuestas a la revisión de conceptos **1.** $L - \varepsilon; L + \varepsilon$ **2.** $0 < |x - a| < \delta$; $|f(x) - L| < \varepsilon$ **3.** $\varepsilon/3$ **4.** $ma + b$

1.3 Teoremas de límites

La mayoría de los lectores coincidirá en que demostrar la existencia y obtener los valores de los límites mediante la definición $\varepsilon-\delta$ de la sección anterior consume tiempo y es difícil. Por esto son bienvenidos los teoremas de esta sección. Nuestro primer teorema es el principal. Con él podemos manejar la mayoría de los problemas de límites con los que nos enfrentaremos durante bastante tiempo.

Límites laterales

Aunque el teorema A se establece en términos de límites por los dos lados, sigue cumpliéndose tanto para límites por la izquierda como para límites por la derecha.

Teorema A Teorema principal de los límites

Sean n un entero positivo, k una constante y f y g funciones que tengan límites en c. Entonces

1. $\lim_{x\to c} k = k$;
2. $\lim_{x\to c} x = c$;
3. $\lim_{x\to c} kf(x) = k \lim_{x\to c} f(x)$;
4. $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$;
5. $\lim_{x\to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$;
6. $\lim_{x\to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$;
7. $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, siempre que $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$;
8. $\lim_{x\to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$;
9. $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$, siempre que $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ cuando n sea par.

Estos importantes resultados se recuerdan mejor si se aprenden en palabras. Por ejemplo, la afirmación 4 se traduce como: *el límite de una suma es la suma de los límites*.

Por supuesto, el teorema A necesita demostrarse. Posponemos esa tarea hasta el final de la sección, pues preferimos mostrar primero cómo se utiliza este teorema con varias partes.

Aplicaciones del teorema principal de los límites En los ejemplos siguientes, los números dentro de un círculo se refieren al número de la afirmación del teorema A. Cada igualdad está justificada por la afirmación indicada.

EJEMPLO 1 Determine $\lim_{x\to 3} 2x^4$.

$$\lim_{x\to 3} 2x^4 \overset{③}{=} 2 \lim_{x\to 3} x^4 \overset{⑧}{=} 2\left[\lim_{x\to 3} x\right]^4 \overset{②}{=} 2[3]^4 = 162$$

■

EJEMPLO 2 Encuentre $\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x)$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x) \overset{⑤}{=} \lim_{x\to 4} 3x^2 - \lim_{x\to 4} 2x \overset{③}{=} 3\lim_{x\to 4} x^2 - 2\lim_{x\to 4} x$$

$$\overset{⑧}{=} 3\left(\lim_{x\to 4} x\right)^2 - 2\lim_{x\to 4} x \overset{②}{=} 3(4)^2 - 2(4) = 40$$

■

EJEMPLO 3 Determine $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x}$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} \overset{(7)}{=} \frac{\lim_{x \to 4} \sqrt{x^2 + 9}}{\lim_{x \to 4} x} \overset{(9,2)}{=} \frac{\sqrt{\lim_{x \to 4} (x^2 + 9)}}{4} \overset{(4)}{=} \frac{1}{4}\sqrt{\lim_{x \to 4} x^2 + \lim_{x \to 4} 9}$$

$$\overset{(8,1)}{=} \frac{1}{4}\sqrt{\left[\lim_{x \to 4} x\right]^2 + 9} \overset{(2)}{=} \frac{1}{4}\sqrt{4^2 + 9} = \frac{5}{4}$$

■

EJEMPLO 4 Si $\lim_{x \to 3} f(x) = 4$ y $\lim_{x \to 3} g(x) = 8$, encuentre

$$\lim_{x \to 3}\left[f^2(x) \cdot \sqrt[3]{g(x)}\right]$$

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 3} [f^2(x) \cdot \sqrt[3]{g(x)}] \overset{(6)}{=} \lim_{x \to 3} f^2(x) \cdot \lim_{x \to 3} \sqrt[3]{g(x)}$$

$$\overset{(8,9)}{=} \left[\lim_{x \to 3} f(x)\right]^2 \cdot \sqrt[3]{\lim_{x \to 3} g(x)}$$

$$= [4]^2 \cdot \sqrt[3]{8} = 32$$

■

Recuerde que una función polinomial f tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mientras que una función racional f es el cociente de dos funciones polinomiales, esto es,

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Teorema B Teorema de sustitución

Si f es una función polinomial o una función racional, entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

con tal que $f(c)$ esté definida. En el caso de una función racional, esto significa que el valor del denominador en c no sea cero.

Evaluación de un límite por "sustitución"

Cuando aplicamos el teorema B, teorema de sustitución, decimos que evaluamos el límite por *sustitución*. No todos los límites pueden evaluarse por sustitución; considere $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. El teorema de sustitución no se aplica aquí, ya que el denominador es cero cuando x = 1, pero el límite sí existe.

La demostración del teorema B se obtiene con base en aplicaciones repetidas del teorema A. Observe que el teorema B nos permite encontrar límites de funciones polinomiales y racionales con la simple sustitución de c por x en toda la expresión, siempre y cuando el denominador de la función racional no sea cero en c.

EJEMPLO 5 Encuentre $\lim_{x \to 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8}$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 2}\frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8} = \frac{7(2)^5 - 10(2)^4 - 13(2) + 6}{3(2)^2 - 6(2) - 8} = -\frac{11}{2}$$ ■

EJEMPLO 6 Determine $\lim_{x\to 1}\frac{x^3 + 3x + 7}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3 + 3x + 7}{(x - 1)^2}$.

SOLUCIÓN No se aplican ni el teorema B ni la afirmación 7 del teorema A, ya que el límite del denominador es cero. Sin embargo, como el límite del numerador es 11, vemos que cuando x se aproxima a 1 estamos dividiendo un número cercano a 11 entre un número positivo cercano a cero. El resultado es un número positivo grande. De hecho, el número resultante puede hacerlo tan grande como quiera tomando a x suficientemente cercana a 1. Decimos que el límite no existe. (Más adelante, en este capítulo —véase la sección 1.5— nos permitiremos decir que el límite es $+\infty$). ■

En muchos casos no se puede aplicar el teorema B, ya que la sustitución de c provoca que el denominador se haga igual a 0. En casos como éste, en ocasiones sucede que la función se puede simplificar mediante la factorización. Por ejemplo, podemos escribir

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} = \frac{(x - 2)(x + 5)}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{x + 5}{x + 3}$$

Debemos ser cuidadosos en este último paso. La fracción $(x + 5)/(x + 3)$ es igual a la del lado izquierdo del signo de igualdad sólo si x no es igual a 2. Si $x = 2$, el lado izquierdo está indeterminado (ya que el denominador es 0), mientras que el lado derecho es igual a $(2 + 5)/(2 + 3) = 7/5$. Esto plantea la pregunta acerca de si los límites

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2}\frac{x + 5}{x + 3}$$

son iguales. La respuesta se encuentra en el siguiente teorema.

Teorema C

Si $f(x) = g(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contenga a c, excepto posiblemente en el mismo número c, y si existe $\lim_{x\to c} g(x)$ entonces $\lim_{x\to c} f(x)$ existe y $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$.

EJEMPLO 7 Determine $\lim_{x\to 1}\frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 1}\frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x\to 1}(\sqrt{x} + 1) = \sqrt{1} + 1 = 2$$ ■

EJEMPLO 8 Determine $\lim_{x\to 2}\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6}$.

SOLUCIÓN No se aplica el teorema B porque el denominador es 0 cuando $x = 2$. Al sustituir $x = 2$ en el numerador también obtenemos 0, por lo que el cociente toma una forma carente de significado 0/0 en $x = 2$. Cuando esto suceda deberemos buscar alguna simplificación algebraica, como la factorización.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} = \lim_{x\to 2}\frac{(x - 2)(x + 5)}{(x - 2)(x + 3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x + 5}{x + 3} = \frac{7}{5}$$

> **¿Opcional?**
>
> En un primer curso de cálculo, ¿cuántos teoremas deben demostrarse? Los profesores de matemáticas han discutido largo y tendido en torno a esto y acerca del balance correcto entre:
>
> - lógica e intuición
> - demostración y explicación
> - teoría y aplicación
>
> Un gran científico de hace mucho tiempo dio un sabio consejo.
>
> "Quien ama la práctica sin teoría es como el marinero que se embarca sin timón ni brújula y nunca sabe a dónde ir".
>
> *Leonardo da Vinci*

El paso de la segunda a la última igualdad se justifica por medio del teorema C, ya que

$$\frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x+5}{x+3}$$

para toda x, salvo para $x = 2$. Una vez que aplicamos el teorema C, podemos evaluar el límite por medio de sustitución (es decir, mediante la aplicación del teorema B). ■

Demostración del teorema A (opcional) No debe sorprenderse demasiado cuando le decimos que las demostraciones de algunas partes del teorema A son muy complicadas. Como consecuencia de esto, aquí sólo demostramos las primeras cinco partes y dejamos las otras al apéndice (sección A.2, teorema A). Para que se dé cuenta, podría intentar con los problemas 35 y 36.

Demostraciones de las afirmaciones 1 y 2 Estas afirmaciones resultan de $\lim_{x \to c}(mx + b) = mc + b$ (véase el ejemplo 4 de la sección 1.2) utilizando primero $m = 0$ y luego $m = 1, b = 0$. ■

Demostración de la afirmación 3 Si $k = 0$, el resultado es trivial, así que suponemos que $k \neq 0$. Sea $\varepsilon > 0$ dada. Por hipótesis, $\lim_{x \to c} f(x)$ existe; llamemos L a su valor. Por definición de límite existe un número δ, tal que

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

Es seguro que algunos reclamarían que pongamos $\varepsilon/|k|$ en lugar de ε al final de la desigualdad anterior. Bueno, ¿acaso $\varepsilon/|k|$ no es un número positivo? Sí. ¿Acaso la definición de límite no requiere que para cualquier número positivo exista una correspondiente δ? Sí.

Ahora, para una δ así determinada (nuevamente por medio de un análisis preliminar que no hemos mostrado aquí), aseguramos que $0 < |x - c| < \delta$ implica que

$$|kf(x) - kL| = |k||f(x) - L| < |k|\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

Esto muestra que

$$\lim_{x \to c} kf(x) = kL = k \lim_{x \to c} f(x)$$ ■

Demostración de la afirmación 4 Respecto a la figura 1. Sea $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c} g(x) = M$. Si ε es cualquier número positivo, entonces $\varepsilon/2$ es positivo. Como $\lim_{x \to c} f(x) = L$, existe un número positivo δ_1 tal que

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $\lim_{x \to c} g(x) = M$, existe un número positivo δ_2, tal que

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Elegimos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$; esto es, elegimos δ como la más pequeña de δ_1 y δ_2. Entonces $0 < |x - c| < \delta$ implica que

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |[f(x) - L] + [g(x) - M]| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

En esta cadena, la primera desigualdad es la desigualdad del triángulo (véase la sección 0.2); la segunda resulta de la elección de δ. Acabamos de demostrar que

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = L + M = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$$ ■

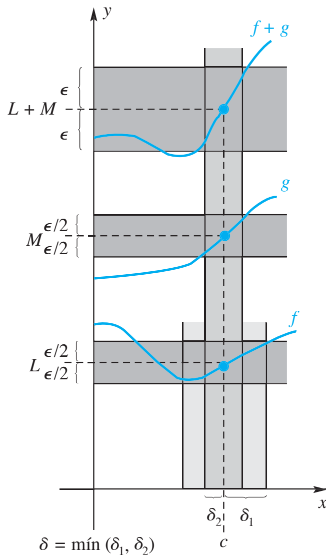


Figura 1

Demostración de la afirmación 5

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] &= \lim_{x\to c}[f(x)+(-1)g(x)]\\ &= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c}(-1)g(x)\\ &= \lim_{x\to c} f(x) + (-1)\lim_{x\to c} g(x)\\ &= \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)\end{aligned}$$ ■

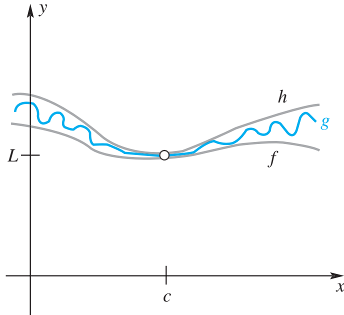


Figura 2

El teorema del emparedado Probablemente ha oído decir a alguien: "me encuentro entre la espada y la pared". Esto es lo que le sucede a g en el siguiente teorema (véase la figura 2).

Teorema D Teorema del emparedado

Sean f, g y h funciones que satisfacen $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para toda x cercana a c, excepto posiblemente en c. Si $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, entonces $\lim_{x\to c} g(x) = L$.

Demostración (Opcional) Sea $\varepsilon > 0$ dada. Elegimos δ_1 tal que

$$0 < |x-c| < \delta_1 \Rightarrow L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$$

y δ_2 tal que

$$0 < |x-c| < \delta_2 \Rightarrow L-\varepsilon < h(x) < L+\varepsilon$$

Elegimos δ_3, de modo que

$$0 < |x-c| < \delta_3 \Rightarrow f(x) \le g(x) \le h(x)$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Entonces

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow L-\varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L+\varepsilon$$

Concluimos que $\lim_{x\to c} g(x) = L$. ■

EJEMPLO 9 Suponga que hemos demostrado que $1 - x^2/6 \le (\text{sen } x)/x \le 1$ para toda x cercana pero distinta de cero. ¿Qué podemos concluir acerca de $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x}$?

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 1 - x^2/6$, $g(x) = (\text{sen } x)/x$, y $h(x) = 1$. Se sigue que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0} h(x)$ y de este modo, por el teorema D,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{x} = 1$$ ■

Revisión de conceptos

1. Si $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$, entonces $\lim_{x\to 3}(x^2+3)f(x) =$ _____.
2. Si $\lim_{x\to 2} g(x) = -2$, entonces $\lim_{x\to 2}\sqrt{g^2(x)+12} =$ _____.
3. Si $\lim_{x\to c} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to c} g(x) = -2$, entonces $\lim_{x\to c}\frac{f^2(x)}{g(x)} =$ _____ y $\lim_{x\to c}\left[g(x)\sqrt{f(x)} + 5x\right] =$ _____.
4. Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} g(x) = L$, entonces $\lim_{x\to c}[f(x)-L]g(x) =$ _____.

Conjunto de problemas 1.3

En los problemas del 1 al 12 utilice el teorema A para encontrar cada uno de los límites. Justifique cada paso apelando a cada una de las afirmaciones numeradas, como en los ejemplos del 1 al 4.

1. $\lim_{x\to 1}(2x+1)$
2. $\lim_{x\to -1}(3x^2-1)$
3. $\lim_{x\to 0}[(2x+1)(x-3)]$
4. $\lim_{x\to\sqrt{2}}[(2x^2+1)(7x^2+13)]$
5. $\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{5-3x}$
6. $\lim_{x\to -3}\frac{4x^3+1}{7-2x^2}$

7. $\lim_{x\to 3}\sqrt{3x-5}$

8. $\lim_{x\to -3}\sqrt{5x^2+2x}$

9. $\lim_{t\to -2}(2t^3+15)^{13}$

10. $\lim_{w\to -2}\sqrt{-3w^3+7w^2}$

11. $\lim_{y\to 2}\left(\dfrac{4y^3+8y}{y+4}\right)^{1/3}$

12. $\lim_{w\to 5}(2w^4-9w^3+19)^{-1/2}$

En los problemas del 13 al 24 encuentre el límite indicado o establezca que no existe. En muchos casos, necesitará usar un poco de álgebra antes de intentar evaluar el límite.

13. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$

14. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

15. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$

16. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x^2+1}$

17. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3+4x^2-19x+14}$

18. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+7x+10}{x+2}$

19. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$

20. $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2-14x-51}{x^2-4x-21}$

21. $\lim_{u\to -2}\dfrac{u^2-ux+2u-2x}{u^2-u-6}$

22. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+ux-x-u}{x^2+2x-3}$

23. $\lim_{x\to \pi}\dfrac{2x^2-6x\pi+4\pi^2}{x^2-\pi^2}$

24. $\lim_{w\to -2}\dfrac{(w+2)(w^2-w-6)}{w^2+4w+4}$

En los problemas del 25 al 30 encuentre los límites $\lim_{x\to a} f(x)=3$ *y* $\lim_{x\to a} g(x)=-1$ *(véase el ejemplo 4).*

25. $\lim_{x\to a}\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$

26. $\lim_{x\to a}\dfrac{2f(x)-3g(x)}{f(x)+g(x)}$

27. $\lim_{x\to a}\sqrt[3]{g(x)}\left[f(x)+3\right]$

28. $\lim_{x\to a}\left[f(x)-3\right]^4$

29. $\lim_{t\to a}\left[|f(t)|+|3g(t)|\right]$

30. $\lim_{u\to a}\left[f(u)+3g(u)\right]^3$

En los problemas del 31 al 34 encuentre $\lim_{x\to 2}[f(x)-f(2)]/(x-2)$ *para cada función f dada.*

31. $f(x)=3x^2$

32. $f(x)=3x^2+2x+1$

33. $f(x)=\dfrac{1}{x}$

34. $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$

35. Demuestre la afirmación 6 del teorema A. *Sugerencia:*

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-LM| &= |f(x)g(x)-Lg(x)+Lg(x)-LM|\\ &= |g(x)[f(x)-L]+L[g(x)-M]|\\ &\le |g(x)||f(x)-L|+|L||g(x)-M|\end{aligned}$$

Ahora demuestre que si $\lim_{x\to c} g(x)=M$, entonces existe un número δ_1, tal que

$$0<|x-c|<\delta_1 \Rightarrow |g(x)|<|M|+1$$

36. Demuestre la afirmación 7 del teorema A; primero dé una demostración ε–δ de que $\lim_{x\to c}[1/g(x)]=1/\left[\lim_{x\to c} g(x)\right]$ y luego aplique la afirmación 6.

37. Demuestre que $\lim_{x\to c} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to c}[f(x)-L]=0$.

38. Demuestre que $\lim_{x\to c} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to c}|f(x)|=0$.

39. Demuestre que $\lim_{x\to c}|x|=|c|$.

40. Encuentre ejemplos para demostrar que si

(a) $\lim_{x\to c}\left[f(x)+g(x)\right]$ existe, esto no implica que exista $\lim_{x\to c} f(x)$ o $\lim_{x\to c} g(x)$;

(b) $\lim_{x\to c}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$ existe, esto no implica que exista $\lim_{x\to c} f(x)$ o $\lim_{x\to c} g(x)$.

En los problemas del 41 al 48 encuentre cada uno de los límites unilaterales o establezca que no existen.

41. $\lim_{x\to -3^+}\dfrac{\sqrt{3+x}}{x}$

42. $\lim_{x\to -\pi^+}\dfrac{\sqrt{\pi^3+x^3}}{x}$

43. $\lim_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$

44. $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1+x}}{4+4x}$

45. $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{(x^2+1)[\![x]\!]}{(3x-1)^2}$

46. $\lim_{x\to 3^-}(x-[\![x]\!])$

47. $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{x}{|x|}$

48. $\lim_{x\to 3^+}[\![x^2+2x]\!]$

49. Suponga que $f(x)g(x)=1$ para toda x y que $\lim_{x\to a} g(x)=0$. Demuestre que $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe.

50. Sea R el rectángulo que une los puntos medios de los lados del cuadrilátero Q, el cual tiene vértices $(\pm x, 0)$ y $(0, \pm 1)$. Calcule

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{perímetro de } R}{\text{perímetro de } Q}$$

51. Sea $y=\sqrt{x}$ y considere los puntos M, N, O y P con coordenadas $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$ y (x,y) en la gráfica de $y=\sqrt{x}$, respectivamente. Calcule:

(a) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\text{perímetro de } \Delta NOP}{\text{perímetro de } \Delta MOP}$ (b) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\text{área de } \Delta NOP}{\text{área de } \Delta MOP}$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** 48 **2.** 4 **3.** -8; $-4+5c$ **4.** 0

1.4 Límites que involucran funciones trigonométricas

El teorema B de la sección anterior dice que los límites de funciones polinomiales siempre pueden encontrarse por sustitución y los límites de funciones racionales pueden encontrarse por sustitución, siempre y cuando el denominador no sea cero en el punto límite. Esta regla de sustitución se aplica también a las funciones trigonométricas. Este resultado se establece a continuación.

Teorema A Límites de funciones trigonométricas

Para todo número real c en el dominio de la función,

1. $\lim_{t\to c} \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} c$
2. $\lim_{t\to c} \cos t = \cos c$
3. $\lim_{t\to c} \tan t = \tan c$
4. $\lim_{t\to c} \cot t = \cot c$
5. $\lim_{t\to c} \sec t = \sec c$
6. $\lim_{t\to c} \csc t = \csc c$

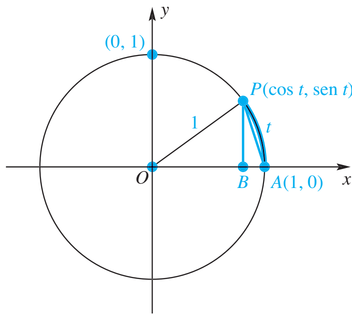


Figura 1

Demostración de la afirmación 1 Primero establecemos el caso especial en el que $c = 0$. Supóngase que $t > 0$ y que los puntos A, B y P están definidos como en la figura 1. Entonces

$$0 < |BP| < |AP| < \operatorname{arc}(AP)$$

Pero $|BP| = \operatorname{sen} t$ y $\operatorname{arco}(AP) = t$, de modo que

$$0 < \operatorname{sen} t < t$$

Si $t < 0$, entonces $t < \operatorname{sen} t < 0$. Así que podemos aplicar el teorema del emparedado (teorema 1.3D) y concluir que $\lim_{t\to 0} \operatorname{sen} t = 0$. Para completar la demostración, también necesitaremos el resultado de que $\lim_{t\to 0} \cos t = 1$. Ésta se deduce aplicando una identidad trigonométrica y el teorema 1.3A:

$$\lim_{t\to 0} \cos t = \lim_{t\to 0} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{1 - \left(\lim_{t\to 0} \operatorname{sen} t\right)^2} = \sqrt{1 - 0^2} = 1$$

Ahora, para demostrar que $\lim_{t\to c} \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} c$, primero hacemos $h = t - c$ de modo que $h \to 0$ cuando $t \to c$. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{t\to c} \operatorname{sen} t &= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(c + h)\\ &= \lim_{h\to 0}(\operatorname{sen} c \cos h + \cos c \operatorname{sen} h) \quad \text{(Identidad de la suma de ángulos)}\\ &= (\operatorname{sen} c)\left(\lim_{h\to 0} \cos h\right) + (\cos c)\left(\lim_{h\to 0} \operatorname{sen} h\right)\\ &= (\operatorname{sen} c)(1) + (\cos c)(0) = \operatorname{sen} c\end{aligned}$$

■

Demostración de la afirmación 2 Otra vez utilizamos la identidad junto con el teorema 1.3A. Si $\cos c > 0$, entonces para t cercano a c tenemos $\cos t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$. Por lo tanto,

$$\lim_{t\to c} \cos t = \lim_{t\to c} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{1 - \left(\lim_{t\to c} \operatorname{sen} t\right)^2} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 c} = \cos c$$

Por otra parte, si $\cos c < 0$, entonces para t cercano a c tenemos $\cos t = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to c} \cos t &= \lim_{t\to c}\left(-\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}\right) = -\sqrt{1 - \left(\lim_{t\to c} \operatorname{sen} t\right)^2} = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 c}\\ &= -\sqrt{\cos^2 c} = -|\cos c| = \cos c\end{aligned}$$

El caso $c = 0$ se trabajó en la demostración de la afirmación 1. ■

Las demostraciones de las demás afirmaciones se dejan como ejercicios. (Véanse los problemas 21 y 22). El teorema A puede utilizarse junto con el teorema 1.3A para evaluar otros límites.

EJEMPLO 1 Encuentre $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^2 \cos t}{t + 1}$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2 \cos t}{t + 1} = \left(\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t + 1}\right)\left(\lim_{t\to 0} \cos t\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

■

Dos límites importantes que no pueden evaluarse por sustitución son

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \quad \text{y} \quad \lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t}{t}$$

En la sección 1.1 encontramos el primero de estos límites, en donde conjeturamos que el límite era 1. Ahora demostramos que en verdad 1 es el límite.

Teorema B **Límites trigonométricos especiales**

1. $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$ 2. $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = 0$

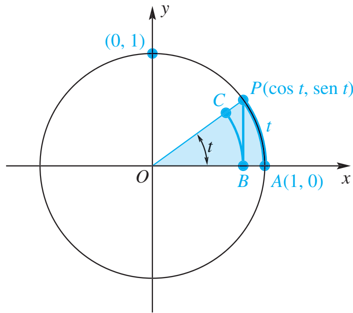


Figura 2

Demostración de la afirmación 1 En la demostración del teorema A de esta sección mostramos que

$$\lim_{t\to 0} \cos t = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to 0} \operatorname{sen} t = 0$$

Para $-\pi/2 \le t \le \pi/2, t \neq 0$ (recuerde, no importa qué suceda *en* $t=0$), dibuje el segmento de recta vertical BP y el arco circular BC, como se muestra en la figura 2. (Si $t<0$, entonces considere la región sombreada reflejada con respecto al eje x.) De la figura 2 se hace evidente que

$$\text{área(sector } OBC) \le \text{área}(\Delta OBP) \le \text{área(sector } OAP)$$

El área de un triángulo es un medio del producto de su base por la altura, y el área de un sector circular con ángulo central t y radio r es $\frac{1}{2}r^2|t|$ (véase el problema 42 de la sección 0.7). Al aplicar estos resultados a las tres regiones dadas

$$\frac{1}{2}(\cos t)^2|t| \le \frac{1}{2}\cos t\,|\operatorname{sen} t| \le \frac{1}{2}1^2|t|$$

que, después de multiplicar por 2 y dividir entre el número positivo $|t|\cos t$, se obtiene

$$\cos t \le \frac{|\operatorname{sen} t|}{|t|} \le \frac{1}{\cos t}$$

Como la expresión $(\operatorname{sen} t)/t$ es positiva para $-\pi/2 \le t \le \pi/2, t \neq 0$, tenemos $|\operatorname{sen} t|/|t| = (\operatorname{sen} t)/t$. Por lo tanto,

$$\cos t \le \frac{\operatorname{sen} t}{t} \le \frac{1}{\cos t}$$

Como estamos buscando el límite de la función de en medio y conocemos el límite de cada una de las funciones "exteriores", esta doble desigualdad pide que apliquemos el teorema del emparedado. Cuando lo aplicamos, obtenemos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1 \qquad \blacksquare$$

Demostración de la afirmación 2 El segundo límite se deduce con facilidad a partir del primero. Sólo multiplique el numerador y el denominador por $(1 + \cos t)$; esto da

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t}\cdot\frac{1+\cos t}{1+\cos t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^2 t}{t(1+\cos t)} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t(1+\cos t)} \\ &= \left(\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)\frac{\lim_{t\to 0}\operatorname{sen} t}{\lim_{t\to 0}(1+\cos t)} = 1\cdot\frac{0}{2} = 0 \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Haremos uso explícito de estos dos límites en el capítulo 2. En este momento podemos usarlos para evaluar otros límites.

EJEMPLO 2 Encuentre cada límite,

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ (b) $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{\operatorname{sen} t}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{\tan x}$

SOLUCIÓN

(a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}$$

Aquí, el argumento de la función seno es $3x$, no sólo x, como lo requiere el teorema B. Sea $y = 3x$. Entonces $y \to 0$ si y sólo si $x \to 0$, de modo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 3$$

(b) $$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\operatorname{sen} t} = \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{1-\cos t}{t}}{\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}} = \frac{\lim_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{t}}{\lim_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}} = \frac{0}{1} = 0$$

(c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{4\operatorname{sen} 4x}{4x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x\cos x}}$$

$$= \frac{4\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{4x}}{\left(\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\right)} = \frac{4}{1\cdot 1} = 4$$ ■

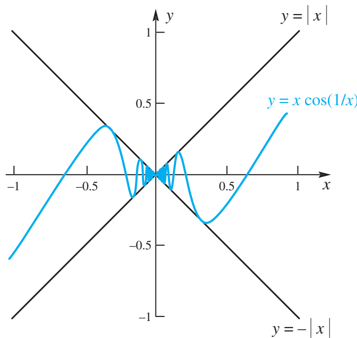


Figura 3

EJEMPLO 3 Haga un bosquejo de las gráficas de $u(x) = |x|$, $l(x) = -|x|$ y $f(x) = x\cos(1/x)$. Utilice estas gráficas junto con el teorema del emparedado (teorema D de la sección 1.3) para determinar $\lim_{x\to 0} f(x)$.

SOLUCIÓN Observe que $\cos(1/x)$ siempre está entre -1 y 1 y $f(x) = x\cos(1/x)$. Por lo tanto, $x\cos(1/x)$ siempre estará entre $-x$ y x, si x es positiva y entre x y $-x$, si x es negativa. En otras palabras, la gráfica de $y = x\cos(1/x)$ está entre las gráficas de $y = |x|$ y $y = -|x|$, como se muestra en la figura 3. Sabemos que $\lim_{x\to 0}|x| = \lim_{x\to 0}(-|x|) = 0$ (véase el problema 27 de la sección 1.2) y como la gráfica de $y = f(x) = x\cos(1/x)$ está "emparedada" entre las gráficas de $u(x) = |x|$ y $l(x) = -|x|$, ambas tienden a cero cuando $x \to 0$ y podemos aplicar el teorema del emparedado para concluir que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. ■

Revisión de conceptos

1. $\lim_{t\to 0}\operatorname{sen} t =$ _____.

2. $\lim_{t\to \pi/4}\tan t =$ _____.

3. El límite $\lim_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ no puede evaluarse por sustitución porque ________.

4. $\lim_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} t}{t} =$ _____.

Conjunto de problemas 1.4

En los problemas del 1 al 14 evalúe cada límite.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x+1}$

2. $\lim_{\theta\to\pi/2} \theta\cos\theta$

3. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\cos^2 t}{1+\operatorname{sen} t}$

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x\tan x}{\operatorname{sen} x}$

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x}$

6. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3\theta}{2\theta}$

7. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3\theta}{\tan\theta}$

8. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\tan 5\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$

9. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\cot(\pi\theta)\operatorname{sen}\theta}{2\sec\theta}$

10. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 3t}{2t}$

11. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\tan^2 3t}{2t}$

12. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\tan 2t}{\operatorname{sen} 2t - 1}$

13. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3t + 4t}{t\sec t}$

14. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta^2}$

En los problemas del 15 al 19 trace las funciones $u(x)$, $l(x)$ y $f(x)$. Después utilice estas gráficas junto con el teorema del emparedado para determinar $\lim_{x\to 0} f(x)$.

15. $u(x) = |x|, l(x) = -|x|, f(x) = x\operatorname{sen}(1/x)$

16. $u(x) = |x|, l(x) = -|x|, f(x) = x\operatorname{sen}(1/x^2)$

17. $u(x) = |x|, l(x) = -|x|, f(x) = (1-\cos^2 x)/x$

18. $u(x) = 1, l(x) = 1 - x^2, f(x) = \cos^2 x$

19. $u(x) = 2, l(x) = 2 - x^2, f(x) = 1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

20. Demuestre que $\lim_{t\to c}\cos t = \cos c$ utilizando un argumento similar al que se empleó en la demostración de que $\lim_{t\to c}\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} c$.

21. Demuestre las afirmaciones 3 y 4 del teorema A mediante el teorema 1.3A.

22. Demuestre las afirmaciones 5 y 6 del teorema 1.3A.

23. Con base en área(OBP) ≤ área(sector OAP) ≤ área(OBP) + área($ABPQ$) en la figura 4, demuestre que

$$\cos t \le \frac{t}{\operatorname{sen} t} \le 2 - \cos t$$

y así obtenga otra demostración de que $\lim_{t\to 0^+}(\operatorname{sen} t)/t = 1$.

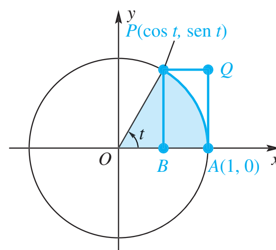


Figura 4

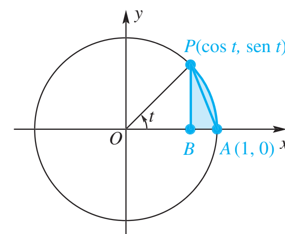


Figura 5

24. En la figura 5, sea D el área del triángulo ABP y E el área de la región sombreada.

(a) Haga una conjetura acerca del valor de $\lim_{t\to 0^+}\dfrac{D}{E}$ observando la figura.

(b) Encuentre una fórmula para D/E en términos de t.

C (c) Utilice una calculadora para obtener una estimación precisa de $\lim_{t\to 0^+}\dfrac{D}{E}$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** 0 **2.** 1 **3.** el denominador es cero cuando $t = 0$ **4.** 1

1.5 Límites al infinito; límites infinitos

Con frecuencia, los problemas y paradojas más profundos de las matemáticas están entrelazados con el uso del concepto de infinito. Incluso, el progreso matemático, en parte, puede medirse en términos de la comprensión del concepto de infinito. Ya hemos utilizado los símbolos ∞ y $-\infty$ en nuestra notación para ciertos intervalos. Así, $(3, \infty)$ es nuestra forma para denotar al conjunto de todos los números reales mayores que 3. Observe que nunca nos hemos referido a ∞ como un número. Por ejemplo, nunca lo hemos sumado ni dividido entre algún número. Utilizaremos los símbolos ∞ y $-\infty$ de una manera nueva en esta sección, pero éstos aún no representan números.

Límites al infinito Considere la función $g(x) = x/(1 + x^2)$ cuya gráfica se muestra en la figura 1. Hacemos esta pregunta: ¿qué le sucede a $g(x)$ cuando x se hace cada vez más grande? En símbolos, preguntamos por el valor de $\lim_{x\to\infty} g(x)$.

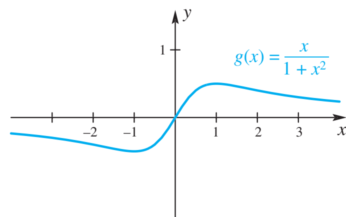


Figura 1

Cuando escribimos $x \to \infty$, *no* queremos dar a entender que en un lugar muy, muy alejado a la derecha del eje x exista un número —más grande que todos los demás— al cual se aproxima x. En lugar de eso utilizamos $x \to \infty$ como una forma breve de decir que x se hace cada vez más grande sin cota.

En la tabla de la figura 2 hemos listado valores de $g(x) = x/(1 + x^2)$ para diversos valores de x. Parece que $g(x)$ se hace cada vez más pequeño conforme x se hace cada vez más grande. Escribimos

x	$\frac{x}{1+x^2}$
10	0.099
100	0.010
1000	0.001
10000	0.0001
↓	↓
∞	?

Figura 2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1 + x^2} = 0$$

Al experimentar con números negativos cada vez más lejanos del cero nos conduciría a escribir

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1 + x^2} = 0$$

Definiciones rigurosas de límites cuando $x \to \pm\infty$ En analogía con nuestra definición $\varepsilon - \delta$ para límites ordinarios, hacemos la siguiente definición.

Definición **Límite cuando $x \to \infty$**

Sea f definida en $[c, \infty)$ para algún número c. Decimos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número M, tal que

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Notará que M puede depender de ε. En general, entre más pequeña sea ε, más grande tendrá que ser M. La gráfica en la figura 3 puede ayudarle a comprender lo que estamos diciendo.

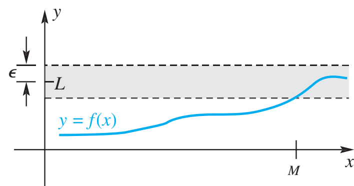


Figura 3

Definición **Límite cuando $x \to -\infty$**

Sea f definida en $(-\infty, c]$ para algún número c. Decimos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número M, tal que

$$x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

EJEMPLO 1 Demuestre que si k es un entero positivo, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

SOLUCIÓN Sea $\varepsilon > 0$ dada. Después de un análisis preliminar (como en la sección 1.2), elegimos $M = \sqrt[k]{1/\varepsilon}$. Entonces $x > M$ implica que

$$\left|\frac{1}{x^k} - 0\right| = \frac{1}{x^k} < \frac{1}{M^k} = \varepsilon$$

La demostración de la segunda proposición es similar. ■

Habiendo dado las definiciones de esta nueva clase de límites, debemos enfrentarnos a la pregunta de si el teorema principal de límites (teorema 1.3A) se cumple para ellos. La respuesta es sí, y la demostración es similar a la de las proposiciones originales. Observe cómo utilizamos este teorema en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 2 Demuestre que $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1 + x^2} = 0$.

SOLUCIÓN Aquí utilizamos un truco común: dividir el numerador y el denominador entre la potencia más alta de x que aparece en el denominador, esto es, x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1 + x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1 + x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x\to\infty} 1} = \frac{0}{0 + 1} = 0$$ ■

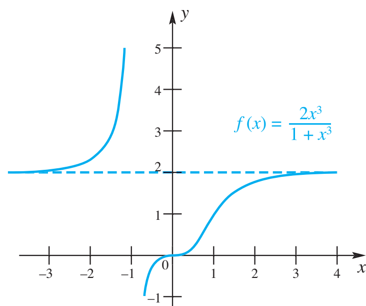


Figura 4

EJEMPLO 3 Encuentre $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{1+x^3}$.

SOLUCIÓN La gráfica de $f(x) = 2x^3/(1+x^3)$ se muestra en la figura 4. Para encontrar el límite, divida el numerador y el denominador entre x^3.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{1+x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1/x^3+1} = \frac{2}{0+1} = 2$$ ■

Límites de sucesiones El dominio para algunas funciones es el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \ldots\}$. En esta situación, por lo regular escribimos a_n en lugar de $a(n)$ para denotar al n-ésimo término de la sucesión, o $\{a_n\}$ para denotar a toda la sucesión. Por ejemplo, podríamos definir la sucesión por medio de $a_n = n/(n+1)$. Considere lo que sucede cuando n se hace grande. Unos cuantos cálculos muestran que

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{3}{4}, \quad a_4 = \frac{4}{5}, \quad \ldots, \quad a_{100} = \frac{100}{101}, \quad \ldots$$

Pareciera que estos valores se aproximan a 1, de modo que sería razonable decir que para esta sucesión $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. La siguiente definición proporciona significado a esta idea del límite de una sucesión.

Definición **Límite de una sucesión**

Sea a_n definida para todos los números naturales mayores o iguales que algún número c. Decimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número natural M, tal que

$$n > M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Observe que esta definición es casi idéntica a la definición de $\lim_{x\to\infty} f(x)$. La única diferencia es que ahora pedimos que el argumento de la función sea un número natural. Como podríamos esperar, el teorema principal de los límites (teorema 1.3A) se cumple para las sucesiones.

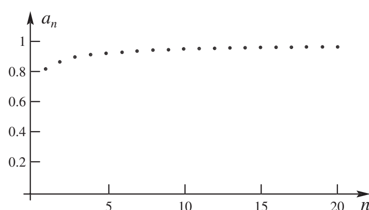


Figura 5

EJEMPLO 4 Determine $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$.

SOLUCIÓN La figura 5 muestra una gráfica de $a_n = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$. Al aplicar el teorema 1.3A se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}\right)^{1/2} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{1+2/n}\right)^{1/2} = \left(\frac{1+0}{1+0}\right)^{1/2} = 1$$ ■

Necesitaremos el concepto de límite de una sucesión en la sección 3.7 y en el capítulo 4.

Límites infinitos Considere la gráfica de $f(x) = 1/(x-2)$ que se muestra en la figura 6. Cuando x se acerca a 2 por la izquierda, la función parece que disminuye sin cota. De forma análoga, cuando x se aproxima a 2 por la derecha, la función parece que aumenta sin cota. Por lo tanto, no tiene sentido hablar acerca de $\lim_{x\to 2} 1/(x-2)$, pero creemos que es razonable escribir

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

Aquí está la definición precisa.

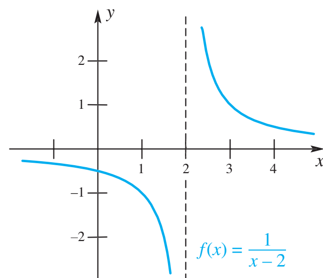


Figura 6

Definición **Límite infinito**

Decimos que $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$, si para cada número positivo M corresponde una $\delta > 0$ tal que

$$0 < x - c < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

En otras palabras, $f(x)$ puede hacerse tan grande como deseemos (mayor que cualquier M que elijamos) tomando x lo suficientemente cerca, pero a la derecha de c. Existen definiciones correspondientes para

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

(Véase los problemas 51 y 52).

EJEMPLO 5 Encuentre $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2}$ y $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2}$.

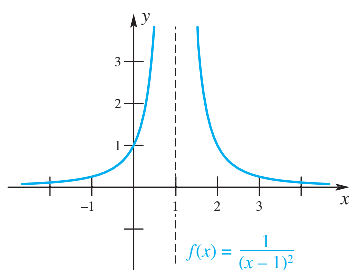


Figura 7

SOLUCIÓN La gráfica de $f(x) = 1/(x-1)^2$ se muestra en la figura 7. Cuando $x \to 1^+$, el denominador permanece positivo pero tiende a cero, mientras que el numerador es 1 para toda x. Así, la razón $1/(x-1)^2$ puede hacerse arbitrariamente grande restringiendo la cercanía de x respecto de 1, pero a la derecha de él. De manera análoga, cuando $x \to 1-$, el denominador es positivo y puede hacerse arbitrariamente cercano a cero. Así, $1/(x-1)^2$ puede hacerse arbitrariamente grande restringiendo a que x esté cerca de 1, pero a la izquierda de él. Por lo tanto, concluimos que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

Ya que ambos límites son ∞, también podríamos escribir

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

■

EJEMPLO 6 Encuentre $\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6}$.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{(x-3)(x-2)}$$

Cuando $x \to 2^+$ vemos que $x + 1 \to 3$, $x - 3 \to -1$ y $x - 2 \to 0^+$; por lo tanto, el numerador se aproxima a 3, pero el denominador es negativo y tiende a cero. Concluimos que

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{(x-3)(x-2)} = -\infty$$

■

Relación con las asíntotas Las asíntotas se estudiaron brevemente en la sección 0.5, pero ahora podemos decir más acerca de ellas. La recta $x = c$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de $y = f(x)$, si cualquiera de las siguientes cuatro proposiciones es verdadera.

1. $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$
2. $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$
3. $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$
4. $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$

Así, en la figura 6 la recta $x = 2$ es una asíntota vertical. Del mismo modo, en el ejemplo 6 las rectas $x = 2$ y $x = 3$, aunque no se muestran gráficamente, son asíntotas verticales.

De una forma similar, la recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de $y = f(x)$ si se cumple

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = b$$

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal en las figuras 6 y 7.

EJEMPLO 7 Encuentre las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de $y = f(x)$, si

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

¿Existen los límites infinitos?

En las secciones anteriores pedimos que un límite sea igual a un número real. Por ejemplo, dijimos que $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}$ no existe porque $1/(x-2)$ no se aproxima a un número real cuando x se aproxima a 2 por la derecha. Muchos matemáticos sostienen que este límite no existe, a pesar de que escribimos $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$; decir que el límite es ∞ es describir la forma particular en que el límite no existe. Aquí utilizaremos la frase "existe en el sentido infinito" para describir tales límites.

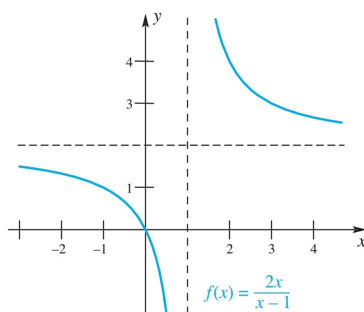


Figura 8

SOLUCIÓN Con frecuencia tenemos una asíntota vertical en un punto en donde el denominador es cero, y en este caso así es, ya que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x-1} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$$

Por otra parte,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-1/x} = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

y así $y = 2$ es una asíntota horizontal. La gráfica de $y = 2x/(x-1)$ se muestra en la figura 8. ■

Revisión de conceptos

1. Decir que $x \to \infty$ significa que ____; decir que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que ____. Dé sus respuestas en lenguaje informal.

2. Decir que $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$ significa que ____; decir que $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$ significa que ____. Dé sus respuestas en lenguaje informal.

3. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = 6$, entonces la recta ____ es una asíntota ____ de la gráfica de $y = f(x)$.

4. Si $\lim_{x\to 6^+} f(x) = \infty$, entonces la recta ____ es una asíntota ____ de la gráfica de $y = f(x)$.

Conjunto de problemas 1.5

En los problemas del 1 al 42 determine los límites.

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-5}$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{5-x^3}$

3. $\lim_{t\to-\infty} \frac{t^2}{7-t^2}$

4. $\lim_{t\to-\infty} \frac{t}{t-5}$

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-5)(3-x)}$

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-8x+15}$

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^3-100x^2}$

8. $\lim_{\theta\to-\infty} \frac{\pi\theta^5}{\theta^5-5\theta^4}$

9. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-x^2}{\pi x^3-5x^2}$

10. $\lim_{\theta\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta^2-5}$

11. $\lim_{x\to\infty} \frac{3\sqrt{x^3}+3x}{\sqrt{2x^3}}$

12. $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{\pi x^3+3x}{\sqrt{2}x^3+7x}}$

13. $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1+8x^2}{x^2+4}}$

14. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+x+3}{(x-1)(x+1)}}$

15. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1}$

16. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$

17. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1}$

18. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}$

19. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$. *Sugerencia:* divida el numerador y el denominador entre x. Observe que, para $x > 0$, $\sqrt{x^2+3}/x = \sqrt{(x^2+3)/x^2}$.

20. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{x+4}$

21. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{2x^2+3} - \sqrt{2x^2-5}\right)$. *Sugerencia:* multiplique y divida por $\sqrt{2x^2+3} + \sqrt{2x^2-5}$.

22. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)$

23. $\lim_{y\to-\infty} \frac{9y^3+1}{y^2-2y+2}$. *Sugerencia:* divida el numerador y el denominador entre y^2.

24. $\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n}$, donde $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ y n es un número natural.

25. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

26. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^3+2n+1}}$

27. $\lim_{x\to 4^+} \frac{x}{x-4}$

28. $\lim_{t\to -3^+} \frac{t^2-9}{t+3}$

29. $\lim_{t\to 3^-} \frac{t^2}{9-t^2}$

30. $\lim_{x\to \sqrt[3]{5}^+} \frac{x^2}{5-x^3}$

31. $\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2}{(x-5)(3-x)}$

32. $\lim_{\theta\to \pi^+} \frac{\theta^2}{\operatorname{sen}\theta}$

33. $\lim_{x\to 3^-} \frac{x^3}{x-3}$

34. $\lim_{\theta\to (\pi/2)^+} \frac{\pi\theta}{\cos\theta}$

35. $\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

36. $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$

37. $\lim_{x\to 0^+} \frac{[\![x]\!]}{x}$

38. $\lim_{x\to 0^-} \frac{[\![x]\!]}{x}$

39. $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$

40. $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$

41. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}$

42. $\lim_{x\to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

GC *En los problemas del 43 al 48 encuentre las asíntotas horizontales y verticales para las gráficas de las funciones indicadas. Después dibuje sus gráficas.*

43. $f(x) = \frac{3}{x+1}$

44. $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$

45. $F(x) = \frac{2x}{x-3}$

46. $F(x) = \frac{3}{9-x^2}$

47. $g(x) = \frac{14}{2x^2+7}$

48. $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}$

49. La recta $y = ax + b$ se denomina **asíntota oblicua** a la gráfica de $\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ o $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$. Encuentre la asíntota oblicua para

$$f(x) = \frac{2x^4 + 3x^3 - 2x - 4}{x^3 - 1}$$

Sugerencia: Comience por dividir el denominador entre el numerador.

50. Encuentre la asíntota oblicua para

$$f(x) = \frac{3x^3 + 4x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$$

51. Utilizando los símbolos M y δ, dé definiciones precisas de cada expresión.

(a) $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$ (b) $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$

52. Utilizando los símbolos M y N, dé definiciones precisas de cada expresión.

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

53. Dé una demostración rigurosa de que si $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = B$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) + g(x)] = A + B$$

54. Hemos dado el significado de $\lim_{x\to A} f(x)$ para $A = a, a-, a^+, -\infty, \infty$. Además, en cada caso, este límite puede ser L (finito), $-\infty, \infty$ o es posible que no exista. Construya una tabla que ilustre cada uno de los 20 casos posibles.

55. Encuentre cada uno de los siguientes límites o indique que no existe, incluso, en el sentido infinito.

(a) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ (b) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

(c) $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ (d) $\lim_{x\to\infty} x^{3/2} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

(e) $\lim_{x\to\infty} x^{-1/2} \operatorname{sen} x$ (f) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{x}\right)$

(g) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ (h) $\lim_{x\to\infty} \left[\operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{x}\right) - \operatorname{sen} x\right]$

56. La Teoría Especial de la Relatividad de Einstein dice que la masa $m(v)$ de un objeto está relacionada con su velocidad v por medio de

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Aquí, m_0 es la masa en reposo y c es la velocidad de la luz. ¿Qué es $\lim_{v\to c^-} m(v)$?

GC *Utilice una computadora o una calculadora gráfica para encontrar los límites en los problemas del 57 al 64. Empiece por la gráfica de la función en una ventana adecuada.*

57. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+x+1}{2x^2-1}$

58. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{2x^2-3x}{5x^2+1}}$

59. $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{2x^2+3x} - \sqrt{2x^2-5}\right)$

60. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{3x^2+1}}$

61. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$

62. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

63. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

64. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}$

CAS *Encuentre los límites unilaterales en los problemas del 65 al 71. Comience por graficar la función en una ventana adecuada. Su computadora puede indicar que alguno de estos límites no existen, pero si es así, usted debe ser capaz de interpretar la respuesta como ∞ o −∞.*

65. $\lim_{x\to 3^-} \frac{\operatorname{sen}|x-3|}{x-3}$

66. $\lim_{x\to 3^-} \frac{\operatorname{sen}|x-3|}{\tan(x-3)}$

67. $\lim_{x\to 3^-} \frac{\cos(x-3)}{x-3}$

68. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{x-\pi/2}$

69. $\lim_{x\to 0^+} \left(1+\sqrt{x}\right)^{1/\sqrt{x}}$

70. $\lim_{x\to 0^+} \left(1+\sqrt{x}\right)^{1/x}$

71. $\lim_{x\to 0^+} \left(1+\sqrt{x}\right)^{x}$

Respuestas a la revisión de conceptos: 1. x aumenta sin cota; $f(x)$ se aproxima a L cuando x aumenta sin cota. **2.** $f(x)$ aumenta sin cota cuando x se aproxima a c por la derecha; $f(x)$ disminuye sin cota cuando x tiende a c por la izquierda. **3.** $y = 6$; horizontal **4.** $x = 6$; vertical.

1.6 Continuidad de funciones

En matemáticas y ciencias utilizamos la palabra *continuo* para describir un proceso que sigue sin cambios abruptos. De hecho, nuestra experiencia nos lleva a suponer que esto es una característica esencial de muchos procesos naturales. Es esta noción, con respecto a funciones, la que ahora queremos precisar. En las tres gráficas que se muestran en la figura 1, sólo la tercera exhibe continuidad en c. En las primeras dos gráficas, $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe, o bien existe pero no es igual a $f(c)$. Sólo en la tercera gráfica $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

> **Una máquina discontinua**
>
> Un buen ejemplo de una máquina de discontinuidades es la máquina de servicio postal, que (en 2005, en Estados Unidos) cobraba \$0.37 por una carta de 1 onza, pero \$0.60 por una carta de un poco más de una onza.

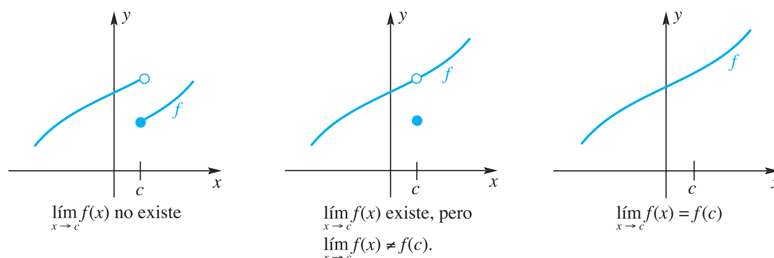


Figura 1

He aquí la definición formal.

> **Definición** Continuidad en un punto
>
> Sea f definida en un intervalo abierto que contiene a c. Decimos que f es **continua** en c si
>
> $$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Con esta definición queremos decir que necesitamos tres cosas:

1. que $\lim_{x \to c} f(x)$ existe,
2. que $f(c)$ existe (es decir, c está en el dominio de f) y
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Si cualquiera de estas tres no se cumple, entonces f es **discontinua** en c. Así, las funciones representadas por la primera y segunda gráficas de la figura 1 son discontinuas en c. Sin embargo, no parecen ser discontinuas en otros puntos de sus dominios.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x \neq 2$. ¿Cómo debe definirse f en $x = 2$ para hacer que sea continua allí?

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

Por lo tanto, definimos $f(2) = 4$. La gráfica de la función resultante se muestra en la figura 2. De hecho, vemos que $f(x) = x + 2$ para toda x. ■

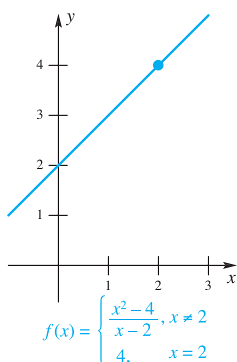


Figura 2

Un punto de discontinuidad c se denomina **removible**, si la función puede definirse o redefinirse en c, de modo que se haga continua la función. De otra forma, un punto de discontinuidad se denomina **no removible**. La función f del ejemplo 1 tiene una discontinuidad removible en 2, ya que podríamos definir $f(2) = 4$ y la función sería continua allí.

Continuidad de funciones conocidas La mayoría de las funciones con las que nos enfrentaremos en este texto son (1) continuas en todas partes o (2) continuas en todas partes, excepto en algunos puntos. En particular, el teorema 1.3B implica el siguiente resultado.

> **Teorema A** **Continuidad de funciones polinomiales y racionales**
>
> Una función polinomial es continua en todo número real c. Una función racional es continua en todo número real c en su dominio; es decir, en todas partes, excepto en donde su denominador es cero.

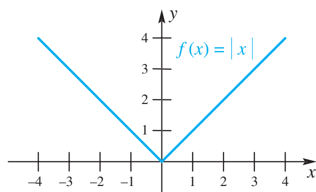


Figura 3

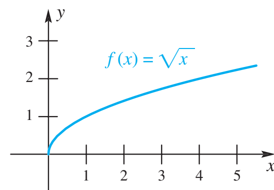


Figura 4

Recuerde la función valor absoluto $f(x) = |x|$; su gráfica se muestra en la figura 3. Para $x < 0, f(x) = -x$, es una función polinomial; para $x > 0, f(x) = x$, es otra función polinomial. Así, por el teorema A, $|x|$ es continua en todos los números diferentes de cero. Pero

$$\lim_{x\to 0}|x| = 0 = |0|$$

(véase el problema 27 de la sección 1.2). Por lo tanto, $|x|$ también es continua en cero por lo que es continua en todas partes.

Por medio del teorema principal sobre límites (teorema 1.3A)

$$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} x} = \sqrt[n]{c}$$

siempre que $c > 0$, cuando n es par. Esto significa que $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es continua en cada punto donde tiene sentido hablar acerca de continuidad. En particular, $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en cada número real $c > 0$ (véase la figura 4). Resumimos.

Teorema B Continuidad de las funciones valor absoluto y raíz *n*-ésima

La función valor absoluto es continua en todo número real c. Si n es impar, la función raíz n-ésima es continua en todo número real c; si n es par, la función raíz n-ésima es continua en todo número real positivo.

Continuidad en operaciones con funciones

¿Las operaciones ordinarias entre funciones preservan la continuidad? Sí, de acuerdo con el teorema siguiente. En éste, f y g son funciones, k es una constante y n es un entero positivo.

Teorema C Continuidad en operaciones con funciones

Si f y g son continuas en c, entonces también lo son $kf, f + g, f - g, f \cdot g, f/g$ (con tal que $g(c) \neq 0$), f^n, $\sqrt[n]{f}$ (siempre que $f(c) > 0$, si n es par).

Demostración Todos estos resultados son consecuencias fáciles de los correspondientes hechos para límites del teorema 1.3A. Por ejemplo, ese teorema, combinado con el hecho de que f y g son continuas en c, produce

$$\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = f(c)g(c)$$

Esto es precisamente lo que significa decir que $f \cdot g$ es continua en c. ■

EJEMPLO 2 ¿En qué números $F(x) = (3|x| - x^2)/\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)$ es continua?

SOLUCIÓN No necesitamos considerar números no positivos, ya que F no está definida en tales números. Para cualquier número positivo, todas las funciones $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $|x|$, y x^2 son continuas (teoremas A y B). Se deduce, con base en el teorema C, que $3|x|$, $3|x| - x^2$, $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$, y por último,

$$\frac{(3|x| - x^2)}{\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)}$$

son continuas en cada número positivo. ■

La continuidad de funciones trigonométricas se deduce del teorema 1.4A.

Teorema D Continuidad de funciones trigonométricas

Las funciones seno y coseno son continuas en todo número real c. Las funciones tan x, cot x, sec x y csc x son continuas en todo número real c en sus dominios.

Demostración El teorema 1.4A dice que para todo número real c en el dominio de la función $\lim_{x\to c} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c$, $\lim_{x\to c} \cos x = \cos c$, y así sucesivamente para las seis funciones trigonométricas. Éstas son exactamente las condiciones requeridas para que estas funciones sean continuas en cada número real en sus respectivos dominios. ■

EJEMPLO 3 Determine todos los puntos de discontinuidad de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x(1-x)}$, $x \neq 0, 1$. Clasifique cada punto de discontinuidad como removible o no removible.

SOLUCIÓN Mediante el teorema D, el numerador es continuo en todo número real. El denominador también es continuo en todo número real, pero cuando $x = 0$ o $x = 1$, el denominador es 0. Por lo tanto, con base en el teorema C, f es continua en todo número real, excepto $x = 0$ y $x = 1$. Como

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1-x)} = (1)(1) = 1$$

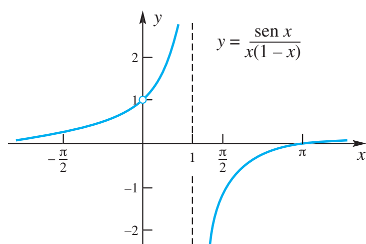


Figura 5

podríamos definir $f(0) = 1$ y, allí, la función sería continua. Por lo que $x = 0$ es una discontinuidad removible. Además, como

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x(1-x)} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x(1-x)} = \infty$$

no existe forma de definir $f(1)$ para hacer que f sea continua en $x = 1$. Por lo tanto, $x = 1$ es una discontinuidad no removible. Una gráfica de $y = f(x)$ se muestra en la figura 5. ■

Existe otra operación con funciones, la composición, que será muy importante en el trabajo posterior. También preserva la continuidad.

Teorema E **Teorema del límite de composición de funciones**

Si $\lim_{x\to c} g(x) = L$ y si f es continua en L, entonces

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = f(L)$$

En particular, si g es continua en c y f es continua en $g(c)$, entonces la composición $f \circ g$ es continua en c.

Demostración del teorema E (opcional)

Demostración Sea $\varepsilon > 0$ dada. Como f es continua en L existe una $d_1 > 0$ correspondiente, tal que

$$|t - L| < \delta_1 \Rightarrow |f(t) - f(L)| < \varepsilon$$

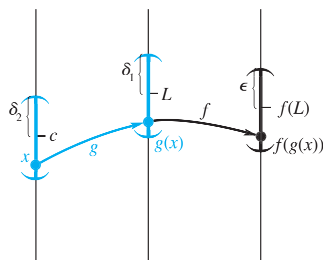


Figura 6

y así (véase la figura 6)

$$|g(x) - L| < \delta_1 \Rightarrow |f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$$

Pero ya que $\lim_{x\to c} g(x) = L$, para una $\delta_1 > 0$ dada existe una correspondiente $\delta_2 > 0$, tal que

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_1$$

Cuando reunimos estos dos hechos, tenemos

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$$

Esto demuestra que

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L)$$

La segunda proposición en el teorema E se deduce de la observación de que si g es continua en c entonces $L = g(c)$. ■

EJEMPLO 4 Demuestre que $h(x) = |x^2 - 3x + 6|$ es continua en todo número real.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 3x + 6$. Ambas son continuas en cada número real y, por lo tanto, su composición

$$h(x) = f(g(x)) = |x^2 - 3x + 6|$$

también lo es. ■

EJEMPLO 5 Demuestre que

$$h(x) = \operatorname{sen} \frac{x^4 - 3x + 1}{x^2 - x - 6}$$

es continua excepto en 3 y −2.

SOLUCIÓN $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$. Así, la función racional

$$g(x) = \frac{x^4 - 3x + 1}{x^2 - x - 6}$$

es continua excepto en 3 y −2 (teorema A). Del teorema D sabemos que la función seno es continua en todo número real. Así, con base en el teorema E concluimos que, como $h(x) = \operatorname{sen}(g(x))$, h también es continua excepto en 3 y −2. ■

Continuidad en un intervalo Hasta el momento hemos estudiado continuidad en un punto. Ahora, deseamos analizar la continuidad en un intervalo. La continuidad en un intervalo tiene que significar continuidad en cada punto de ese intervalo. Esto es exactamente lo que significa para un intervalo *abierto*.

Cuando consideramos un intervalo cerrado $[a, b]$, nos enfrentamos a un problema. Podría ser que f incluso no esté definida a la izquierda de a (por ejemplo, esto ocurre para $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 0$), así que hablando estrictamente, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe. Elegimos darle la vuelta a este problema diciendo que f es continua en $[a, b]$ si es continua en cada punto de (a, b) y si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$. Resumimos esto en una definición formal.

Definición **Continuidad en un intervalo**

La función f es **continua por la derecha** en a si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y **continua por la izquierda** en b si $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Decimos que f es **continua en un intervalo abierto** si es continua en cada punto de ese intervalo. Es **continua en el intervalo cerrado** $[a, b]$ si es continua en (a, b), continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

Por ejemplo, es correcto decir que $f(x) = 1/x$ es continua en $(0, 1)$ y que $g(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0, 1]$.

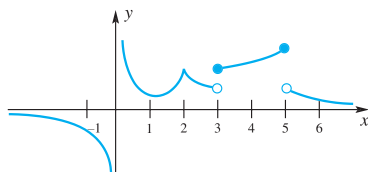


Figura 7

EJEMPLO 6 Mediante la definición anterior describa las propiedades de la continuidad de la función cuya gráfica está dibujada en la figura 7.

SOLUCIÓN La función parece que es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$ y $(5, \infty)$ y también en el intervalo cerrado $[3, 5]$ ■

EJEMPLO 7 ¿Cuál es el intervalo más grande sobre el cual la función definida por $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es continua?

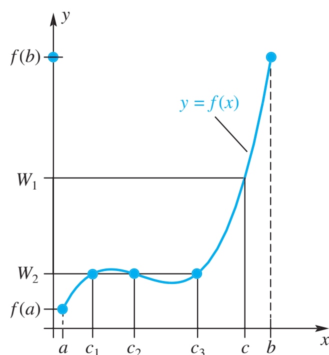


Figura 8

SOLUCIÓN El dominio de g es el intervalo $[-2, 2]$. Si c pertenece al intervalo abierto $(-2, 2)$, entonces, por el teorema E, g es continua en c; de aquí que g es continua en $(-2, 2)$. Los límites laterales son

$$\lim_{x\to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - \left(\lim_{x\to -2^+} x\right)^2} \sqrt{4 - 4} = 0 = g(-2)$$

y

$$\lim_{x\to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - \left(\lim_{x\to 2^-} x\right)^2} = \sqrt{4 - 4} = 0 = g(2)$$

Esto implica que g es continua por la derecha en -2 y continua por la izquierda en 2. Así, g es continua en su dominio, el intervalo cerrado $[-2, 2]$. ■

De manera intuitiva, que f sea continua en $[a, b]$ significa que la gráfica de f en $[a, b]$ no debe tener saltos, de modo que debemos ser capaces de "dibujar" la gráfica de f desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ sin levantar nuestro lápiz del papel. Así, la función f debe tomar todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. Esta propiedad se establece de manera más precisa en el teorema F.

Teorema F Teorema del valor intermedio

Sea f una función definida en $[a, b]$ y sea W un número entre $f(a)$ y $f(b)$. Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe al menos un número c entre a y b, tal que $f(c) = W$.

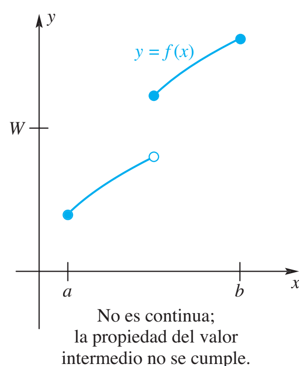


Figura 9

La figura 8 muestra la gráfica de una función $f(x)$ que es continua en $[a, b]$. El teorema del valor intermedio dice que para toda W en $(f(a), f(b))$ debe existir una c en $[a, b]$, tal que $f(c) = W$. En otras palabras, f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. La continuidad es necesaria para este teorema, pues de otra forma es posible encontrar una función f y un número W entre $f(a)$ y $f(b)$, tal que no exista una c en $[a, b]$ que satisfaga $f(c) = W$. La figura 9 muestra un ejemplo de tal función.

Parece claro que la continuidad es suficiente, aunque una demostración formal de este resultado es difícil. Dejamos la demostración para obras más avanzadas.

El inverso de este teorema, el cual no es cierto en general, dice que si f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces f es continua. Las figuras 8 y 10 muestran funciones que toman todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$, pero la función en la figura 10 no es continua en $[a, b]$. Sólo porque una función tenga la propiedad del valor intermedio no significa que deba ser continua.

El teorema del valor intermedio puede usarse para decirnos algo acerca de las soluciones de ecuaciones, como lo muestra el ejemplo siguiente.

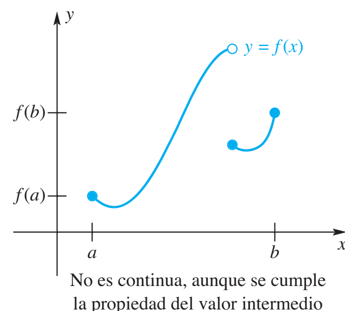


Figura 10

EJEMPLO 8 Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que la ecuación $x - \cos x = 0$ tiene una solución entre $x = 0$ y $x = \pi/2$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = x - \cos x$, y sea $W = 0$. Entonces $f(0) = 0 - \cos 0 = -1$ y $f(\pi/2) = \pi/2 - \cos \pi/2 = \pi/2$. Como f es continua en $[0, \pi/2]$ y puesto que $W = 0$ está entre $f(0)$ y $f(\pi/2)$, el teorema del valor intermedio implica la existencia de una c en el intervalo $(0, \pi/2)$ con la propiedad de que $f(c) = 0$. Tal c es una solución para la ecuación $x - \cos x = 0$. La figura 11 sugiere que existe exactamente una de tales c.

Podemos ir un paso más adelante. El punto medio del intervalo $[0, \pi/2]$ es el punto $x = \pi/4$. Cuando evaluamos $f(\pi/4)$ obtenemos

$$f(\pi/4) = \frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.0782914$$

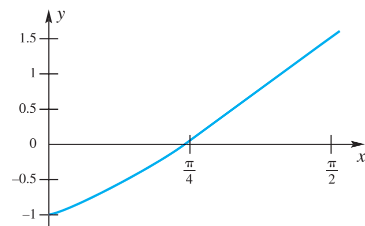


Figura 11

que es mayor a cero. Así, $f(0) < 0$ y $f(\pi/4) > 0$, de tal manera que otra aplicación del teorema del valor intermedio nos dice que existe una c entre 0 y $\pi/4$, tal que $f(c) = 0$. Hemos reducido el intervalo que contiene a la c deseada de $[0, \pi/2]$ a $[0, \pi/4]$. Nada nos

impide seleccionar el punto medio de $[0, \pi/4]$ y evaluar f en ese punto, y por ello reducir aún más el intervalo que contiene a c. Este proceso puede continuar de manera indefinida hasta que encontremos que c está en un intervalo suficientemente pequeño. Este método para obtener una solución se denomina *método de bisección*, y los estudiaremos en la sección 3.7. ■

El teorema del valor intermedio también puede conducir a algunos resultados sorprendentes.

EJEMPLO 9 Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que en un anillo circular siempre existen dos puntos opuestos con la misma temperatura.

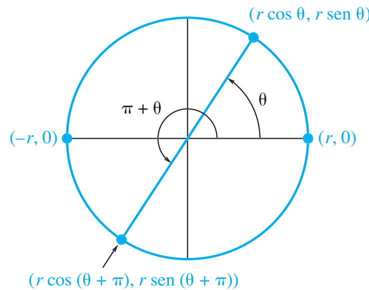


Figura 12

SOLUCIÓN Elija coordenadas para este problema de modo que el centro del anillo sea el origen, y sea r el radio del anillo. (Véase la figura 12). Defina $T(x, y)$ como la temperatura en el punto (x, y). Considere un diámetro del círculo que forma un ángulo θ con el eje x y defina $f(\theta)$ como la diferencia de las temperaturas entre los puntos que forman ángulos de θ y $\theta + \pi$, esto es,

$$f(\theta) = T(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) - T(r\cos(\theta+\pi), r\,\text{sen}(\theta+\pi))$$

Con esta definición

$$f(0) = T(r, 0) - T(-r, 0)$$
$$f(\pi) = T(-r, 0) - T(r, 0) = -\left[T(r, 0) - T(-r, 0)\right] = -f(0)$$

Así, $f(0)$ y $f(\pi)$ son cero, o una es positiva y la otra es negativa. Si ambas son cero, entonces hemos encontrado los dos puntos requeridos. De otra forma, podemos aplicar el teorema del valor intermedio. Suponiendo que la temperatura varía de manera continua, concluimos que existe c entre 0 y π, tal que $f(c) = 0$. Así, para los dos puntos con ángulos c y $c + \pi$, las temperaturas son iguales. ■

Revisión de conceptos

1. Una función f es continua en c si _______ $= f(c)$.

2. La función $f(x) = [\![x]\!]$ es discontinua en _______.

3. Se dice que una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, si es continua en cada punto de (a, b) y si _______ y _______.

4. El teorema del valor intermedio dice que si una función f es continua en $[a, b]$ y W es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c entre _______ y _______ tal que _______.

Conjunto de problemas 1.6

En los problemas del 1 al 15 establezca si la función indicada es continua en 3. Si no es continua, diga por qué.

1. $f(x) = (x-3)(x-4)$

2. $g(x) = x^2 - 9$

3. $h(x) = \dfrac{3}{x-3}$

4. $g(t) = \sqrt{t-4}$

5. $h(t) = \dfrac{|t-3|}{t-3}$

6. $h(t) = \dfrac{|\sqrt{(t-3)^4}|}{t-3}$

7. $f(t) = |t|$

8. $g(t) = |t-2|$

9. $h(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$

10. $f(x) = \dfrac{21-7x}{x-3}$

11. $r(t) = \begin{cases} \dfrac{t^3-27}{t-3} & \text{si } t \neq 3 \\ 27 & \text{si } t = 3 \end{cases}$

12. $r(t) = \begin{cases} \dfrac{t^3-27}{t-3} & \text{si } t \neq 3 \\ 23 & \text{si } t = 3 \end{cases}$

13. $f(t) = \begin{cases} t-3 & \text{si } t \le 3 \\ 3-t & \text{si } t > 3 \end{cases}$

14. $f(t) = \begin{cases} t^2-9 & \text{si } t \le 3 \\ (3-t)^2 & \text{si } t > 3 \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} -3x+7 & \text{si } x \le 3 \\ -2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

16. Con base en la gráfica de g (véase la figura 13), indique los valores en donde g es discontinua. Para cada uno de estos valores establezca si g es continua por la derecha, por la izquierda o ninguna.

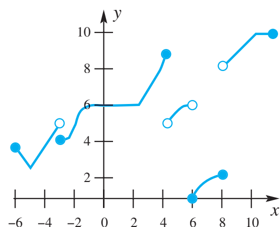


Figura 13

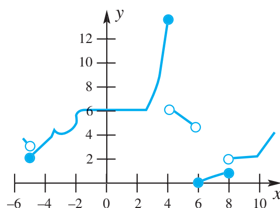


Figura 14

17. A partir de la gráfica de h dada en la figura 14, indique los intervalos en los que h es continua.

En los problemas del 18 al 23 la función dada no está definida en cierto punto. ¿Cómo debe definirse para hacerla continua en ese punto? (Véase el ejemplo 1).

18. $f(x) = \dfrac{x^2 - 49}{x - 7}$

19. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 18}{3 - x}$

20. $g(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$

21. $H(t) = \dfrac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}$

22. $\phi(x) = \dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{x + 1}$

23. $F(x) = \operatorname{sen}\dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

En los problemas del 24 al 35, ¿en qué puntos, si los hay, las funciones son discontinuas?

24. $f(x) = \dfrac{3x + 7}{(x - 30)(x - \pi)}$

25. $f(x) = \dfrac{33 - x^2}{x\pi + 3x - 3\pi - x^2}$

26. $h(\theta) = |\operatorname{sen}\theta + \cos\theta|$

27. $r(\theta) = \tan\theta$

28. $f(u) = \dfrac{2u + 7}{\sqrt{u + 5}}$

29. $g(u) = \dfrac{u^2 + |u - 1|}{\sqrt[3]{u + 1}}$

30. $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 + x^2}}$

31. $G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

32. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

33. $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

34. $f(t) = [\![t]\!]$

35. $g(t) = [\![t + \frac{1}{2}]\!]$

36. Dibuje la gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes.

(a) Su dominio es $[-2, 2]$.

(b) $f(-2) = f(-1) = f(1) = f(2) = 1$.

(c) Es discontinua en -1 y 1.

(d) Es continua por la derecha en -1 y continua por la izquierda en 1.

37. Haga el bosquejo de la gráfica de una función que tenga dominio $[0, 2]$ y sea continua en $[0, 2)$, pero no en $[0, 2]$.

38. Bosqueje la gráfica de una función que tenga dominio $[0, 6]$ y sea continua en $[0, 2]$ y en $(2, 6]$, pero que no sea continua en $[0, 6]$.

39. Haga el bosquejo de la gráfica de una función que tenga dominio $[0, 6]$ y sea continua en $(0, 6)$ pero no en $[0, 6]$.

40. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ -x & \text{si } x \text{ si es irracional} \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de esta función lo mejor que pueda y decida en dónde es continua.

En los problemas del 41 al 48 determine si la función es continua en el punto dado c. Si la función no es continua, determine si la discontinuidad es removible o no removible.

41. $f(x) = \operatorname{sen} x;\ c = 0$

42. $f(x) = \dfrac{x^2 - 100}{x - 10};\ c = 10$

43. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x};\ c = 0$

44. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x};\ c = 0$

45. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

46. $F(x) = x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x};\ c = 0$

47. $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x};\ c = 0$

48. $f(x) = \dfrac{4 - x}{2 - \sqrt{x}};\ c = 4$

49. Una compañía de teléfonos celulares cobra \$0.12 por hacer una llamada más \$0.08 por minuto o fracción (por ejemplo, una llamada telefónica que dure 2 minutos y 5 segundos cuesta \$0.12 + 3 × \$0.08). Haga el bosquejo de una gráfica del costo de una llamada como función de la duración t de la llamada. Analice la continuidad de esta función.

50. Una compañía que renta automóviles cobra \$20 por día, con 200 millas incluidas. Por cada 100 millas adicionales, o cualquier fracción de éstas, la compañía cobra \$18. Haga el bosquejo de una gráfica del costo por la renta de un automóvil durante un día como función de las millas recorridas. Analice la continuidad de esta función.

51. Una compañía de taxis cobra \$2.50 durante el primer cuarto de milla y \$0.20 por cada $\frac{1}{8}$ de milla adicional. Haga un bosquejo del costo de un viaje en taxi como función del número de millas recorridas. Analice la continuidad de esta función.

52. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que $x^3 + 3x - 2 = 0$ tiene una solución real entre 0 y 1.

53. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que $(\cos t)t^3 + 6\operatorname{sen}^5 t - 3 = 0$ tiene una solución real entre 0 y 2π.

GC **54.** Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, 5]$. Haga un bosquejo de la gráfica de $y = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ en $[0, 5]$. En realidad, ¿cuántas soluciones tiene esta ecuación?

GC **55.** Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que $\sqrt{x} - \cos x = 0$ tiene una solución entre 0 y $\pi/2$. Haga un acercamiento de la gráfica de $y = \sqrt{x} - \cos x$ para determinar un intervalo que tenga longitud 0.1 y que contenga esta solución.

56. Demuestre que la ecuación $x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = 0$ tiene al menos una solución real.

57. Pruebe que f es continua en c si y sólo si $\lim\limits_{t \to 0} f(c + t) = f(c)$.

58. Demuestre que si f es continua en c y $f(c) > 0$, existe un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$, tal que $f(x) > 0$ en este intervalo.

59. Demuestre que si f es continua en $[0, 1]$ y ahí satisface $0 \le f(x) \le 1$, entonces f tiene un *punto fijo*; esto es, existe un número c en $[0, 1]$, tal que $f(c) = c$. *Sugerencia:* aplique el teorema del valor intermedio a $g(x) = x - f(x)$.

60. Encuentre los valores de a y b de modo que la siguiente función sea continua en todas partes.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 3x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

61. Una liga estirada cubre el intervalo [0, 1]. Los extremos se sueltan y la liga se contrae de modo que cubre el intervalo $[a, b]$ con $a \ge 0$ y $b \le 1$. Demuestre que esto resulta en un punto de la liga (en realidad exactamente un punto) que estará en donde estaba originalmente. Véase el problema 59.

62. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Entonces $f(-2) = -\dfrac{1}{3}$ y $f(2) = 1$. ¿El teorema del valor intermedio implica la existencia de un número c entre −2 y 2, tal que $f(c) = 0$? Explique.

63. Iniciando a las 4 a. m., un excursionista escala lentamente hacia la cima de una montaña, a donde llega al mediodía. Al día siguiente, regresa a por la misma ruta, iniciando a las 5 a. m.; a las 11 de la mañana llega al pie de la montaña. Demuestre que en algún punto a lo largo de la ruta su reloj mostraba la misma hora en ambos días.

64. Sea D una región acotada, pero arbitraria en el primer cuadrante. Dado un ángulo θ, $0 \le \theta \le \pi/2$, D puede ser circunscrita por medio de un rectángulo cuya base forme un ángulo θ con el eje x, como se muestra en la figura 15. Demuestre que para algún ángulo este rectángulo es un cuadrado. (Esto significa que *cualquier* región acotada puede ser encerrada dentro de un *cuadrado*).

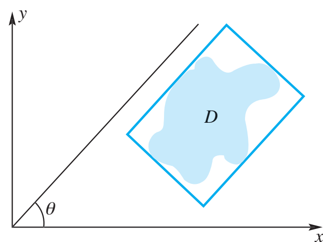


Figura 15

65. La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre un objeto que tiene masa m y que se encuentra a una distancia r del centro de la Tierra es

$$g(r) = \begin{cases} \dfrac{GMmr}{R^3}, & \text{si } r < R \\ \dfrac{GMm}{r^2}, & \text{si } r \ge R \end{cases}$$

Aquí, G es la constante gravitacional, M es la masa de la Tierra y R es el radio de la Tierra. ¿Es g una función continua de r?

66. Suponga que f es continua en $[a, b]$ y nunca es cero allí. ¿Es posible que f cambie de signo en $[a, b]$? Explique.

67. Sea $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para toda x y y, y suponga que f es continua en $x = 0$.

(a) Demuestre que f es continua en todas partes.

(b) Demuestre que existe una constante m, tal que $f(t) = mt$ para toda t (véase el problema 43 de la sección 0.5).

68. Pruebe que si $f(x)$ es una función continua en un intervalo, entonces también lo es la función $|f(x)| = \sqrt{(f(x))^2}$.

69. Demuestre que si $g(x) = |f(x)|$ es continua, no necesariamente es cierto que $f(x)$ sea continua.

70. Sea $f(x) = 0$, si x es irracional, y sea $f(x) = 1/q$, si x es el número racional p/q en su mínima expresión $(q > 0)$.

(a) Dibuje, lo mejor que pueda, la gráfica de f en (0, 1).

(b) Demuestre que f es continua en cada número irracional en (0, 1), pero es discontinua en cada número racional en (0, 1).

71. Un bloque delgado en forma de triángulo equilátero con lado de longitud 1 unidad tiene su cara en la vertical del plano xy con un vértice en el origen. Bajo la influencia de la gravedad, girará alrededor de V hasta que un lado golpee el piso, en el eje x (véase la figura 16). Denótese con x la abscisa inicial del punto medio M, del lado opuesto a V, y sea $f(x)$ la abscisa final de este punto. Suponga que el bloque queda en equilibrio cuando M está directamente arriba de V.

(a) Determine el dominio y rango de f.

(b) En el dominio de f, ¿en dónde es discontinua?

(c) Identifique cualesquiera puntos fijos de f (véase el problema 59).

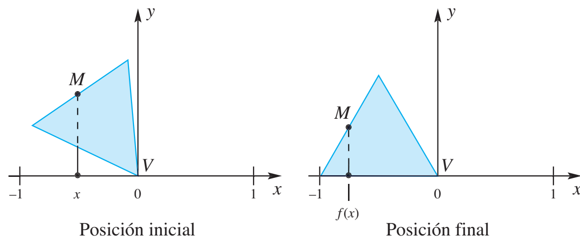


Figura 16

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\lim_{x \to c} f(x)$ **2.** Todos los enteros **3.** $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ **4.** a; b; $f(c) = W$

1.7 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

A cada una de las siguientes aseveraciones responda con verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

1. Si $f(c) = L$, entonces $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

2. Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$, entonces $f(c) = L$.

3. Si $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, entonces $f(c)$ existe.

4. Si $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$, tal que $0 < |x| < \delta$ implica $|f(x)| < \varepsilon$.

5. Si $f(c)$ no está definida, entonces $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe.

6. Las coordenadas del agujero en la gráfica de $y = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ son (5, 10).

7. Si $\pi(x)$ es un polinomio, entonces $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$.

8. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no existe.

9. Para todo número real c, $\lim_{x \to c} \tan x = \tan c$.

10. $\tan x$ es continua en todo punto de su dominio.

11. La función $f(x) = 2\ \text{sen}^2 x - \cos x$ es continua en todos los números reales.

12. Si f es continua en c, entonces $f(c)$ existe.

13. Si f es continua en el intervalo $(1, 3)$, entonces f es continua en 2.

14. Si f es continua en $[0, 4]$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe.

15. Si f es una función continua tal que $A \le f(x) \le B$ para toda x, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe y satisface $A \le \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \le B$.

16. Si f es continua en (a, b), entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ para toda c en (a, b).

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\text{sen}\ x}{x} = 1$

18. Si la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $y = f(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$.

19. La gráfica de $y = \tan x$ tiene muchas asíntotas horizontales.

20. La gráfica de $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ tiene dos asíntotas verticales.

21. $\lim\limits_{t\to 1^+} \dfrac{2t}{t - 1} = \infty$.

22. Si $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$, entonces f es continua en $x = c$.

23. Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to c} x\right)$, entonces f es continua en $x = c$.

24. La función $f(x) = [\![x/2]\!]$ es continua en $x = 2.3$.

25. Si $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) > 0$, entonces $f(x) < 1.001 f(2)$ para toda x en algún intervalo que contenga a 2.

26. Si $\lim\limits_{x\to c} [f(x) + g(x)]$ existe, entonces existen $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x)$.

27. Si $0 \le f(x) \le 3x^2 + 2x^4$ para toda x, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

28. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$, entonces $L = M$.

29. Si $f(x) \ne g(x)$ para toda x, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x) \ne \lim\limits_{x\to c} g(x)$.

30. Si $f(x) < 10$ para toda x y $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to 2} f(x) < 10$.

31. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, entonces $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$.

32. Si f es continua y positiva en $[a, b]$, entonces $1/f$ debe tomar todos los valores entre $1/f(a)$ y $1/f(b)$.

Problemas de examen

En los problemas del 1 al 22 encuentre los límites indicados o establezca que no existen.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x - 2}{x + 2}$ **2.** $\lim\limits_{u\to 1} \dfrac{u^2 - 1}{u + 1}$

3. $\lim\limits_{u\to 1} \dfrac{u^2 - 1}{u - 1}$ **4.** $\lim\limits_{u\to 1} \dfrac{u + 1}{u^2 - 1}$

5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1 - 2/x}{x^2 - 4}$ **6.** $\lim\limits_{z\to 2} \dfrac{z^2 - 4}{z^2 + z - 6}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\text{sen}\ 2x}$ **8.** $\lim\limits_{y\to 1} \dfrac{y^3 - 1}{y^2 - 1}$

9. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ **10.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$ **12.** $\lim\limits_{x\to 1/2^+} [\![4x]\!]$

13. $\lim\limits_{t\to 2^-} ([\![t]\!] - t)$ **14.** $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\ 5x}{3x}$ **16.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{3x}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - 1}{x + 2}$ **18.** $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\text{sen}\ t}{t}$

19. $\lim\limits_{t\to 2} \dfrac{t + 2}{(t - 2)^2}$ **20.** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x}{x}$

21. $\lim\limits_{x\to \pi/4^-} \tan 2x$ **22.** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1 + \text{sen}\ x}{x}$

23. Por medio de argumentos ε-δ demuestre que $\lim\limits_{x\to 3}(2x + 1) = 7$.

24. Sea $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

Determine cada valor.

(a) $f(1)$ (b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

25. Con respecto a f del problema 24. (a) ¿Cuáles son los valores de x en los cuales f es discontinua? (b) ¿Cómo se debe definir f en $x = -1$ para hacer que sea continua allí?

26. Proporcione la definición ε–δ en cada caso.

(a) $\lim\limits_{u\to a} g(u) = M$ (b) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$

27. Si $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = -2$ y si g es continua en $x = 3$, encuentre cada valor.

(a) $\lim\limits_{x\to 3} [2f(x) - 4g(x)]$ (b) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

(c) $g(3)$ (d) $\lim\limits_{x\to 3} g(f(x))$

(e) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{f^2(x) - 8g(x)}$ (f) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|g(x) - g(3)|}{f(x)}$

28. Dibuje la gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes.

(a) Su dominio es $[0, 6]$.

(b) $f(0) = f(2) = f(4) = f(6) = 2$.

(c) f es continua, excepto en $x = 2$.

(d) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 3$.

29. Sea $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \le 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

Determine a y b de modo que f sea continua en todas partes.

30. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que la ecuación $x^5 - 4x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene al menos una solución entre $x = 2$ y $x = 3$.

En los problemas del 31 al 36 determina las ecuaciones de todas las asíntotas horizontales y verticales para la función dada.

31. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ **32.** $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

33. $F(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ **34.** $G(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

35. $h(x) = \tan 2x$ **36.** $H(x) = \dfrac{\text{sen}\ x}{x^2}$

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

1. Sea $f(x) = x^2$. Determine y simplifique cada uno de lo siguiente.

(a) $f(2)$

(b) $f(2.1)$

(c) $f(2.1) - f(2)$

(d) $\dfrac{f(2.1) - f(2)}{2.1 - 2}$

(e) $f(a + h)$

(f) $f(a + h) - f(a)$

(g) $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a}$

(h) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a}$

2. Repita las partes desde (a) hasta (h) del problema 1 para la función $f(x) = 1/x$.

3. Repita las partes desde (a) hasta (h) del problema 1 para la función $f(x) = \sqrt{x}$.

4. Repita las partes desde (a) hasta (h) del problema 1 para la función $f(x) = x^3 + 1$.

5. Escriba los primeros dos términos en el desarrollo de los binomios siguientes:

(a) $(a + b)^3$

(b) $(a + b)^4$

(c) $(a + b)^5$

6. Con base en sus resultados del problema 5 haga una conjetura acerca de los primeros dos términos en el desarrollo de $(a + b)^n$ para una n arbitraria.

7. Utilice una identidad trigonométrica para escribir $\operatorname{sen}(x + h)$ en términos de $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} h$, $\cos x$ y $\cos h$.

8. Utilice una identidad trigonométrica para escribir $\cos(x + h)$ en términos de $\cos x$, $\cos h$, $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen} h$.

9. Una rueda con centro en el origen y radio de 10 centímetros gira en sentido contrario a las manecillas del reloj con una rapidez de 4 revoluciones por segundo. Un punto P en el borde de la rueda se encuentra en la posición $(10, 0)$ en el instante $t = 0$.

(a) ¿Cuáles son las coordenadas de P en los instantes $t = 1, 2, 3$?

(b) ¿En qué primer instante el punto P regresará a la posición inicial $(10, 0)$?

10. Suponga que una pompa de jabón conserva su forma esférica cuando se expande. En el instante $t = 0$ la burbuja de jabón tiene radio de 2 centímetros. En el instante $t = 1$, el radio aumentó a 2.5 centímetros. En este intervalo de 1 segundo, ¿cuánto cambió el volumen?

11. Un aeroplano despega de un aeropuerto al mediodía y vuela con rumbo norte a 300 millas por hora. Otro avión parte del mismo aeropuerto una hora después y vuela con rumbo este a 400 millas por hora.

(a) ¿Cuáles son las posiciones de los aeroplanos a las 2:00 P. M.?

(b) ¿Cuál es la distancia que separa a los dos aeroplanos a las 2:00 P. M.?

(c) ¿Cuál es la distancia entre los aeroplanos a las 2:15 P. M.?

CAPÍTULO 2

La derivada

2.1 Dos problemas con el mismo tema

Nuestro primer problema es muy antiguo; se remonta a la época del gran científico griego Arquímedes (287-212 A. C.). Nos referimos al problema de la *pendiente de la recta tangente*. Nuestro segundo problema es más reciente. Surgió con los intentos de Kepler (1571-1630), Galileo (1564-1642), Newton (1642-1727) y otros para describir la velocidad de un cuerpo en movimiento. Es el problema de la *velocidad instantánea*.

Los dos problemas, uno geométrico y el otro mecánico, parecen no estar muy relacionados. En este caso, las apariencias engañan. Los dos problemas son gemelos idénticos.

La recta tangente La noción de Euclides de una tangente, como una recta que toca a una curva en un solo punto es totalmente correcta para circunferencias (véase la figura 1); pero completamente insatisfactoria para otras curvas (véase la figura 2). La idea de una tangente, en P a una curva como la recta que mejor se aproxima a la curva cerca de P es bastante mejor, pero aún muy vaga para la precisión matemática. El concepto de límite proporciona una manera de obtener una mejor descripción.

Sea P un punto en una curva y sea Q un *punto móvil* cercano a P en esa curva. Considere la recta que pasa por P y Q, llamada **recta secante.** La **recta tangente** en P es la posición límite (si ésta existe) de la recta secante cuando Q se mueve hacia P a lo largo de la curva (véase la figura 3).

Suponga que la curva es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Entonces, P tiene coordenadas $(c, f(c))$, un punto cercano Q tiene coordenadas $(c + h, f(c + h))$, y la recta secante de P y Q tiene pendiente m_{sec} dada por (véase la figura 4):

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

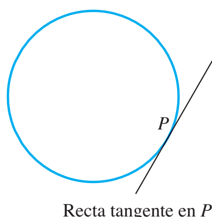


Figura 1

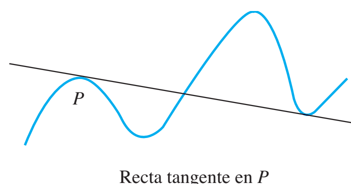


Figura 2

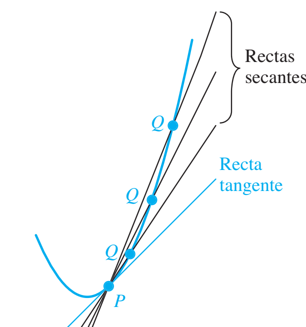


Figura 3

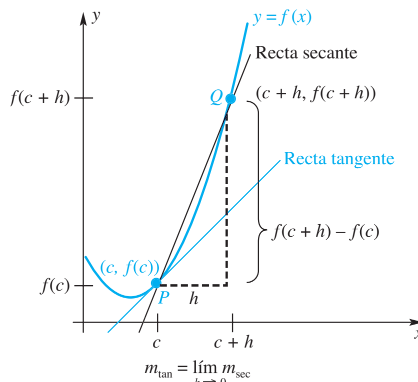


Figura 4

Mediante el concepto de límite, que estudiamos en el capítulo anterior, ahora podemos dar una definición formal de la recta tangente.

Definición Recta tangente

La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(c, f(c))$ es aquella recta que pasa por P con pendiente

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} m_{\text{sec}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista y no sea ∞ o $-\infty$.

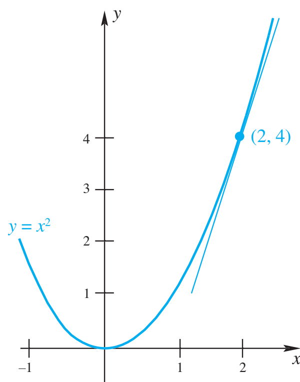


Figura 5

EJEMPLO 1 Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x) = x^2$ en el punto (2, 4).

SOLUCIÓN La recta cuya pendiente estamos buscando se muestra en la figura 5. Es claro que tiene una pendiente positiva grande.

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(4+h)}{h} \\ &= 4 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la curva $y = f(x) = -x^2 + 2x + 2$ en los puntos con abscisas $-1, \frac{1}{2}, 2$, y 3.

SOLUCIÓN En lugar de realizar cálculos por separado, parece mejor calcular la pendiente en el punto con abscisa c y luego obtener las cuatro respuestas deseadas por medio de sustitución.

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-(c+h)^2 + 2(c+h) + 2 - (-c^2 + 2c + 2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-c^2 - 2ch - h^2 + 2c + 2h + 2 + c^2 - 2c - 2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(-2c - h + 2)}{h} \\ &= -2c + 2 \end{aligned}$$

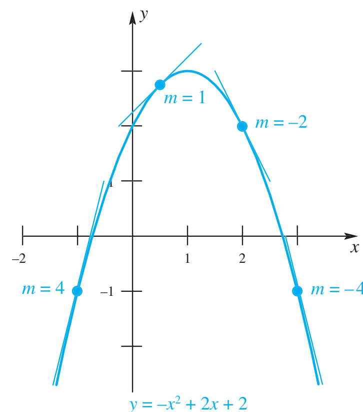


Figura 6

Las cuatro pendientes deseadas (obtenidas haciendo $c = -1, \frac{1}{2}, 2, 3$) son 4, 1, −2, y −4. Estas respuestas parecen ser coherentes con la gráfica en la figura 6. ■

EJEMPLO 3 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1/x$ en $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ (véase la figura 7).

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 1/x$.

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{2+h} - \dfrac{1}{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{2}{2(2+h)} - \dfrac{2+h}{2(2+h)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2 - (2+h)}{2(2+h)h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{2(2+h)h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

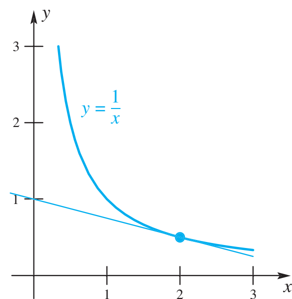


Figura 7

Sabiendo que la pendiente de la recta es $-\frac{1}{4}$ y que el punto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ pertenece a ella, con facilidad podemos escribir su ecuación utilizando la forma punto pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$. El resultado es $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2)$, de forma equivalente $y = 1 - \frac{1}{4}x$. ■

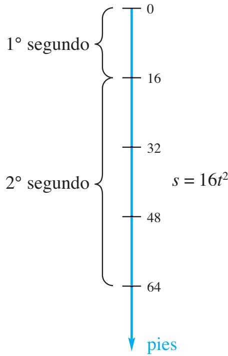


Figura 8

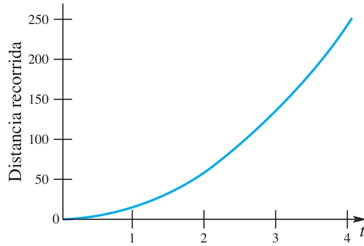


Figura 9

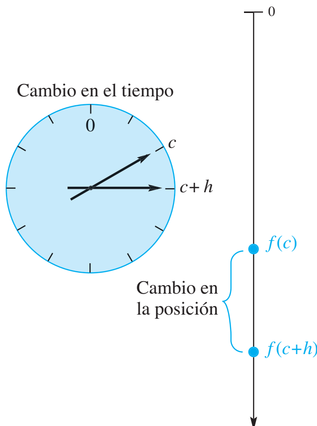


Figura 10

Velocidad promedio y velocidad instantánea Si en 2 horas conducimos un automóvil de una ciudad a otra que está a 80 millas, nuestra velocidad promedio es de 40 millas por hora. La *velocidad promedio* es la distancia de la primera posición a la segunda, dividida entre el tiempo empleado.

Pero durante el viaje la lectura del velocímetro con frecuencia fue diferente de 40. Al principio, registró 0; a veces subió hasta 57; al final, regresó a 0. ¿Qué mide el velocímetro? Ciertamente, no indica una velocidad promedio.

Considere el ejemplo más preciso de un objeto P que cae en el vacío. El experimento muestra que si inicia desde el reposo, P cae $16t^2$ pies en t segundos. Por lo tanto, cae 16 pies en el primer segundo y 64 pies durante los primeros dos segundos (véase la figura 8); claramente, desciende cada vez más rápido conforme el tiempo avanza. La figura 9 muestra la distancia recorrida (en el eje vertical) como una función del tiempo (en el eje horizontal).

Durante el segundo segundo (es decir, en el intervalo de tiempo de $t = 1$ a $t = 2$), P cayó $64 - 16 = 48$ pies. Su velocidad promedio fue

$$v_{\text{prom}} = \frac{64 - 16}{2 - 1} = 48 \text{ pies por segundo}$$

Durante el intervalo de $t = 1$ a $t = 1.5$, cayó $16(1.5)^2 - 16 = 20$ pies. Su velocidad promedio fue

$$v_{\text{prom}} = \frac{16(1.5)^2 - 16}{1.5 - 1} = \frac{20}{0.5} = 40 \text{ pies por segundo}$$

De manera similar, en los intervalos de tiempo $t = 1$ a $t = 1.1$ y $t = 1$ a $t = 1.01$, calculamos las velocidades promedio respectivas

$$v_{\text{prom}} = \frac{16(1.1)^2 - 16}{1.1 - 1} = \frac{3.36}{0.1} = 33.6 \text{ pies por segundo}$$

$$v_{\text{prom}} = \frac{16(1.01)^2 - 16}{1.01 - 1} = \frac{0.3216}{0.01} = 32.16 \text{ pies por segundo}$$

Lo que hemos hecho es calcular la velocidad promedio en intervalos de tiempo cada vez más pequeños; cada uno comienza en $t = 1$. Entre más breve sea el intervalo de tiempo, mejor aproximamos la *velocidad instantánea* en el instante $t = 1$. Al mirar los números 48, 40, 33.6 y 32.16 podríamos suponer que 32 pies por segundo es la velocidad instantánea.

Pero seamos más precisos. Suponga que un objeto P se mueve a lo largo de un eje coordenado, de modo que su posición en el instante t está dada por $s = f(t)$. En el instante c el objeto está en $f(c)$; en un instante cercano, $c + h$, está en $f(c + h)$ (véase la figura 10). Así, la **velocidad promedio** en este intervalo es

$$v_{\text{prom}} = \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

Ahora podemos definir la velocidad instantánea.

Definición Velocidad instantánea

Si un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado con función de posición $f(t)$, entonces su **velocidad instantánea** en el instante c es

$$v = \lim_{h \to 0} v_{\text{prom}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

siempre que el límite exista y no sea ∞ o $-\infty$.

En el caso donde $f(t) = 16t^2$, la velocidad instantánea en $t = 1$ es

$$v = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{16(1+h)^2 - 16}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{16 + 32h + 16h^2 - 16}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (32 + 16h) = 32$$

Esto confirma nuestra suposición previa.

Dos problemas con el mismo tema

Ahora puede ver por qué llamamos a esta sección "dos problemas con el mismo tema". Véanse las definiciones de *pendiente de la recta tangente* y de *velocidad instantánea*. Éstas dan nombres diferentes para el mismo concepto matemático.

EJEMPLO 4 Un objeto, inicialmente en reposo, cae debido a la acción de la gravedad. Determine su velocidad instantánea en $t = 3.8$ segundos y en $t = 5.4$ segundos.

SOLUCIÓN Calculamos la velocidad instantánea en $t = c$ segundos. Como $f(t) = 16t^2$,

$$v = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{16(c+h)^2 - 16c^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{16c^2 + 32ch + 16h^2 - 16c^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (32c + 16h) = 32c$$

Así, la velocidad instantánea en 3.8 segundos es $32(3.8) = 121.6$ pies por segundo; en 5.4 segundos es $32(5.4) = 172.8$ pies por segundo. ■

EJEMPLO 5 ¿Cuánto tiempo tardará, el objeto del ejemplo 4 para alcanzar una velocidad instantánea de 112 pies por segundo?

SOLUCIÓN Aprendimos en el ejemplo 4 que la velocidad instantánea después de c segundos es $32c$. Por lo tanto, debemos resolver la ecuación $32c = 112$. La solución es $c = \frac{112}{32} = 3.5$ segundos. ■

EJEMPLO 6 Una partícula se mueve a lo largo de un eje coordenado y s, su distancia dirigida en centímetros, medida desde el origen al final de t segundos está dada por $s = f(t) = \sqrt{5t + 1}$. Encuentre la velocidad instantánea de la partícula al final de 3 segundos.

SOLUCIÓN La figura 11 muestra la distancia recorrida como función del tiempo. La velocidad instantánea en el instante $t = 3$ es igual a la pendiente de la recta tangente en $t = 3$.

$$v = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5(3+h)+1} - \sqrt{5(3)+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{16+5h} - 4}{h}$$

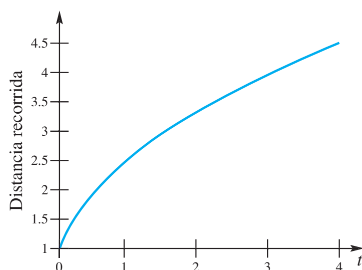


Figura 11

Para evaluar este límite, racionalizamos el numerador multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{16 + 5h} + 4$. Obtenemos

$$v = \lim_{h \to 0}\left(\frac{\sqrt{16+5h}-4}{h} \cdot \frac{\sqrt{16+5h}+4}{\sqrt{16+5h}+4}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{16+5h-16}{h\left(\sqrt{16+5h}+4\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5}{\sqrt{16+5h}+4} = \frac{5}{8}$$

Concluimos que la velocidad instantánea al final de 3 segundos es de $\frac{5}{8}$ de centímetro por segundo. ■

Velocidad o rapidez

Por el momento, usaremos los términos *velocidad* y *rapidez* de manera indistinta. Posteriormente, en este capítulo, haremos una distinción entre estas dos palabras.

Tasa de cambio La velocidad es sólo una de las muchas tasas de cambio que serán importantes en este curso; es la tasa de cambio de la distancia con respecto al tiempo. Otras tasas de cambio que nos interesarán son la densidad de un alambre (la tasa de cambio de la masa con respecto a la distancia); el ingreso marginal (la tasa de cambio del ingreso con respecto al número de artículos producidos), y la corriente (la tasa de cambio de la carga eléctrica con respecto al tiempo). Estas tasas y muchas más se estudian en el conjunto de problemas. En cada caso debemos distinguir entre una tasa de cambio *promedio* en un intervalo y una tasa de cambio *instantánea* en un punto. La frase *tasa de cambio* sin un adjetivo significará tasa de cambio instantánea.

Revisión de conceptos

1. La recta que más se aproxima a una curva cerca del punto P es la _____ que pasa por ese punto.

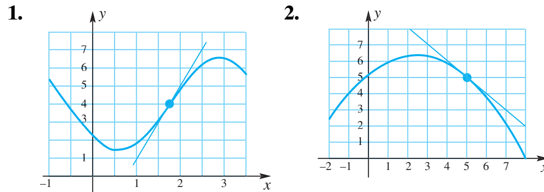
2. Con mayor precisión, la recta tangente a una curva en P es la posición límite de las rectas _____ que pasan por P y Q cuando Q se aproxima a P lo largo de la curva.

3. La pendiente $m_{\tan}$ de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $(c, f(c))$ está dada por $m_{\tan} = \lim_{h \to 0}$ _____.

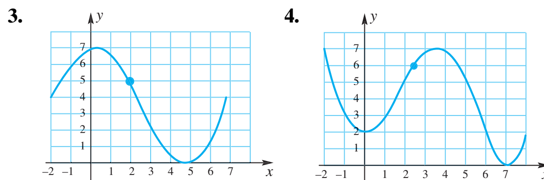
4. La velocidad instantánea de un punto P (que se mueve a lo largo de una recta) en el instante c es el límite de _____ en el intervalo de c a $c + h$ cuando h se aproxima a cero.

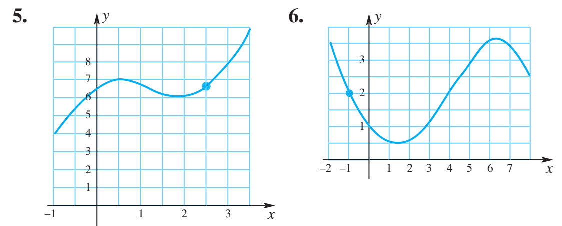
Conjunto de problemas 2.1

En los problemas 1 y 2 está dibujada una recta tangente a una curva. Evalúe su pendiente (pendiente = elevación/avance). Sea cuidadoso al observar la diferencia en escalas sobre los dos ejes.



En los problemas 3–6, dibuje la recta tangente a la curva que pasa por el punto indicado y estime su pendiente.





7. Considere $y = x^2 + 1$.

(a) Haga un bosquejo de su gráfica tan cuidadosamente como pueda.

(b) Dibuje la recta tangente en (1, 2).

≈ (c) Estime la pendiente de esta recta tangente.

C (d) Calcule la pendiente de la recta tangente que pasa por (1, 2) y $(1.01, (1.01)^2 + 1.0)$.

(e) Encuentre, por medio del proceso de límite (véase el ejemplo 1), la pendiente de la recta tangente en (1, 2).

8. Considere $y = x^3 - 1$.

(a) Haga un bosquejo de su gráfica tan cuidadosamente como pueda.

(b) Dibuje la recta tangente en $(2, 7)$.

(c) Estime la pendiente de esta recta tangente.

(d) Calcule la pendiente de la recta secante que pasa por $(2, 7)$ y $(2.01, (2.01)^3 - 1.0)$.

(e) Encuentre, por medio del proceso de límite (véase el ejemplo 1), la pendiente de la recta tangente en $(2, 7)$.

9. Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la curva $y = x^2 - 1$ en los puntos donde $x = -2, -1, 0, 1, 2$ (véase el ejemplo 2).

10. Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 3x$ en los puntos donde $x = -2, -1, 0, 1, 2$.

11. Haga un bosquejo de la gráfica de $y = 1/(x + 1)$ y luego encuentre la ecuación de la recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ (véase el ejemplo 3).

12. Encuentre una ecuación de la recta tangente a $y = 1/(x - 1)$ en $(0, -1)$.

13. Un experimento sugiere que un cuerpo que cae descenderá aproximadamente $16t^2$ pies en t segundos.

(a) ¿Cuánto caerá entre $t = 0$ y $t = 1$?

(b) ¿Cuánto caerá entre $t = 1$ y $t = 2$?

(c) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \leq t \leq 3$?

(d) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $3 \leq t \leq 3.01$?

(e) Encuentre su velocidad instantánea en $t = 3$ (véase el ejemplo 4).

14. Un objeto viaja a lo largo de una recta de modo que su posición s es $s = t^2 + 1$ metros después de t segundos.

(a) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \leq t \leq 3$?

(b) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \leq t \leq 2.003$?

(c) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \leq t \leq 2 + h$?

(d) Determine su velocidad instantánea en $t = 2$.

15. Suponga que un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado, de modo que su distancia dirigida —medida desde el origen— después de t segundos es $\sqrt{2t + 1}$ pies.

(a) Encuentre su velocidad instantánea en $t = \alpha, \alpha > 0$.

(b) ¿Cuándo alcanzará una velocidad de $\frac{1}{2}$ pie por segundo? (Véase el ejemplo 5).

16. Si una partícula se mueve a lo largo de un eje coordenado, de modo que su distancia dirigida —medida desde el origen— después de t segundos es $(-t^2 + 4t)$ pies, ¿cuándo la partícula está momentáneamente detenida? (Es decir, ¿en qué momento su velocidad instantánea es cero?).

17. Cierto cultivo de bacteria crece de modo que tiene una masa de $\frac{1}{2}t^2 + 1$ gramos después de t horas.

(a) ¿Cuánto creció durante el intervalo $2 \leq t \leq 2.01$?

(b) ¿Cuál fue la tasa promedio de crecimiento durante el intervalo $2 \leq t \leq 2.01$?

(c) ¿Cuál fue su tasa instantánea de crecimiento en $t = 2$?

18. Un negocio está prosperando de tal manera que su ganancia total (acumulada) después de t años es $1000t^2$ dólares.

(a) ¿Cuál fue su ganancia durante el tercer año (entre $t = 2$ y $t = 3$)?

(b) ¿Cuál fue su tasa promedio de ganancia durante la primera mitad del tercer año, entre $t = 2$ y $t = 2.5$? (La tasa será en dólares por año).

(c) ¿Cuál fue la tasa instantánea de ganancia en $t = 2$?

19. Un alambre de 8 centímetros de largo es tal que la masa entre su extremo izquierdo y un punto x centímetros a la derecha es de x^3 gramos (véase la figura 12).

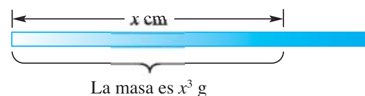


Figura 12

(a) ¿Cuál es la densidad promedio de los dos centímetros centrales, es decir, del centímetro 3 al 5 de este alambre? *Observación*: la densidad promedio es igual a masa/longitud.

(b) ¿Cuál es la densidad real en el punto que se encuentra a 3 centímetros del extremo izquierdo?

20. Suponga que el ingreso $I(n)$ en dólares por producir n computadoras está dado por $I(n) = 0.4n - 0.001n^2$. Encuentre las tasas instantáneas de cambio del ingreso cuando $n = 10$ y $n = 100$. (La tasa instantánea de cambio del ingreso con respecto a la cantidad de producto fabricado se denomina *ingreso marginal*.)

21. La razón (tasa) de cambio de la velocidad con respecto al tiempo se llama **aceleración.** Suponga que la velocidad de una partícula en el instante t está dada por $v(t) = 2t^2$. Encuentre la aceleración instantánea cuando $t = 1$ segundo.

22. Una ciudad es azotada por una epidemia de gripe asiática. Las autoridades estiman que t días después del inicio de la epidemia, el número de personas enfermas con la gripe está dado por $p(t) = 120t^2 - 2t^3$, cuando $0 \leq t \leq 40$. ¿A qué tasa se expande la gripe en el instante $t = 10$; $t = 20$; $t = 40$?

23. La gráfica de la figura 13 muestra la cantidad de agua en un tanque de la ciudad durante un día que no se bombeó el vital líquido a ese recipiente. ¿Cuál fue la tasa promedio de uso de agua durante el día? ¿Qué tan rápido estaba siendo usada el agua a las 8 A.M.?

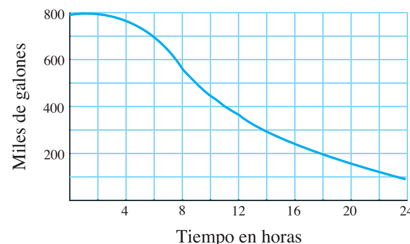


Figura 13

24. Unos pasajeros abordan un elevador en la planta baja (es decir, el piso cero) y lo dejan en el séptimo piso, que se encuentra 84 pies por arriba de la planta baja. La posición del elevador, s como función del tiempo t (medido en segundos), se muestra en la figura 14.

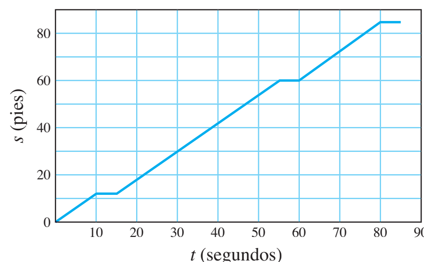


Figura 14

(a) ¿Cuál fue la velocidad promedio del elevador desde el instante que inició a moverse hasta que llegó al séptimo piso?

(b) Aproximadamente, ¿cuál fue la velocidad promedio del elevador en el instante $t = 20$?

(c) ¿Cuántas paradas hizo el elevador entre la planta baja y el séptimo piso (exceptuando la planta baja y el séptimo piso)? ¿En qué pisos cree usted que el elevador se detuvo?

25. La figura 15 muestra la temperatura máxima normal para San Luis, Missouri, como una función del tiempo (medido en días desde el 1 de enero).

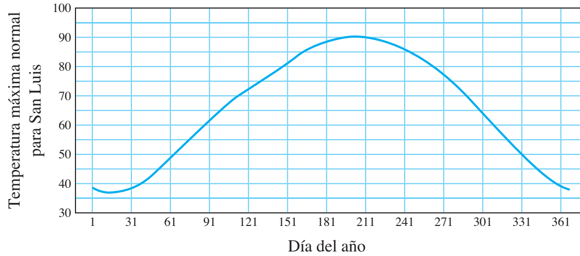


Figura 15

(a) En forma aproximada, ¿cuál es la tasa de cambio de la temperatura máxima normal el 2 de marzo (es decir, en el día número 61)? ¿Cuáles son las unidades de esta tasa de cambio?

(b) Aproximadamente, ¿cuál es la tasa de cambio en la temperatura máxima normal el 10 de julio (es decir, en el día 191)?

(c) ¿En cuáles meses hay un momento en que la tasa de cambio es igual a cero?

(d) ¿En qué meses el valor absoluto de la tasa de cambio es la máxima?

26. La figura 16 muestra la población, en millones, de un país en desarrollo para los años de 1900 a 1999. Aproximadamente, ¿cuál es la tasa de cambio de la población en 1930? ¿Y en 1990? Con frecuencia, el crecimiento porcentual es una medida más apropiada del crecimiento poblacional. Ésta es la tasa de crecimiento dividida entre el tamaño de la población en ese instante. Para esta población, ¿cuál fue el crecimiento porcentual aproximado en 1930? ¿Y en 1990?

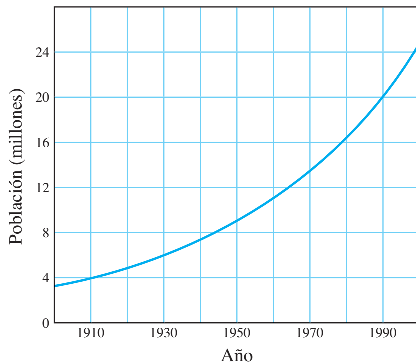


Figura 16

27. Las figuras 17a y 17b muestran la posición s como una función del tiempo t para dos partículas que se mueven a lo largo de una recta. Para cada partícula, ¿la velocidad aumenta o disminuye? Explique.

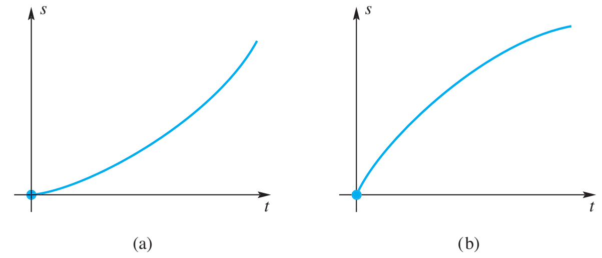


Figura 17

28. La tasa de cambio de la carga eléctrica con respecto al tiempo se denomina **corriente.** Suponga que $\frac{1}{3}t^3 + t$ coulombs de carga fluye a través de una alambre en t segundos. Encuentre la corriente, en amperes (coulombs por segundo) después de 3 segundos. ¿Cuándo se fundirá un fusible de 20 amperes en la línea?

29. Debido a un derrame, el radio de una mancha circular de aceite está creciendo a una velocidad constante de 2 kilómetros por día. ¿A qué velocidad está creciendo el área del derrame 3 días después de que comenzó?

30. El radio de un balón esférico está aumentando a una velocidad de 0.25 pulgadas por segundo. Si el radio es de 0 en el instante $t = 0$, encuentre la tasa de cambio del volumen en el instante $t = 3$.

GC *Utilice una calculadora gráfica (GC) o un* CAS *(sistema de álgebra computacional) para resolver los problemas del 31 al 34.*

31. Dibuje la gráfica de $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. Después encuentre la pendiente de la recta tangente en

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 3.2

32. Dibuje la gráfica de $y = f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 2x$. Después encuentre la pendiente de la recta tangente en

(a) $\pi/3$ (b) 2.8 (c) π (d) 4.2

33. Si un punto se mueve a lo largo de una recta, de modo que su distancia s (en pies) desde 0 está dada por $s = t + t\cos^2 t$ a los t segundos, encuentre su velocidad instantánea en $t = 3$.

34. Si un punto se mueve a lo largo de una recta, de modo que su distancia s (en metros) desde 0 está dada por $s = (t + 1)^3/(t + 2)$ a los t minutos, encuentre su velocidad instantánea en $t = 1.6$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** recta tangente **2.** secante **3.** $[f(c + h) - f(c)]/h$ **4.** velocidad promedio

2.2 La derivada

Hemos visto que la *pendiente de la recta tangente* y la *velocidad instantánea* son manifestaciones de la misma idea básica. Tasa de crecimiento de un organismo (biología), ganancia marginal (economía), densidad de un alambre (física) y velocidad de disolución (química) son otras versiones del mismo concepto básico. El buen sentido matemático sugiere que estudiemos este concepto independientemente de estos vocabularios especializados y de sus diversas aplicaciones. Elegimos el nombre neutral de *derivada*, el cual añadiremos a *función* y *límite* como una de las palabras clave del cálculo.

Definición Derivada

La **derivada** de una función f es otra función f' (léase "f prima") cuyo valor en cualquier número x es

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si este límite existe, decimos que f es **derivable** en x. Determinar una derivada recibe el nombre de **derivación**; la parte del cálculo asociada con la derivada se denomina **cálculo diferencial.**

Cálculo de derivadas

Ilustramos con varios ejemplos.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = 13x - 6$. Encuentre $f'(4)$.

SOLUCIÓN

$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[13(4+h) - 6] - [13(4) - 6]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{13h}{h} = \lim_{h\to 0} 13 = 13$$

■

EJEMPLO 2 Si $f(x) = x^3 + 7x$, encuentre $f'(x)$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left[(x+h)^3 + 7(x+h)\right] - \left[x^3 + 7x\right]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 7h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 7) \\ &= 3x^2 + 7 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Si $f(x) = 1/x$, encuentre $f'(x)$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{x - (x+h)}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{h}\right] = \lim_{h\to 0} \left[\frac{-h}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Así, f' es la función dada por $f'(x) = -1/x^2$. Su dominio es todos los números reales, excepto $x = 0$. ■

EJEMPLO 4 Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$.

SOLUCIÓN

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

En este momento habrá notado que encontrar una derivada siempre implica tomar el límite de un cociente, en donde el numerador y el denominador se aproximan a cero. Nuestra tarea es simplificar este cociente, de modo que podamos cancelar un factor h, del numerador y del denominador, permitiéndonos con ello evaluar el límite por sustitución. En el ejemplo actual, esto puede realizarse por medio de la racionalización del numerador.

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Así, F', la derivada de F, está dada por $F'(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$. Su dominio es $(0, \infty)$. ■

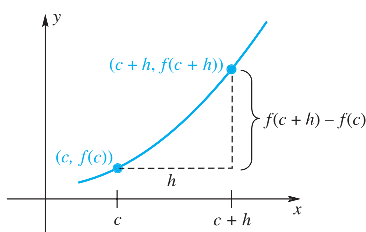


Figura 1

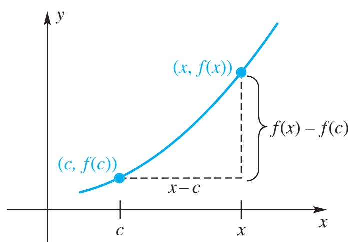


Figura 2

Formas equivalentes de la derivada No hay nada sagrado acerca del uso de la letra h en la definición de $f'(c)$. Por ejemplo, observe que

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$$= \lim_{p\to 0} \frac{f(c+p) - f(c)}{p}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{f(c+s) - f(c)}{s}$$

Un cambio más radical, pero todavía sólo un cambio de notación, puede entenderse comparando las figuras 1 y 2. Observe cómo x toma el lugar de $c + h$, y por lo tanto $x - c$ reemplaza a h. En consecuencia,

$$\boxed{f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}}$$

Obsérvese que en todos los casos el número en el que f' se evalúa se mantiene fijo durante la operación del límite.

EJEMPLO 5 Utilice el último recuadro para determinar $g'(c)$ si $g(x) = 2/(x+3)$.

SOLUCIÓN

$$g'(c) = \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{\dfrac{2}{x+3} - \dfrac{2}{c+3}}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c} \left[\frac{2(c+3) - 2(x+3)}{(x+3)(c+3)} \cdot \frac{1}{x - c} \right]$$

$$= \lim_{x \to c} \left[\frac{-2(x-c)}{(x+3)(c+3)} \cdot \frac{1}{x - c} \right]$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{-2}{(x+3)(c+3)} = \frac{-2}{(c+3)^2}$$

Aquí hemos manipulado el cociente hasta que pudimos cancelar el factor $x - c$ del numerador y del denominador. Entonces pudimos evaluar el límite. ■

EJEMPLO 6 Cada una de las siguientes es una derivada, pero ¿de qué función? ¿Y en qué punto?

(a) $\lim_{h \to 0} \dfrac{(4+h)^2 - 16}{h}$ (b) $\lim_{x \to 3} \dfrac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{3}}{x - 3}$

SOLUCIÓN

(a) Ésta es la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 4$.

(b) Ésta es la derivada de $f(x) = 2/x$ en $x = 3$. ■

Derivabilidad implica continuidad Si una curva tiene una recta tangente en un punto, entonces esa curva no puede dar un salto ni oscilar demasiado en ese punto. La formulación precisa de este hecho es un teorema importante.

Teorema A Derivabilidad implica continuidad

Si $f'(c)$ existe, entonces f es continua en c.

Demostración Necesitamos demostrar que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Empezamos por escribir $f(x)$ de una manera especial.

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c), \qquad x \neq c$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c) \right]$$

$$= \lim_{x \to c} f(c) + \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \to c} (x - c)$$

$$= f(c) + f'(c) \cdot 0$$

$$= f(c)$$ ■

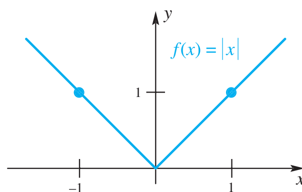


Figura 3

El inverso de este teorema es falso. Si una función f es continua en c, no se sigue que f tenga una derivada en c. Esto es fácil de ver considerando $f(x) = |x|$ en el origen (véase la figura 3). Esta función en verdad es continua en cero. Sin embargo, no tiene una derivada allí, como ahora lo demostramos. Observe que

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{|0+h|-|0|}{h}=\frac{|h|}{h}$$

Así,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

mientras que

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

Ya que los límites por la derecha y por la izquierda son diferentes,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

no existe. Por lo tanto, $f'(0)$ no existe.

Un argumento similar muestra que cualquier punto en donde la gráfica de una función continua tenga una esquina o vértice, la función no es derivable. La gráfica en la figura 4 indica algunas formas para que una función no sea derivable en un punto.

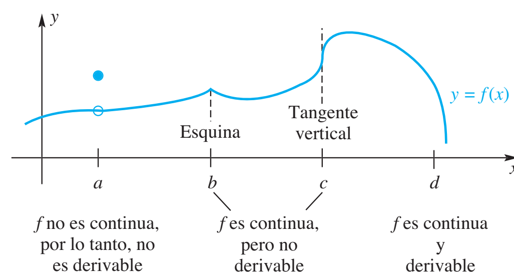


Figura 4

Para la función que se muestra en la figura 4 la derivada no existe en el punto c, en donde la recta tangente es vertical. Esto es porque

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\infty$$

Esto corresponde al hecho de que la pendiente de una recta vertical no está definida.

Incrementos Si el valor de una variable x cambia de x_1 a x_2, entonces $x_2 - x_1$, el cambio de x, se denomina un **incremento** de x y por lo regular se denota por Δx (léase "delta x"). Obsérvese que Δx *no* significa Δ por x. Si $x_1 = 4.1$ y $x_2 = 5.7$, entonces

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 5.7 - 4.1 = 1.6$$

Si $x_1 = c$ y $x_2 = c + h$, entonces

$$\Delta x = x_2 - x_1 = c + h - c = h$$

Ahora suponga que $y = f(x)$ determina una función. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces y cambia de $y_1 = f(x_1)$ a $y_2 = f(x_2)$. Así, al incremento $\Delta x = x_2 - x_1$ en x, existe un correspondiente incremento en y dado por

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

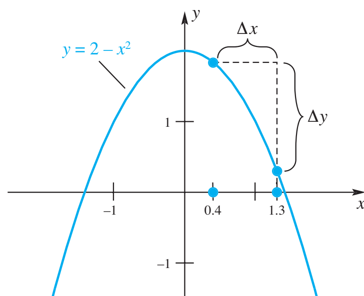


Figura 5

EJEMPLO 7 Sea $y = f(x) = 2 - x^2$. Encuentre Δy cuando x cambia de 0.4 a 1.3 (véase la figura 5).

SOLUCIÓN

$$\Delta y = f(1.3) - f(0.4) = \left[2 - (1.3)^2\right] - \left[2 - (0.4)^2\right] = -1.53 \qquad \blacksquare$$

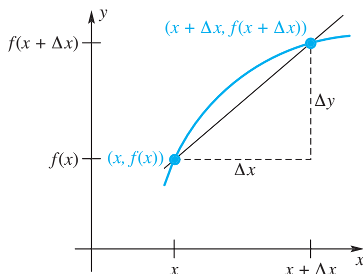


Figura 6

Notación de Leibniz para la derivada Ahora, suponga que la variable independiente cambia de x a $x + \Delta x$. El cambio correspondiente en la variable dependiente, y, será

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

y la razón

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

representa la pendiente de una recta secante que pasa por $(x, f(x))$, como se muestra en la figura 6. Cuando $\Delta x \to 0$, la pendiente de esta recta secante tiende a la recta tangente, y para esta última pendiente utilizamos el símbolo dy/dx. Por lo tanto,

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)}$$

Gottfried Wilhelm Leibniz, contemporáneo de Isaac Newton, llamó a dy/dx cociente de dos infinitesimales. El significado de la palabra *infinitesimal* es vago y no lo utilizaremos. Sin embargo, dy/dx es un símbolo estándar para la derivada y lo usaremos con frecuencia de ahora en adelante.

La gráfica de la derivada La derivada $f'(x)$ proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el valor de x. Por lo tanto, cuando la recta tangente está ascendiendo hacia la derecha, la derivada es positiva, y cuando la recta tangente está descendiendo hacia la derecha, la derivada es negativa. Por lo tanto, podemos obtener una gráfica aproximada de la derivada dando solo la gráfica de la función.

EJEMPLO 8 Dada la gráfica de $y = f(x)$ que se muestra en la primera parte de la figura 7, haga un bosquejo de la gráfica de la derivada $f'(x)$.

SOLUCIÓN Para $x < 0$, la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ tiene pendiente positiva. Un cálculo aproximado a partir de la gráfica sugiere que cuando $x = -2$, la pendiente es alrededor de 3. Conforme nos movemos de izquierda a derecha a lo largo de la curva en la figura 7, vemos que la pendiente sigue siendo positiva (durante un tiempo), pero las rectas tangentes se hacen cada vez más planas (horizontales). Cuando $x = 0$, la recta tangente es horizontal y nos dice que $f'(0) = 0$. Para x entre 0 y 2, las rectas tangentes tienen pendiente negativa, lo cual indica que la derivada será negativa en este intervalo. Cuando $x = 2$, nuevamente estamos en un punto en donde la recta tangente es horizontal, por lo que la derivada es igual a cero cuando $x = 2$. Para $x > 2$, la recta tangente tiene pendiente positiva otra vez. La gráfica de la derivada $f'(x)$ se muestra en la última parte de la figura 7. $\blacksquare$

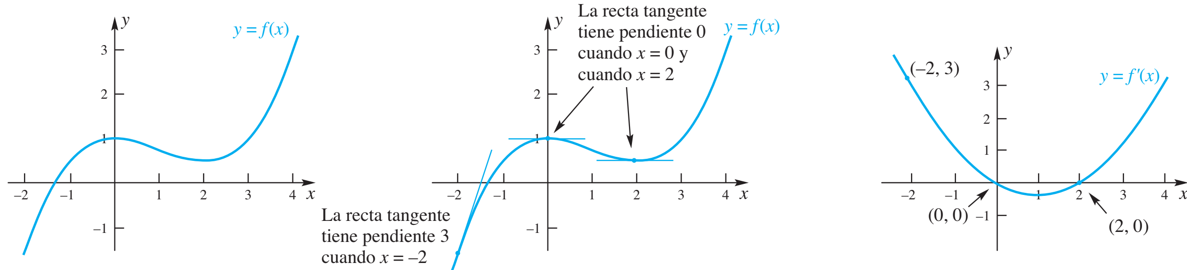


Figura 7

Revisión de conceptos

1. La derivada f en x está dada por $f'(x) = \lim_{h\to 0}$ _____. De forma equivalente, $f'(x) = \lim_{t\to x}$ _____.

2. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es _____.

3. Si f es derivable en c, entonces f es _____ en c. El inverso es falso, como se demostró mediante el ejemplo $f(x) =$ _____.

4. Si $y = f(x)$, ahora tenemos dos símbolos diferentes para la derivada de y con respecto a x. Son _____ y _____.

Conjunto de problemas 2.2

En los problemas del 1–4, utilice la definición

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

para encontrar la derivada indicada.

1. $f'(1)$ si $f(x) = x^2$

2. $f'(2)$ si $f(t) = (2t)^2$

3. $f'(3)$ si $f(t) = t^2 - t$

4. $f'(4)$ si $f(s) = \dfrac{1}{s-1}$

En los problemas del 5–22, use $f'(x) = \lim_{h\to 0}[f(x+h) - f(x)]/h$ para determinar la derivada en x.

5. $s(x) = 2x + 1$

6. $f(x) = \alpha x + \beta$

7. $r(x) = 3x^2 + 4$

8. $f(x) = x^2 + x + 1$

9. $f(x) = ax^2 + bx + c$

10. $f(x) = x^4$

11. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$

12. $g(x) = x^4 + x^2$

13. $h(x) = \dfrac{2}{x}$

14. $S(x) = \dfrac{1}{x+1}$

15. $F(x) = \dfrac{6}{x^2+1}$

16. $F(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

17. $G(x) = \dfrac{2x-1}{x-4}$

18. $G(x) = \dfrac{2x}{x^2-x}$

19. $g(x) = \sqrt{3x}$

20. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x}}$

21. $H(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-2}}$

22. $H(x) = \sqrt{x^2+4}$

En los problemas del 23–26, use $f'(x) = \lim_{t\to x}[f(t) - f(x)]/[t - x]$ para determinar $f'(x)$ (véase el ejemplo 5).

23. $f(x) = x^2 - 3x$

24. $f(x) = x^3 + 5x$

25. $f(x) = \dfrac{x}{x-5}$

26. $f(x) = \dfrac{x+3}{x}$

En los problemas del 27 al 36 el límite dado es una derivada, pero ¿de qué función? ¿Y en qué punto? (Véase el ejemplo 6).

27. $\lim_{h\to 0} \dfrac{2(5+h)^3 - 2(5)^3}{h}$

28. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^2 + 2(3+h) - 15}{h}$

29. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

30. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^3+x-30}{x-3}$

31. $\lim_{t\to x} \dfrac{t^2-x^2}{t-x}$

32. $\lim_{p\to x} \dfrac{p^3-x^3}{p-x}$

33. $\lim_{x\to t} \dfrac{\frac{2}{x} - \frac{2}{t}}{x-t}$

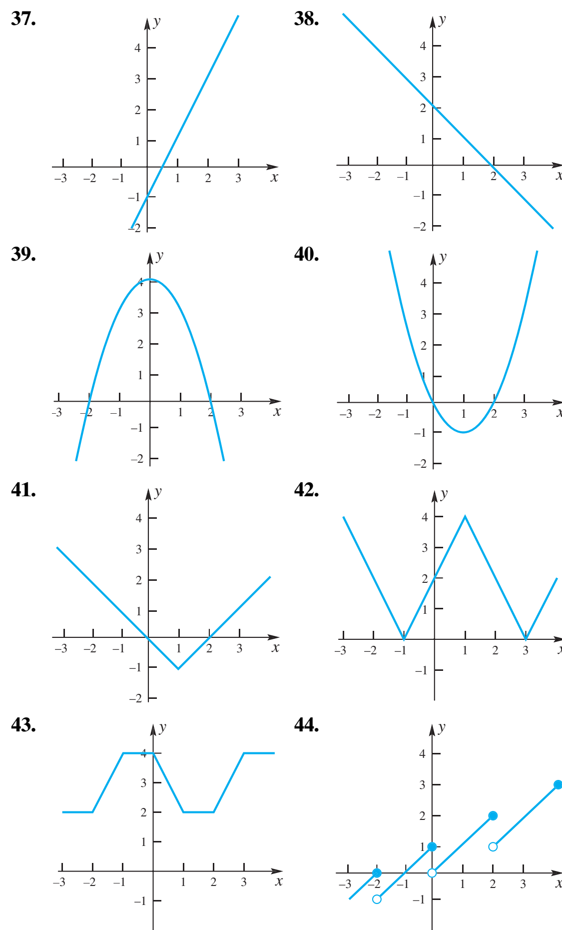
34. $\lim_{x\to y} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x-y}$

35. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$

36. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\tan(t+h) - \tan t}{h}$

En los problemas del 37 al 44 se da la gráfica de una función $y = f(x)$

Utilice esta gráfica para bosquejar la gráfica de $y = f'(x)$.



En los problemas del 45 al 50 determine Δy para los valores dados de x_1 y x_2 (véase el ejemplo 7).

45. $y = 3x + 2, x_1 = 1, x_2 = 1.5$

46. $y = 3x^2 + 2x + 1, x_1 = 0.0, x_2 = 0.1$

47. $y = \frac{1}{x}, x_1 = 1.0, x_2 = 1.2$

48. $y = \frac{2}{x+1}, x_1 = 0, x_2 = 0.1$

C **49.** $y = \frac{3}{x+1}, x_1 = 2.34, x_2 = 2.31$

C **50.** $y = \cos 2x, x_1 = 0.571, x_2 = 0.573$

En los problemas del 51 al 56 primero determine y simplifique

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Luego determine dy/dx tomando el límite de su respuesta cuando $\Delta x \to 0$.

51. $y = x^2$

52. $y = x^3 - 3x^2$

53. $y = \frac{1}{x+1}$

54. $y = 1 + \frac{1}{x}$

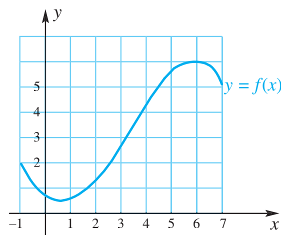


Figura 8

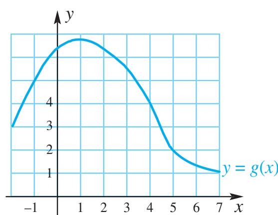


Figura 9

55. $y = \frac{x-1}{x+1}$

56. $y = \frac{x^2-1}{x}$

57. Con base en la figura 8, estime $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(5)$, y $f'(7)$.

58. Con base en la figura 9, estime $g'(-1)$, $g'(1)$, $g'(4)$, y $g'(6)$.

59. Haga un bosquejo de la gráfica de $y = f'(x)$ en $-1 < x < 7$ para la función f de la figura 8.

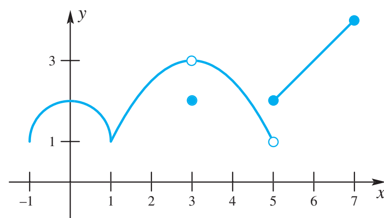


Figura 10

60. Haga un bosquejo de la gráfica de $y = g'(x)$ en $-1 < x < 7$ para la función g de la figura 9.

61. Considere la función $y = f(x)$, cuya gráfica está bosquejada en la figura 10.

(a) Estime $f(2)$, $f'(2)$, $f(0.5)$, y $f'(0.5)$.

(b) Estime la tasa de cambio promedio en f sobre el intervalo $0.5 \le x \le 2.5$.

(c) En el intervalo $-1 < x < 7$, ¿en dónde $\lim_{u \to x} f(u)$ no existe?

(d) En el intervalo $-1 < x < 7$, ¿en dónde f no es continua?

(e) En el intervalo $-1 < x < 7$, ¿en dónde f no tiene derivada?

(f) En el intervalo $-1 < x < 7$, ¿en dónde $f'(x) = 0$?

(g) En el intervalo $-1 < x < 7$, ¿en dónde $f'(x) = 1$?

62. La figura 14 en la sección 2.1 muestra la posición s de un elevador como función del tiempo t. ¿En qué puntos la derivada existe? Bosqueje la derivada de s.

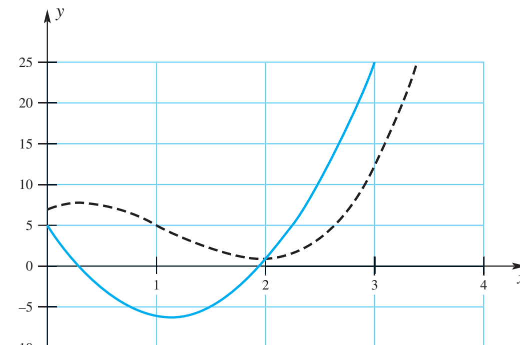


Figura 11

63. La figura 15 en la sección 2.1 muestra la temperatura máxima normal para San Luis, Missouri. Haga un bosquejo de la derivada.

64. La figura 11 muestra dos funciones. Una es la función f, y la otra es su derivada f'. ¿Cuál es cuál?

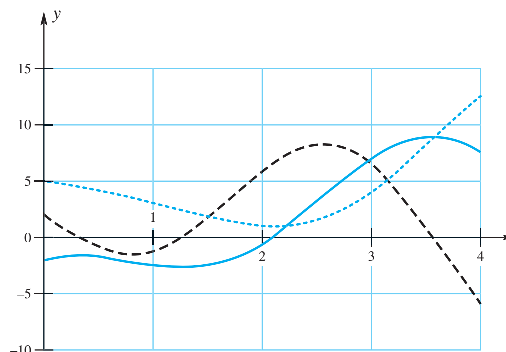


Figura 12

65. La figura 12 muestra tres funciones. Una es la función f; otra es su derivada f', a la cual llamaremos g; y la tercera es la derivada de g. ¿Cuál es cuál?

EXPL **66.** Suponga que $f(x + y) = f(x)f(y)$ para toda x y toda y. Muestre que si $f'(0)$ existe, entonces $f'(a)$ existe y $f'(a) = f(a)f'(0)$.

67. Sea $f(x) = \begin{cases} mx + b & \text{si } x < 2 \\ x^2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

Determine m y b de modo que f sea diferenciable en todas partes.

EXPL **68.** La **derivada simétrica** $f_s(x)$ se define como

$$f_s(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

(b) f es una función par.

70. Demuestre que la derivada de una función impar es una función par y que la derivada de una función par es una función impar.

CAS *Utilice un* CAS *para resolver los problemas 71 y 72.*

EXPL **71.** Dibuje las gráficas de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ y su derivada $f'(x)$ en el intervalo $[-2, 5]$ utilizando los mismo ejes.

(a) En este intervalo, ¿en dónde está $f'(x) < 0$?

(b) En este intervalo, ¿en dónde $f(x)$ disminuye cuando x aumenta?

(c) Haga una conjetura. Experimente con otros intervalos y otras funciones para sustentar esta conjetura.

EXPL **72.** Dibuje las gráficas de $f(x) = \cos x - \operatorname{sen}(x/2)$ y su derivada $f'(x)$ en el intervalo [0, 9] utilizando los mismos ejes.

(a) En este intervalo, ¿en dónde $f'(x) > 0$?

(b) En este intervalo, ¿en dónde $f(x)$ aumenta cuando x aumenta?

(c) Haga una conjetura. Experimente con otros intervalos y otras funciones para sustentar esta conjetura.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $[f(x+h) - f(x)]/h$; $[f(t) - f(x)]/(t - x)$ **2.** $f'(c)$ **3.** continua; $|x|$ **4.** $f'(x)$; $\dfrac{dy}{dx}$

2.3 Reglas para encontrar derivadas

El proceso de encontrar la derivada de una función de manera directa a partir de la definición de la derivada, esto es, estableciendo el cociente de diferencias

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

y evaluando su límite, puede consumir tiempo y ser tedioso. Vamos a desarrollar herramientas que nos permitan acortar este largo proceso —de hecho, nos permitirá encontrar derivadas de las funciones más complicadas que se vean.

Recuerde que la derivada de una función f es otra función f'. En la sección anterior vimos que si $f(x) = x^3 + 7x$ es la fórmula para f, entonces $f'(x) = 3x^2 = 7$ es la fórmula para f'. Cuando tomamos la derivada de f, decimos que estamos derivando a f. La derivada *opera* sobre f para producir f'. Con frecuencia utilizamos el símbolo D_x para indicar la operación de derivación (véase la figura 1). El símbolo D_x indica que estamos tomando la derivada (con respecto a la variable x) de lo que sigue. Así, escribimos $D_x f(x) = f'(x)$ o (en el caso antes mencionado) $D_x(x^3 + 7x) = 3x^2 + 7$. Esta D_x es un ejemplo de un **operador.** Como sugiere la figura 1, un operador es una función cuya entrada es una función y cuya salida es otra función.

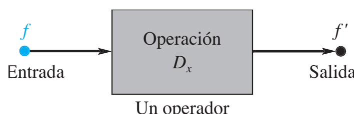


Figura 1

Con la notación de Leibniz, que se introdujo en la sección pasada, ahora tenemos tres notaciones para la derivada. Si $y = f(x)$, podemos denotar la derivada de f por medio de

$$f'(x) \quad \text{o} \quad D_x f(x) \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx}$$

Ahora utilizaremos la notación $\dfrac{d}{dx}$ para querer decir lo mismo que el operador D_x.

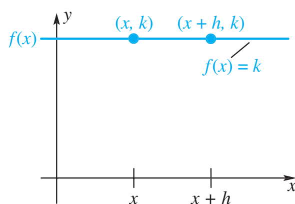


Figura 2

Las reglas para la constante y la potencia

La gráfica de la función constante $f(x) = k$ es una recta horizontal (véase la figura 2), que, por lo tanto, tiene pendiente cero en todas partes. Ésta es una manera de entender nuestro primer teorema.

Teorema A Regla para la función constante

Si $f(x) = k$, donde k es una constante, entonces para cualquier x, $f'(x) = 0$; esto es,

$$D_x(k) = 0$$

Demostración

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0 \qquad ■$$

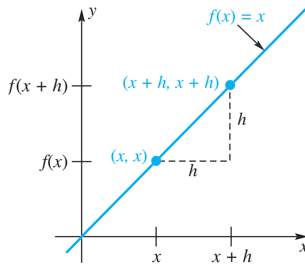


Figura 3

La gráfica de $f(x) = x$ es una recta que pasa por el origen y tiene pendiente 1 (véase la figura 3); de modo que debemos esperar que la derivada de esta función sea 1 para toda x.

Teorema B Regla para la función identidad

Si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$; esto es,

$$D_x(x) = 1$$

Demostración

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1 \qquad \blacksquare$$

Antes de iniciar con nuestro siguiente teorema, recordemos algo de álgebra; cómo elevar un binomio a una potencia.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$\vdots$$
$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

Teorema C Regla para la potencia

Si $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$; esto es,

$$D_x(x^n) = nx^{n-1}$$

Demostración

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{\cancel{h}}$$

Dentro de los corchetes, todos los términos —excepto el primero— tienen a h como factor, y así que para todo valor de x cada uno de estos términos tiene límite cero cuando h se aproxima a cero. Por lo tanto,

$$f'(x) = nx^{n-1} \qquad \blacksquare$$

Como ejemplos del teorema C, observe que

$$D_x(x^3) = 3x^2 \qquad D_x(x^9) = 9x^8 \qquad D_x(x^{100}) = 100x^{99}$$

D_x es un operador lineal El operador D_x se comporta muy bien cuando se aplica a múltiplos constantes de funciones o sumas de funciones.

Teorema D Regla del múltiplo constante

Si k es una constante f es una función derivable, entonces $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$; esto es,

$$D_x\left[k \cdot f(x)\right] = k \cdot D_x f(x)$$

En palabras, *una constante k, que multiplica, puede "sacarse" del operador D_x.*

Demostración Sea $F(x) = k \cdot f(x)$. Entonces

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} k \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= k \cdot f'(x)$$

El penúltimo paso fue fundamental. Pudimos pasar k a través del signo de límite a consecuencia del teorema principal de límites parte 3. ■

Ejemplos que ilustran este resultado son

$$D_x(-7x^3) = -7D_x(x^3) = -7 \cdot 3x^2 = -21x^2$$

y

$$D_x\left(\tfrac{4}{3}x^9\right) = \tfrac{4}{3}D_x(x^9) = \tfrac{4}{3} \cdot 9x^8 = 12x^8$$

Teorema E Regla para la suma

Si f y g son funciones derivables, entonces $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$; esto es,

$$D_x\left[f(x) + g(x)\right] = D_x f(x) + D_x g(x)$$

En palabras, *la derivada de una suma es la suma de las derivadas*.

Demostración Sea $F(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left[f(x+h) + g(x+h)\right] - \left[f(x) + g(x)\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

Nuevamente, el penúltimo paso fue el fundamental. Está justificado por el teorema principal de límites parte 4. ■

Operador lineal

El significado fundamental de la palabra *lineal*, como se utiliza en matemáticas, es el que se da en esta sección. Un operador L es lineal si satisface las dos condiciones clave:

- $L(ku) = kL(u)$
- $L(u + v) = L(u) + L(v)$

Los operadores lineales desempeñan un papel central en el curso de *álgebra lineal*, que muchos lectores de esta obra cursarán.

Funciones de la forma $f(x) = mx + b$ se denominan *funciones lineales* a consecuencia de su relación con líneas rectas. Esta terminología puede ser confusa, ya que no todas las funciones lineales son lineales, en el sentido de operadores. Para ver esto, observe que

$$f(kx) = m(kx) + b$$

mientras que

$$kf(x) = k(mx + b)$$

Por lo tanto, $f(kx) \neq kf(x)$ a menos que b sea cero.

Cualquier operador L con la propiedad establecida en los teoremas D y E se denomina *lineal*; esto es, L es un **operador lineal** si para todas las funciones f y g:

1. $L(kf) = kL(f)$, para toda constante k;
2. $L(f + g) = L(f) + L(g)$.

Los operadores lineales aparecerán una y otra vez en este texto: D_x es un ejemplo particularmente importante. Un operador lineal siempre satisface la regla de diferencia $L(f - g) = L(f) - L(g)$, establecida enseguida para D_x.

Teorema F Regla para la diferencia

Si f y g son funciones derivables, entonces $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$; esto es,

$$D_x\left[f(x) - g(x)\right] = D_x f(x) - D_x g(x)$$

La demostración del teorema F se deja como ejercicio (véase el problema 54).

EJEMPLO 1 Encuentre las derivadas de $5x^2 + 7x - 6$ y $4x^6 - 3x^5 - 10x^2 + 5x + 16$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} D_x(5x^2 + 7x - 6) &= D_x(5x^2 + 7x) - D_x(6) && \text{(Teorema F)} \\ &= D_x(5x^2) + D_x(7x) - D_x(6) && \text{(Teorema E)} \\ &= 5D_x(x^2) + 7D_x(x) - D_x(6) && \text{(Teorema D)} \\ &= 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 - 0 && \text{(Teoremas C, B, A)} \\ &= 10x + 7 \end{aligned}$$

Para encontrar la derivada siguiente, notamos que los teoremas de sumas y diferencias se extienden a cualquier número finito de términos. Así,

$$\begin{aligned} &D_x(4x^6 - 3x^5 - 10x^2 + 5x + 16) \\ &\quad = D_x(4x^6) - D_x(3x^5) - D_x(10x^2) + D_x(5x) + D_x(16) \\ &\quad = 4D_x(x^6) - 3D_x(x^5) - 10D_x(x^2) + 5D_x(x) + D_x(16) \\ &\quad = 4(6x^5) - 3(5x^4) - 10(2x) + 5(1) + 0 \\ &\quad = 24x^5 - 15x^4 - 20x + 5 \end{aligned}$$

■

El método del ejemplo 1 nos permite encontrar la derivada de cualquier polinomio. Si conocemos la regla de la potencias y hacemos que se vuelva natural, casi seguramente usted obtendrá el resultado correcto. También, con la práctica, encontrará que puede escribir la derivada de manera inmediata, sin tener que escribir todos los pasos intermedios.

Reglas para el producto y el cociente Ahora tendremos una sorpresa. Hasta aquí, hemos visto que el límite de una suma o diferencia es igual a la suma o diferencia de los límites (teorema 1.3A, partes 4 y 5); el límite de un producto o de un cociente es el producto o el cociente de los límites (teorema 1.3A, partes 6 y 7), y que la derivada de una suma o diferencia es la suma o diferencia de las derivadas (teoremas E y F). Así, ¿qué podría ser más natural que tener que la derivada de un producto es el producto de las derivadas?

Esto podría parecer natural, pero es erróneo. Para ver por qué, mírese el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Sea $g(x) = x$, $h(x) = 1 + 2x$, y $f(x) = g(x) \cdot h(x) = x(1 + 2x)$. Encuentre $D_x f(x)$, $D_x g(x)$, y $D_x h(x)$, y demuestre que $D_x f(x) \neq [D_x g(x)][D_x h(x)]$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} D_x f(x) &= D_x[x(1 + 2x)] \\ &= D_x(x + 2x^2) \\ &= 1 + 4x \\ D_x g(x) &= D_x x = 1 \\ D_x h(x) &= D_x(1 + 2x) = 2 \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$D_x(g(x))D_x(h(x)) = 1 \cdot 2 = 2$$

mientras que

$$D_x f(x) = D_x[g(x)h(x)] = 1 + 4x$$

Por lo tanto, $D_x f(x) \neq [D_x g(x)][D_x h(x)]$. ■

Que la derivada de un producto debe ser el producto de las derivadas parecía tan natural que, incluso, engañó a Gottfried Wilhelm von Leibniz, uno de los descubridores del cálculo. En un manuscrito del 11 de noviembre de 1675, Leibniz calculó la derivada del producto de dos funciones y dijo (sin verificarlo) que era igual al producto de las derivadas. Diez días después, se dio cuenta del error y dio la regla correcta para el producto, que presentamos como teorema G.

Memorización

Algunas personas dicen que la memorización está pasada de moda y que sólo el razonamiento lógico es importante en matemáticas. Están equivocadas. Algunas cosas, (incluso, las reglas de esta sección) deben convertirse en parte de nuestro aparato mental para que puedan utilizarse sin detenerse a reflexionar.

"La civilización avanza extendiendo el número de operaciones importantes que podemos realizar sin pensar acerca de ellas".

Alfred N. Whitehead

Teorema G **Regla para el producto**

Si f y g son funciones derivables, entonces

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Esto es,

$$D_x\left[f(x)g(x)\right] = f(x)D_xg(x) + g(x)D_xf(x)$$

Esta regla debe ser memorizada en palabras como sigue: *la derivada de un producto de dos funciones es la primera por la derivada de la segunda, más la segunda por la derivada de la primera*.

Demostración Sea $F(x) = f(x)g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)
\end{aligned}$$

La deducción que se acaba de dar depende, primero, del truco de sumar y restar la misma cosa, es decir, $f(x+h)g(x)$. Segundo, casi al final, utilizamos el hecho de que

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

Esto es sólo una aplicación del teorema 2.2A (que dice que la derivabilidad en un punto implica continuidad allí) y la definición de continuidad en un punto. ■

EJEMPLO 3 Encuentre la derivada de $(3x^2 - 5)(2x^4 - x)$ mediante el uso de la regla del producto. Verifique su respuesta resolviendo el problema de una forma diferente.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
D_x\left[(3x^2-5)(2x^4-x)\right] &= (3x^2-5)D_x(2x^4-x) + (2x^4-x)D_x(3x^2-5) \\
&= (3x^2-5)(8x^3-1) + (2x^4-x)(6x) \\
&= 24x^5 - 3x^2 - 40x^3 + 5 + 12x^5 - 6x^2 \\
&= 36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5
\end{aligned}$$

Para verificar, primero multipliquemos y luego tomemos la derivada.

$$(3x^2 - 5)(2x^4 - x) = 6x^6 - 10x^4 - 3x^3 + 5x$$

Así,

$$D_x\left[(3x^2 - 5)(2x^4 - x)\right] = D_x(6x^6) - D_x(10x^4) - D_x(3x^3) + D_x(5x)$$
$$= 36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5$$

Teorema H Regla para el cociente

Sean f y g funciones derivables con $g(x) \neq 0$. Entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Es decir,

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_xf(x) - f(x)D_xg(x)}{g^2(x)}$$

Le recomendamos ampliamente que lo memorice en palabras como sigue: *la derivada de un cociente es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador*.

Demostración Sea $F(x) = f(x)/g(x)$. Entonces

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(x)f(x+h) - g(x)f(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \left\{\left[g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right\}$$
$$= \left[g(x)f'(x) - f(x)g'(x)\right]\frac{1}{g(x)g(x)}$$

EJEMPLO 4 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\dfrac{(3x-5)}{(x^2+7)}$.

SOLUCIÓN

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3x-5}{x^2+7}\right] = \frac{(x^2+7)\dfrac{d}{dx}(3x-5) - (3x-5)\dfrac{d}{dx}(x^2+7)}{(x^2+7)^2}$$
$$= \frac{(x^2+7)(3) - (3x-5)(2x)}{(x^2+7)^2}$$
$$= \frac{-3x^2 + 10x + 21}{(x^2+7)^2}$$

EJEMPLO 5 Encuentre $D_x y$ si $y = \dfrac{2}{x^4 + 1} + \dfrac{3}{x}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x\left(\frac{2}{x^4+1}\right) + D_x\left(\frac{3}{x}\right) \\ &= \frac{(x^4+1)D_x(2) - 2D_x(x^4+1)}{(x^4+1)^2} + \frac{xD_x(3) - 3D_x(x)}{x^2} \\ &= \frac{(x^4+1)(0) - (2)(4x^3)}{(x^4+1)^2} + \frac{(x)(0) - (3)(1)}{x^2} \\ &= \frac{-8x^3}{(x^4+1)^2} - \frac{3}{x^2} \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Demuestre que la regla para la potencia se cumple para exponentes enteros negativos, es decir,

$$\boxed{D_x\left(x^{-n}\right) = -nx^{-n-1}}$$

$$D_x(x^{-n}) = D_x\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

■

Como parte del ejemplo 5, vimos que $D_x(3/x) = -3/x^2$. Ahora tenemos otra forma de ver la misma cosa.

Revisión de conceptos

1. La derivada de un producto de dos funciones es la primera por _____ más la _____ por la derivada de la primera. En símbolos, $D_x\left[f(x)g(x)\right] =$ _____.

2. La derivada de un cociente es el _____ por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del _____, todo dividido entre el _____. En símbolos, $D_x\left[f(x)/g(x)\right] =$ _____.

3. El segundo término (el término que incluye a h) en la expansión de $(x + h)^n$ es _____. Este hecho lleva a la fórmula $D_x\left[x^n\right] =$ _____.

4. L se denomina operador lineal, si $L(kf) =$ _____ y $L(f + g) =$ _____. El operador de derivación denotado por _____ es un operador lineal.

Conjunto de problemas 2.3

En los problemas del 1 al 44, encuentre $D_x y$ mediante las reglas de esta sección.

1. $y = 2x^2$

2. $y = 3x^3$

3. $y = \pi x$

4. $y = \pi x^3$

5. $y = 2x^{-2}$

6. $y = -3x^{-4}$

7. $y = \dfrac{\pi}{x}$

8. $y = \dfrac{\alpha}{x^3}$

9. $y = \dfrac{100}{x^5}$

10. $y = \dfrac{3\alpha}{4x^5}$

11. $y = x^2 + 2x$

12. $y = 3x^4 + x^3$

13. $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

14. $y = 3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + \pi x + \pi^2$

15. $y = \pi x^7 - 2x^5 - 5x^{-2}$

16. $y = x^{12} + 5x^{-2} - \pi x^{-10}$

17. $y = \dfrac{3}{x^3} + x^{-4}$

18. $y = 2x^{-6} + x^{-1}$

19. $y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

20. $y = \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}$

21. $y = \dfrac{1}{2x} + 2x$

22. $y = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{2}{3}$

23. $y = x(x^2 + 1)$

24. $y = 3x(x^3 - 1)$

25. $y = (2x + 1)^2$

26. $y = (-3x + 2)^2$

27. $y = (x^2 + 2)(x^3 + 1)$

28. $y = (x^4 - 1)(x^2 + 1)$

29. $y = (x^2 + 17)(x^3 - 3x + 1)$

30. $y = (x^4 + 2x)(x^3 + 2x^2 + 1)$

31. $y = (5x^2 - 7)(3x^2 - 2x + 1)$

32. $y = (3x^2 + 2x)(x^4 - 3x + 1)$

33. $y = \frac{1}{3x^2 + 1}$

34. $y = \frac{2}{5x^2 - 1}$

35. $y = \frac{1}{4x^2 - 3x + 9}$

36. $y = \frac{4}{2x^3 - 3x}$

37. $y = \frac{x - 1}{x + 1}$

38. $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$

39. $y = \frac{2x^2 - 1}{3x + 5}$

40. $y = \frac{5x - 4}{3x^2 + 1}$

41. $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$

42. $y = \frac{5x^2 + 2x - 6}{3x - 1}$

43. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$

44. $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 2x - 3}$

45. Si $f(0) = 4, f'(0) = -1, g(0) = -3$, y $g'(0) = 5$, encuentre (a) $(f \cdot g)'(0)$ (b)$(f + g)'(0)$ (c)$(f/g)'(0)$

46. Si $f(3) = 7, f'(3) = 2, g(3) = 6$, y $g'(3) = -10$, encuentre (a) $(f - g)'(3)$ (b) $(f \cdot g)'(3)$ (c) $(g/f)'(3)$

47. Utilice la regla del producto para mostrar que $D_x[f(x)]^2 = 2 \cdot f(x) \cdot D_x f(x)$.

EXPL **48.** Desarrolle una regla para $D_x[f(x)g(x)h(x)]$.

49. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = x^2 - 2x + 2$ en el punto (1, 1).

50. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = 1/(x^2 + 4)$ en el punto (1, 1/5).

51. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = x^3 - x^2$, donde la recta tangente es horizontal.

52. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x$, en donde la recta tangente tenga pendiente 1.

53. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = 100/x^5$, donde la recta tangente sea perpendicular a la recta $y = x$.

54. Demuestre el teorema F de dos formas.

55. La altura, s, medida en pies, a la que se encuentra un balón, por encima del suelo a los t segundos está dada por $s = -16t^2 + 40t + 100$.

(a) ¿Cuál es su velocidad instantánea en $t = 2$?

(b) ¿Cuándo su velocidad instantánea es cero?

56. Una pelota rueda hacia abajo a lo largo de un plano inclinado, de modo que su distancia s desde su punto de inicio después de t segundos es $s = 4.5t^2 + 2t$ pies. ¿Cuándo su velocidad instantánea será de 30 pies por segundo?

≈ **57.** Existen dos rectas tangentes a la curva $y = 4x - x^2$ que pasan por el punto (2, 5). Encuentre las ecuaciones de ambas. *Sugerencia*: sea (x_0, y_0) un punto de tangencia. Determine dos condiciones que (x_0, y_0) debe satisfacer. Véase la figura 4.

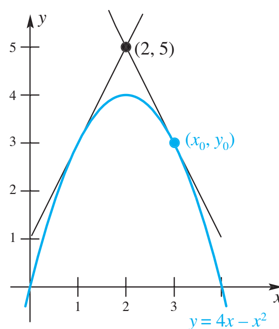


Figura 4

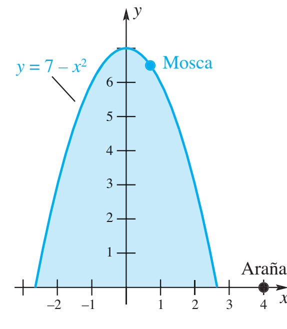


Figura 5

≈ **58.** Una viajera espacial se mueve de izquierda a derecha a lo largo de la curva $y = x^2$. Cuando apague los motores, continuará viajando a lo largo de la recta tangente en el punto en que ella esté en ese momento. ¿En qué momento debe apagar los motores para que alcance el punto (4, 15)?

≈ **59.** Una mosca se arrastra de izquierda a derecha a lo largo de la parte superior de la curva $y = 7 - x^2$ (véase la figura 5). Una araña espera en el punto (4, 0). Determine la distancia entre los dos insectos cuando se ven por primera vez.

60. Sea $P(a, b)$ un punto en la parte del primer cuadrante de la curva $y = 1/x$ suponga que la recta tangente en P interseca al eje x en A. Demuestre que el triángulo AOP es isósceles y determine su área.

61. El radio de una sandia esférica está creciendo a una velocidad constante de 2 centímetros por semana. El grosor de la cáscara siempre es la décima parte del radio. ¿Qué tan rápido está creciendo el volumen de la cáscara al final de la quinta semana? Suponga que el radio inicialmente es cero.

CAS **62.** Vuelva a resolver los problemas del 29 al 44 en una computadora y compare sus respuestas con las obtenidas de forma manual.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** la derivada de la segunda; segunda; $f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x)$ **2.** denominador, denominador; cuadrado del denominador; $[g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)]/g^2(x)$ **3.** $nx^{n-1}h$; nx^{n-1} **4.** $kL(f)$; $L(f) + L(g)$; D_x

2.4 Derivadas de funciones trigonométricas

La figura 1 nos recuerda la definición de las funciones seno y coseno. En lo que sigue, t debe considerarse como un número que mide la longitud de un arco en el círculo unitario o, de forma equivalente, como el número de radianes en el ángulo correspondiente. Por lo tanto, $f(t) = \operatorname{sen} t$ y $g(t) = \cos t$ son funciones para las cuales tanto el dominio como el rango son conjuntos de números reales. Podemos considerar el problema de determinar sus derivadas.

Fórmulas de las derivadas Elegimos utilizar x en lugar de t como nuestra variable básica. Para determinar $D_x(\operatorname{sen} x)$, apelamos a la definición de la derivada y utilizamos la identidad de suma de ángulos para $\operatorname{sen}(x + h)$.

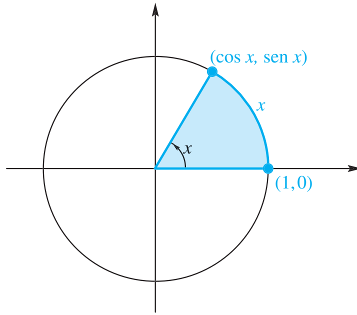


Figura 1

$$D_x(\text{sen } x) = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen } x \cos h + \cos x \,\text{sen } h - \text{sen } x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(-\text{sen } x \frac{1-\cos h}{h} + \cos x \frac{\text{sen } h}{h} \right)$$

$$= (-\text{sen } x)\left[\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h}\right] + (\cos x)\left[\lim_{h\to 0} \frac{\text{sen } h}{h}\right]$$

Observe que los dos límites en esta última expresión son exactamente los límites estudiados en la sección 1.4. En el teorema 1.4B demostramos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\text{sen } h}{h} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$$

Por consiguiente,

$$D_x(\text{sen } x) = (-\text{sen } x)\cdot 0 + (\cos x)\cdot 1 = \cos x$$

De manera análoga,

$$D_x(\cos x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \text{sen } x \,\text{sen } h - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(-\cos x \frac{1-\cos h}{h} - \text{sen } x \frac{\text{sen } h}{h} \right)$$

$$= (-\cos x)\cdot 0 - (\text{sen } x)\cdot 1$$

$$= -\text{sen } x$$

Resumimos estos resultados en un teorema importante.

¿Pudo haber adivinado?

La curva con línea continua es la gráfica de $y = \text{sen } x$. Observe que la pendiente es 1 en 0, 0 en $\pi/2$, –1 en π y así sucesivamente. Cuando graficamos la función de las pendientes (la derivada), obtenemos la curva con línea discontinua. ¿Pudo haber adivinado que $D_x \text{sen } x = \cos x$?

Trate de graficar estas dos funciones en la misma ventana en su CAS o en su calculadora gráfica.

Teorema A

Las funciones $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \cos x$ son derivables y,

$$D_x(\text{sen } x) = \cos x \qquad D_x(\cos x) = -\text{sen } x$$

EJEMPLO 1 Encuentre $D_x(3 \,\text{sen } x - 2\cos x)$.

SOLUCIÓN

$$D_x(3 \,\text{sen } x - 2\cos x) = 3D_x(\text{sen } x) - 2D_x(\cos x)$$

$$= 3\cos x + 2 \,\text{sen } x$$ ■

EJEMPLO 2 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = 3 \,\text{sen } x$ en el punto $(\pi, 0)$. (Véase la figura 2.)

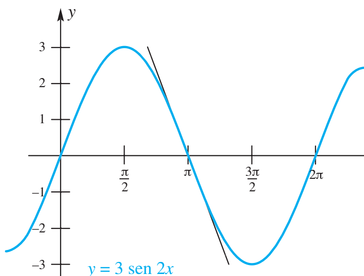


Figura 2

SOLUCIÓN La derivada es $\frac{dy}{dx} = 3\cos x$, así que cuando $x = \pi$, la pendiente es $3\cos \pi = -3$. Mediante la forma punto pendiente para la recta determinamos que una ecuación de la recta tangente es

$$y - 0 = -3(x - \pi)$$
$$y = -3x + 3\pi$$ ■

Las reglas del producto y del cociente son útiles al evaluar derivadas de funciones que incluyan a las funciones trigonométricas.

EJEMPLO 3 Determine $D_x(x^2 \operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Aquí se necesita la regla del producto.

$$D_x(x^2 \operatorname{sen} x) = x^2 D_x(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x(D_x x^2) = x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$$ ■

EJEMPLO 4 Determine $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$.

SOLUCIÓN Para este problema es necesaria la regla del cociente.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x\left(\dfrac{d}{dx}(1 + \operatorname{sen} x)\right) - (1 + \operatorname{sen} x)\left(\dfrac{d}{dx}\cos x\right)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$ ■

EJEMPLO 5 En el instante t segundos el centro de un corcho, que está flotando en el agua, es $y = 2 \operatorname{sen} t$ centímetros por arriba (o por debajo) del nivel del agua. ¿Cuál es la velocidad del corcho en $t = 0, \pi/2, \pi$?

SOLUCIÓN La velocidad es la derivada de la posición y $\dfrac{dy}{dt} = 2 \cos t$. Por lo tanto, cuando $t = 0, \dfrac{dy}{dt} = 2 \cos 0 = 2$, cuando $t = \pi/2, \dfrac{dy}{dt} = 2 \cos \dfrac{\pi}{2} = 0$, y cuando $t = \pi, \dfrac{dy}{dt} = 2 \cos \pi = -2$. ■

Como las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante están definidas en términos de las funciones seno y coseno, las derivadas de estas funciones pueden obtenerse con base en el teorema A mediante la aplicación de la regla del cociente. Los resultados se resumen en el teorema B; véanse los problemas del 5 al 8.

Teorema B

Para todos los puntos x en el dominio de la función,

$$D_x \tan x = \sec^2 x \qquad D_x \cot x = -\csc^2 x$$
$$D_x \sec x = \sec x \tan x \qquad D_x \csc x = -\csc x \cot x$$

EJEMPLO 6 Determine $D_x(x^n \tan x)$ para $n \geq 1$.

SOLUCIÓN Aplicamos la regla del producto junto con el teorema B.

$$D_x(x^n \tan x) = x^n D_x(\tan x) + \tan x(D_x x^n)$$
$$= x^n \sec^2 x + nx^{n-1} \tan x$$ ■

EJEMPLO 7 Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \tan x$ en el punto $(\pi/4, 1)$.

SOLUCIÓN La derivada de $y = \tan x$ es $\dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x$. Cuando $x = \pi/4$, la derivada es igual a $\sec^2 \dfrac{\pi}{4} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2$. Así que la recta requerida tiene pendiente 2 y pasa por $(\pi/4, 1)$. Por lo tanto,

$$y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$$

■

EJEMPLO 8 Determine todos los puntos en la gráfica de $y = \operatorname{sen}^2 x$ donde la recta tangente es horizontal.

SOLUCIÓN La recta tangente es horizontal cuando la derivada es igual a cero. Para obtener la derivada de $\operatorname{sen}^2 x$, utilizamos la regla del producto.

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^2 x = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

El producto de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ es igual a cero cuando $\operatorname{sen} x$ o $\cos x$ son iguales a cero; esto es, en $x = 0, \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\dfrac{3\pi}{2}, \ldots$. ■

Revisión de conceptos

1. Por la definición, $D_x(\operatorname{sen} x) = \lim\limits_{h\to 0}$ _____.

2. Para evaluar el límite en la proposición anterior, primero utilizamos la identidad de la suma de ángulos para la función seno y luego realizamos un poco de álgebra para obtener

$$D_x(\operatorname{sen} x) = (-\operatorname{sen} x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{1 - \cos h}{h}\right) + (\cos x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

Los dos límites mostrados tienen los valores ______ y ______, respectivamente.

3. El resultado del cálculo en la proposición anterior es la importante fórmula de la derivada $D_x(\operatorname{sen} x) =$ _____. La correspondiente fórmula para la derivada $D_x(\cos x) =$ _____ se obtiene de manera análoga.

4. En $x = \pi/3$, $D_x(\operatorname{sen} x)$ tiene el valor _____. Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a $y = \operatorname{sen} x$ en $x = \pi/3$ es _____.

Conjunto de problemas 2.4

En los problemas del 1 al 18 encuentre $D_x y$.

1. $y = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$
2. $y = \operatorname{sen}^2 x$
3. $y = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$
4. $y = 1 - \cos^2 x$
5. $y = \sec x = 1/\cos x$
6. $y = \csc x = 1/\operatorname{sen} x$
7. $y = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
8. $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$
9. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x}$
10. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\tan x}$
11. $y = \operatorname{sen} x \cos x$
12. $y = \operatorname{sen} x \tan x$
13. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
14. $y = \dfrac{1 - \cos x}{x}$
15. $y = x^2 \cos x$
16. $y = \dfrac{x \cos x + \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}$
17. $y = \tan^2 x$
18. $y = \sec^3 x$

C 19. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = \cos x$ en $x = 1$.

20. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = \cot x$ en $x = \dfrac{\pi}{4}$.

21. Utilice la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ junto con la regla del producto para determinar $D_x \operatorname{sen} 2x$.

22. Utilice la identidad trigonométrica $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ junto con la regla del producto para determinar $D_x \cos 2x$.

23. Una rueda de la fortuna de 30 pies de radio está girando en sentido contrario a las manecillas del reloj, a una velocidad angular de 2 radianes por segundo. ¿Qué tan rápido se eleva (verticalmente) un asiento en el borde de la rueda cuando está 15 pies por encima de la recta horizontal que pasa por el centro de la rueda? *Sugerencia:* use el resultado del problema 21.

24. Una rueda de la fortuna de 20 pies de radio está girando en sentido contrario a las manecillas del reloj, a una velocidad angular de 1 radián por segundo. Un asiento en el borde de la rueda está en $(20, 0)$ en $t = 0$.

(a) ¿Cuáles son sus coordenadas en $t = \pi/6$?

(b) ¿Qué tan rápido se está elevando (verticalmente) en $t = \pi/6$?

(c) ¿Qué tan rápido se está elevando (verticalmente) cuando lo hace a la velocidad máxima?

25. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = \tan x$ en $x = 0$.

26. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = \tan^2 x$, donde la recta tangente es horizontal.

27. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = 9 \operatorname{sen} x \cos x$, donde la recta tangente es horizontal.

28. Sea $f(x) = x - \operatorname{sen} x$. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = f(x)$, donde la recta tangente es horizontal. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = f(x)$, donde la recta tangente tiene pendiente 2

29. Demuestre que las curvas $y = \sqrt{2} \operatorname{sen} x$ y $y = \sqrt{2} \cos x$ se intersecan en ángulos rectos sobre cierto punto, con $0 < x < \pi/2$.

30. A los t segundos, el centro de un corcho que se balancea está $3 \operatorname{sen} 2t$ centímetros arriba (o abajo) del nivel del agua. ¿Cuál es la velocidad del corcho en $t = 0, \pi/2, \pi$?

31. Utilice la definición de la derivada para demostrar que $D_x(\operatorname{sen} x^2) = 2x \cos x^2$.

32. Utilice la definición de la derivada para demostrar que $D_x(\operatorname{sen} 5x) = 5 \cos 5x$

GC *Los problemas 33 y 34 son ejercicios para computadora o calculadora gráfica.*

33. Sea $f(x) = x \operatorname{sen} x$.

(a) Dibuje las gráficas de $f(x)$ y de $f'(x)$ en $[\pi, 6\pi]$.

(b) ¿Cuántas soluciones tiene $f(x) = 0$ en $[\pi, 6\pi]$? ¿Cuántas soluciones tiene $f'(x) = 0$ en este intervalo?

(c) ¿En la siguiente conjetura, qué es incorrecto? Si f y f' son funciones continuas y derivables en $[a, b]$, si $f(a) = f(b) = 0$, y si $f(x) = 0$ tiene exactamente n soluciones en $[a, b]$, entonces $f'(x) = 0$ tiene exactamente $n - 1$ soluciones en $[a, b]$.

(d) Determine el valor máximo de $|f(x) - f'(x)|$ en $[\pi, 6\pi]$.

34. Sea $f(x) = \cos^3 x - 1.25 \cos^2 x + 0.225$. Determine $f'(x_0)$ en el punto x_0 en $[\pi/2, \pi]$ donde $f(x_0) = 0$.

Respuestas a la revisión de conceptos:
1. $[\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x]/h$ **2.** 0; 1
3. $\cos x$; $-\operatorname{sen} x$ **4.** $\frac{1}{2}$; $y - \sqrt{3}/2 = \frac{1}{2}(x - \pi/3)$

2.5 La regla de la cadena

Imagine que trata de encontrar la derivada de

$$F(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$$

Podríamos encontrar la derivada, pero primero tendríamos que multiplicar los 60 factores cuadráticos de $2x^2 - 4x + 1$ y después derivar el polinomio resultante. Y qué tal si trata de encontrar la derivada de

$$G(x) = \operatorname{sen} 3x$$

Podríamos ser capaces de utilizar algunas identidades trigonométricas para reducirla a algo que dependa de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ y después usar las reglas de la sección anterior.

Por fortuna, existe un método mejor. Después de aprender la *regla de la cadena*, seremos capaces de escribir las respuestas

$$F'(x) = 60(2x^2 - 4x + 1)^{59} (4x - 4)$$

y

$$G'(x) = 3 \cos 3x$$

La regla de la cadena es tan importante que rara vez usted derivará alguna función sin utilizarla.

Derivada de una función compuesta Si David puede mecanografiar dos veces más rápido que María, y María puede mecanografiar tres veces más rápido que José, entonces David puede mecanografiar $2 \times 3 = 6$ veces más rápido que José.

Considere la función compuesta $y = f(g(x))$. Si hacemos $u = g(x)$, entonces podremos pensar en f como una función de u. Suponga que $f(u)$ cambia el doble de rápido que u, y $u = g(x)$ cambia tres veces más rápido que x. ¿Qué tan rápido está cambiando y? Los

enunciados "$y = f(u)$ cambia el doble de rápido que u" y "$u = g(x)$ cambia tres veces más rápido que x" pueden volver a enunciarse como

$$\frac{dy}{du} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx} = 3$$

Al igual que en el párrafo anterior, parece como si las tasas se multiplicaran; es decir, la tasa de cambio de y con respecto a x debe ser igual a la tasa de cambio de y con respecto a u por la tasa de cambio de u con respecto a x. En otras palabras,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Esto en realidad es cierto, y haremos un bosquejo de la demostración al final de la sección. El resultado se denomina **regla de la cadena.**

Teorema A **Regla de la cadena**

Sean $y = f(u)$ y $u = g(x)$. Si g es derivable en x y f es derivable en $u = g(x)$, entonces la función compuesta $f \circ g$, definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, es derivable en x y

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Esto es,

$$D_x f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

o

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Puede recordar la regla de la cadena de esta manera: *la derivada de una función compuesta es la derivada de la función exterior evaluada en la función interna, por la derivada de la función interna.*

Aplicaciones de la regla de la cadena Empezamos con el ejemplo $(2x^2 - 4x + 1)^{60}$ introducido al inicio de esta sección.

EJEMPLO 1 Si $y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$, encuentre $D_x y$.

SOLUCIÓN Consideramos a y como la sexagésima potencia de una función de x; esto es

$$y = u^{60} \quad \text{y} \quad u = 2x^2 - 4x + 1$$

La función exterior es $f(u) = u^{60}$ y la función interna es $u = g(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x f(g(x)) \\ &= f'(u)g'(x) \\ &= (60u^{59})(4x - 4) \\ &= 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}(4x - 4) \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Si $y = 1/(2x^5 - 7)^3$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

SOLUCIÓN Considérelo de esta manera.

$$y = \frac{1}{u^3} = u^{-3} \quad \text{y} \quad u = 2x^5 - 7$$

Así,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\\ &= (-3u^{-4})(10x^4)\\ &= \frac{-3}{u^4}\cdot 10x^4\\ &= \frac{-30x^4}{(2x^5-7)^4}\end{aligned}$$ ■

Primero el último

Aquí está una regla informal que puede ayudarle a utilizar las reglas de las derivadas.

El último paso en el cálculo corresponde al primer paso en la derivación.

Por ejemplo, el último paso al calcular $(2x+1)^3$, es elevar al cubo $2x+1$, de modo que primero aplicaría la regla de la cadena a la función cúbica. El último paso al calcular

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

es tomar el cociente, de modo que la primera regla que se utiliza en la derivación es la regla del cociente.

EJEMPLO 3 Encuentre $D_t\left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3}\right)^{13}$.

SOLUCIÓN El último paso en el cálculo de esta expresión sería elevar la expresión interna al exponente 13. Por lo tanto, iniciamos aplicando la regla de la cadena a la función $y = u^{13}$, donde $u = (t^3-2t+1)/(t^4+3)$. La regla de la cadena seguida de la regla del cociente da

$$\begin{aligned}D_t\left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3}\right)^{13} &= 13\left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3}\right)^{13-1} D_t\left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3}\right)\\ &= 13\left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3}\right)^{12}\frac{(t^4+3)(3t^2-2)-(t^3-2t+1)(4t^3)}{(t^4+3)^2}\\ &= 13\left(\frac{t^3-2t+1}{t^4+3}\right)^{12}\frac{-t^6+6t^4-4t^3+9t^2-6}{(t^4+3)^2}\end{aligned}$$ ■

La regla de la cadena simplifica el cálculo de muchas derivadas que incluyen funciones trigonométricas. Aunque es posible derivar $y = \text{sen } 2x$ mediante identidades trigonométricas (véase el problema 21 de la sección anterior), es mucho más sencillo utilizar la regla de la cadena.

EJEMPLO 4 Si $y = \text{sen } 2x$, determine $\frac{dy}{dx}$.

SOLUCIÓN El último paso en el cálculo de esta expresión sería tomar el seno de la cantidad $2x$. Por lo tanto, utilizamos la regla de la cadena sobre la función $y = \text{sen } u$, donde $u = 2x$.

$$\frac{dy}{dx} = (\cos 2x)\left(\frac{d}{dx}2x\right) = 2\cos 2x$$ ■

EJEMPLO 5 Determine $F'(y)$, en donde $F(y) = y \text{ sen } y^2$

SOLUCIÓN El último paso en el cálculo de esta expresión sería multiplicar y y sen y^2, por lo que iniciamos con la aplicación de la regla del producto. Se necesita la regla de la cadena cuando derivamos sen y^2.

$$\begin{aligned}F'(y) &= yD_y[\text{sen } y^2] + (\text{sen } y^2)D_y(y)\\ &= y(\cos y^2)D_y(y^2) + (\text{sen } y^2)(1)\\ &= 2y^2\cos y^2 + \text{sen } y^2\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 6 Determine $D_x\left(\frac{x^2(1-x)^3}{1+x}\right)$.

SOLUCIÓN El último paso en el cálculo de esta expresión sería tomar el cociente. Así, se aplica primero la regla del cociente. Pero observe que cuando tomamos la derivada del numerador, debemos aplicar la regla del producto y luego la regla de la cadena.

$$
\begin{aligned}
D_x\left(\frac{x^2(1-x)^3}{1+x}\right) &= \frac{(1+x)D_x(x^2(1-x)^3) - x^2(1-x)^3 D_x(1+x)}{(1+x)^2} \\
&= \frac{(1+x)[x^2 D_x(1-x)^3 + (1-x)^3 D_x(x^2)] - x^2(1-x)^3(1)}{(1+x)^2} \\
&= \frac{(1+x)[x^2(3(1-x)^2(-1)) + (1-x)^3(2x)] - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} \\
&= \frac{(1+x)[-3x^2(1-x)^2 + 2x(1-x)^3] - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} \\
&= \frac{(1+x)(1-x)^2 x(2-5x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2}
\end{aligned}
$$
■

EJEMPLO 7 Determine $\frac{d}{dx}\frac{1}{(2x-1)^3}$.

SOLUCIÓN

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(2x-1)^3} = \frac{d}{dx}(2x-1)^{-3} = -3(2x-1)^{-3-1}\frac{d}{dx}(2x-1) = -\frac{6}{(2x-1)^4}$$
■

En este último ejemplo fuimos capaces de evitar la regla del cociente. Si utiliza la regla del cociente, notará que la derivada del numerador es 0, lo cual simplifica el cálculo. (Debe comprobar que la regla del cociente da la misma respuesta anterior). Como regla general, si el numerador de una fracción es una constante, entonces no utilice la regla del cociente; en lugar de eso, escriba el cociente como el producto de una constante y la expresión en el denominador elevada a una potencia negativa; luego aplique la regla de la cadena.

> **Notación para la derivada**
>
> En esta sección hemos utilizado las diferentes notaciones para la derivada, a saber,
>
> $$f'(x)$$
>
> $$\frac{dy}{dx}$$
>
> y
>
> $$D_x f(x)$$
>
> Ahora usted debe estar familiarizado con todas estas notaciones. Todas ellas se utilizarán en el resto del libro.

EJEMPLO 8 Exprese las siguientes derivadas en términos de la función $F(x)$. Suponga que F es derivable.

$$\text{(a) } D_x(F(x^3)) \quad \text{y} \quad \text{(b) } D_x[(F(x))^3]$$

SOLUCIÓN

(a) El último paso en el cálculo de esta expresión sería aplicar la función F. [Aquí, la función interna es $u = x^3$ y la función externa es $F(u)$]. Por lo tanto

$$D_x(F(x^3)) = F'(x^3)D_x(x^3) = 3x^2 F'(x^3)$$

(b) Para esta expresión, primero evaluaríamos $F(x)$ y luego elevaríamos al cubo el resultado. [Aquí, la función interna es $u = F(x)$ y la función externa es u^3]. Así que primero aplicamos la regla de la potencia y luego la regla de la cadena.

$$D_x[(F(x))^3] = 3[F(x)]^2 D_x(F(x)) = 3[F(x)]^2 F'(x)$$
■

Aplicación de la regla de la cadena más de una vez Algunas veces, cuando aplicamos la regla de la cadena a una función compuesta encontramos que la derivación de la función interna también requiere de la regla de la cadena. En casos como éste, basta con utilizar la regla de la cadena una segunda vez.

EJEMPLO 9 Encuentre $D_x \operatorname{sen}^3(4x)$.

SOLUCIÓN Recuerde que $\operatorname{sen}^3(4x) = [\operatorname{sen}(4x)]^3$, de modo que vemos esto como el cubo de una función de x. Así, al aplicar nuestra regla, "derivada de la función exterior evaluada en la función interior por la derivada de la función interna", tenemos

$$D_x \operatorname{sen}^3(4x) = D_x[\operatorname{sen}(4x)]^3 = 3[\operatorname{sen}(4x)]^{3-1}D_x[\operatorname{sen}(4x)]$$

Ahora aplicamos la regla de la cadena una vez más para la derivada de la función interna.

$$\begin{aligned} D_x \operatorname{sen}^3(4x) &= 3[\operatorname{sen}(4x)]^{3-1}D_x \operatorname{sen}(4x) \\ &= 3[\operatorname{sen}(4x)]^2 \cos(4x)D_x(4x) \\ &= 3[\operatorname{sen}(4x)]^2 \cos(4x)(4) \\ &= 12 \cos(4x) \operatorname{sen}^2(4x) \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 10 Encuentre $D_x \operatorname{sen}[\cos(x^2)]$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} D_x \operatorname{sen}[\cos(x^2)] &= \cos[\cos(x^2)] \cdot [-\operatorname{sen}(x^2)] \cdot 2x \\ &= -2x \operatorname{sen}(x^2) \cos[\cos(x^2)] \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 11 Suponga que las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son como se muestran en la figura 1. Utilice estas gráficas para aproximar (a) $(f - g)'(2)$ y (b) $(f \circ g)'(2)$.

SOLUCIÓN

(a) Por el teorema 2.3F, $(f - g)'(2) = f'(2) - g'(2)$. Con base en la figura 1, podemos determinar que $f'(2) \approx 1$ y $g'(2) \approx -\frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$(f - g)'(2) \approx 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

(b) Con base en la figura 1, podemos determinar que $f'(1) \approx \frac{1}{2}$. Por lo tanto, por la regla de la cadena

$$(f \circ g)'(2) = f'(g(2))g'(2) = f'(1)g'(2) \approx \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

■

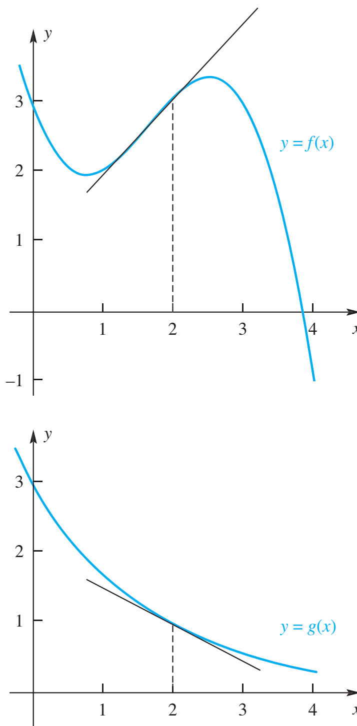


Figura 1

Una demostración parcial de la regla de la cadena Ahora podemos dar un esbozo de la demostración de la regla de la cadena.

Demostración Supongamos que $y = f(u)$ y $u = g(x)$, que g es derivable en x y que f es derivable en $u = g(x)$. Cuando a x se le da un incremento Δx, existen incrementos correspondientes en u y y dados por

$$\begin{aligned} \Delta u &= g(x + \Delta x) - g(x) \\ \Delta y &= f(g(x + \Delta x)) - f(g(x)) \\ &= f(u + \Delta u) - f(u) \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \end{aligned}$$

Como g es derivable en x, es continua allí (véase el teorema 2.2A), y de este modo $\Delta x \to 0$ fuerza a $\Delta u \to 0$. De aquí que,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Esta demostración es muy directa, pero desafortunadamente contiene un error sutil. Existen funciones $u = g(x)$ con la propiedad de que $\Delta u = 0$ para algunos puntos en toda vecindad de x (la función constante $g(x) = k$ es un buen ejemplo). Esto significa que la división entre Δu en nuestro primer paso podría no ser legal. No hay una forma sencilla de dar la vuelta a esta dificultad, aunque la regla de la cadena es válida, incluso en este caso. Damos una demostración completa de la regla de la cadena en el apéndice (véase la sección A.2, teorema B). ■

Revisión de conceptos

1. Si $y = f(u)$, donde $u = g(t)$, entonces $D_t y = D_u y \cdot$ ______. En notación de funciones, $(f \circ g)'(t) =$ _____ _____.

2. Si $w = G(v)$, donde $v = H(s)$, entonces $D_s w =$ ______ $D_s v$. En notación de funciones $(G \circ H)'(s) =$ _______ _______.

3. $D_x \cos[(f(x))^2] = -\text{sen}($______$) \cdot D_x($______$)$.

4. Si $y = (2x + 1)^3 \,\text{sen}(x^2)$, entonces $D_x y = (2x + 1)^3 \cdot$ ______ $+ \,\text{sen}(x^2) \cdot$ ______.

Conjunto de problemas 2.5

En los problemas del 1 al 20 encuentre $D_x y$.

1. $y = (1 + x)^{15}$

2. $y = (7 + x)^5$

3. $y = (3 - 2x)^5$

4. $y = (4 + 2x^2)^7$

5. $y = (x^3 - 2x^2 + 3x + 1)^{11}$

6. $y = (x^2 - x + 1)^{-7}$

7. $y = \dfrac{1}{(x + 3)^5}$

8. $y = \dfrac{1}{(3x^2 + x - 3)^9}$

9. $y = \text{sen}(x^2 + x)$

10. $y = \cos(3x^2 - 2x)$

11. $y = \cos^3 x$

12. $y = \text{sen}^4(3x^2)$

13. $y = \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^3$

14. $y = \left(\dfrac{x - 2}{x - \pi}\right)^{-3}$

15. $y = \cos\left(\dfrac{3x^2}{x + 2}\right)$

16. $y = \cos^3\left(\dfrac{x^2}{1 - x}\right)$

17. $y = (3x - 2)^2(3 - x^2)^2$

18. $y = (2 - 3x^2)^4(x^7 + 3)^3$

19. $y = \dfrac{(x + 1)^2}{3x - 4}$

20. $y = \dfrac{2x - 3}{(x^2 + 4)^2}$

En los problemas del 21 al 28 encuentre la derivada que se indica.

21. y' donde $y = (x^2 + 4)^2$

22. y' donde $y = (x + \text{sen}\, x)^2$

23. $D_t\left(\dfrac{3t - 2}{t + 5}\right)^3$

24. $D_s\left(\dfrac{s^2 - 9}{s + 4}\right)$

25. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{(3t - 2)^3}{t + 5}\right)$

26. $\dfrac{d}{d\theta}(\text{sen}^3 \theta)$

27. $\dfrac{dy}{dx}$, donde $y = \left(\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos 2x}\right)^3$

28. $\dfrac{dy}{dt}$, donde $y = [\text{sen}\, t \tan(t^2 + 1)]$

En los problemas del 29 al 32 evalúe la derivada que se indica.

29. $f'(3)$, si $f(x) = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x + 2}\right)^3$

30. $G'(1)$ si $G(t) = (t^2 + 9)^3(t^2 - 2)^4$

C **31.** $F'(1)$ si $F(t) = \text{sen}(t^2 + 3t + 1)$

32. $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ si $g(s) = \cos \pi s \,\text{sen}^2 \pi s$

En los problemas del 33 al 40 aplique la regla de la cadena más de una vez para encontrar la derivada que se indica.

33. $D_x[\text{sen}^4(x^2 + 3x)]$

34. $D_t[\cos^5(4t - 19)]$

35. $D_t[\text{sen}^3(\cos t)]$

36. $D_u\left[\cos^4\left(\dfrac{u + 1}{u - 1}\right)\right]$

37. $D_\theta[\cos^4(\text{sen}\, \theta^2)]$

38. $D_x[x \,\text{sen}^2(2x)]$

39. $\dfrac{d}{dx}\{\text{sen}[\cos(\text{sen}\, 2x)]\}$

40. $\dfrac{d}{dt}\{\cos^2[\cos(\cos t)]\}$

En los problemas 41 al 46 utilice las figuras 2 y 3 para aproximar las expresiones que se indican.

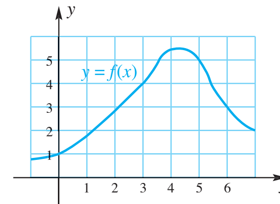


Figura 2

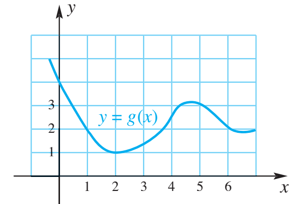


Figura 3

41. $(f + g)'(4)$

42. $(f - 2g)'(2)$

43. $(fg)'(2)$

44. $(f/g)'(2)$

45. $(f \circ g)'(6)$

46. $(g \circ f)'(3)$

En los problemas del 47 al 58 exprese la derivada que se indica en términos de la función $F(x)$. Suponga que F es derivable.

47. $D_x(F(2x))$

48. $D_x(F(x^2 + 1))$

49. $D_t((F(t))^{-2})$

50. $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{(F(z))^2}\right)$

51. $\dfrac{d}{dz}(1 + (F(2z)))^2$

52. $\dfrac{d}{dy}\left(y^2 + \dfrac{1}{F(y^2)}\right)$

53. $\dfrac{d}{dx}F(\cos x)$

54. $\dfrac{d}{dx}\cos F(x)$

55. $D_x \tan F(2x)$

56. $\dfrac{d}{dx}g(\tan 2x)$

57. $D_x(F(x)\operatorname{sen}^2 F(x))$

58. $D_x \sec^3 F(x)$

59. Dado que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 2$, determine $g'(0)$ en donde $g(x) = \cos f(x)$.

60. Dado que $F(0) = 2$ y $F'(0) = -1$, determine $G'(0)$ en donde $G(x) = \dfrac{x}{1 + \sec F(2x)}$.

61. Dado que $f(1) = 2, f'(1) = -1, g(1) = 0$ y $g'(1) = 1$, determine $F'(1)$, en donde $F(x) = f(x)\cos g(x)$.

62. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = 1 + x \operatorname{sen} 3x$ en $\left(\dfrac{\pi}{3}, 1\right)$. ¿En dónde esta recta corta al eje x?

63. Determine todos los puntos en la gráfica de $y = \operatorname{sen}^2 x$, donde la recta tangente tiene pendiente 1.

64. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = (x^2 + 1)^3(x^4 + 1)^2$ en $(1, 32)$.

65. Determine la ecuación de la recta tangente a $y = (x^2 + 1)^{-2}$ en $\left(1, \frac{1}{4}\right)$.

66. ¿En dónde cruza el eje x la recta tangente a $y = (2x + 1)^3$ en $(0, 1)$?

67. La recta tangente a $y = (x^2 + 1)^{-2}$ en $\left(1, \frac{1}{4}\right)$, ¿en dónde cruza el eje x?

68. Un punto P está moviéndose en el plano de modo que sus coordenadas después de t segundos son $(4 \cos 2t, 7 \operatorname{sen} 2t)$, medidas en pies.

(a) Demuestre que P está siguiendo una trayectoria elíptica. *Sugerencia:* demuestre que $(x/4)^2 + (y/7)^2 = 1$, que es una ecuación de una elipse.

(b) Obtenga una expresión para L, la distancia de P al origen en el instante t.

(c) ¿Qué tan rápido está cambiando la distancia entre P y el origen cuando $t = \pi/8$? Necesitará el hecho de que $D_u\left(\sqrt{u}\right) = 1/\left(2\sqrt{u}\right)$ (véase el ejemplo 4 de la sección 2.2).

69. Una rueda con centro en el origen y de radio 10 centímetros gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, a una velocidad de 4 revoluciones por segundo. Un punto P en el borde está en $(10, 0)$ cuando $t = 0$.

(a) ¿Cuáles son las coordenadas de P después de t segundos?

(b) ¿A qué velocidad se está elevando (o descendiendo) P en el instante $t = 1$?

70. Considere el dispositivo rueda-pistón de la figura 4. La rueda tiene radio de 1 pie y gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, a 2 radianes por segundo. La varilla conectada tiene 5 pies de longitud. El punto P está en $(1, 0)$ cuando $t = 0$

(a) Encuentre las coordenadas de P en el instante t.

(b) Encuentre la ordenada (coordenada y) de Q en el instante t (la abscisa siempre es cero).

(c) Determine la velocidad de Q en el instante t. Necesitará el hecho de que $D_u\left(\sqrt{u}\right) = 1/\left(2\sqrt{u}\right)$.

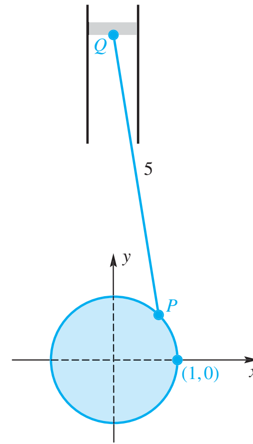


Figura 4

71. Haga el problema 70, suponiendo que la rueda está girando a 60 revoluciones por minuto y t se mide en segundos.

72. La carátula de un reloj común tiene un radio de 10 centímetros. Un extremo de una cuerda elástica se sujeta al borde en el 12 y el otro extremo a la punta del minutero, que es de 10 centímetros de longitud. ¿A qué velocidad se está estirando la cuerda a las 12:15 (suponiendo que el reloj no se retrasa debido a este estiramiento)?

C **73.** El horario y el minutero de un reloj son de 6 y 8 pulgadas de longitud, respectivamente. ¿Qué tan rápido se están separando las manecillas a las 12:20 (véase la figura 5)? *Sugerencia:* ley de los cosenos.

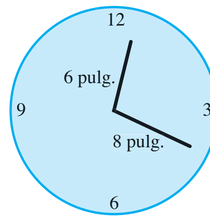


Figura 5

≈ GC **74.** Encuentre el tiempo aproximado entre las 12:00 y la 1:00 cuando la distancia s entre las puntas de las manecillas del reloj de la figura 5 está aumentando más rápidamente, esto es, cuando la derivada ds/dt es mayor.

75. Sea x_0 el valor positivo más pequeño de x en el que las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \operatorname{sen} 2x$ se intersecan. Determine x_0 y también el ángulo agudo en el que las dos curvas se intersecan en x_0 (véase el problema 40 de la sección 0.7).

76. Un triángulo isósceles está coronado por un semicírculo, como se muestra en la figura 6. Sea D el área del triángulo AOB y E, el área de la región sombreada. Determine una fórmula para D/E en términos de t y luego calcule

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{D}{E} \quad \text{y} \quad \lim_{t\to \pi^-} \frac{D}{E}$$

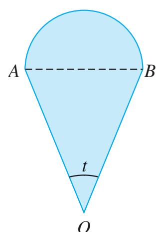


Figura 6

77. Demuestre que $D_x|x| = |x|/x, x \neq 0$. *Sugerencia:* Escriba $|x| = \sqrt{x^2}$ y utilice la regla de la cadena con $u = x^2$

78. Aplique el resultado del problema 77 para encontrar $D_x|x^2 - 1|$.

79. Aplique el resultado del problema 77 para encontrar $D_x|\text{sen } x|$.

80. En el capítulo 6 estudiaremos una función L que satisface $L'(x) = 1/x$. Encuentre cada una de las siguientes derivadas.

(a) $D_x(L(x^2))$ (b) $D_x(L(\cos^4 x))$

81. Sea $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$. Encuentre la derivada de $f(f(f(f(x))))$ en $x = 0$

82. Suponga que f es una función derivable.

(a) Encuentre $\frac{d}{dx}f(f(x))$. (b) Encuentre $\frac{d}{dx}f(f(f(x)))$.

(c) Denótese con $f^{[n]}$ la función definida como sigue $f^{[1]} = f$ y $f^{[n]} = f \circ f^{[n-1]}$ para $n \geq 2$. Por lo que, $f^{[2]} = f \circ f$, $f^{[3]} = f \circ f \circ f$, y así sucesivamente. Con base en sus resultados de las partes (a) y (b), haga una conjetura considerando $\frac{d}{dx}f^{[n]}$. Demuestre su conjetura.

83. Proporcione una segunda demostración de la regla del cociente. Escriba

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = D_x\left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)$$

y utilice la regla del producto y la regla de la cadena.

84. Suponga que f es derivable y que existen números reales x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = x_2$ y $f(x_2) = x_1$. Sea $g(x) = f(f(f(f(x))))$. Demuestre que $g'(x_1) = g'(x_2)$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $D_t u$; $f'(g(t))g'(t)$ **2.** $D_v w$; $G'(H(s))H'(s)$ **3.** $(f(x))^2$; $(f(x))^2$ **4.** $2x \cos(x^2)$; $6(2x + 1)^2$

2.6 Derivadas de orden superior

La operación de derivación toma una función f y produce una nueva función f'. Si ahora derivamos f', producimos otra función denotada por f'' (léase "f biprima") y denominada **segunda derivada** de f. A su vez, puede derivarse, y de ahí producir f''', que se denomina **tercera derivada** de f, y así sucesivamente. La **cuarta derivada** se denota con $f^{(4)}$, la **quinta derivada** se denota con $f^{(5)}$, etcétera.

Por ejemplo, si

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 8$$

entonces

$$f'(x) = 6x^2 - 8x + 7$$
$$f''(x) = 12x - 8$$
$$f'''(x) = 12$$
$$f^{(4)}(x) = 0$$

Como la derivada de la función cero es cero, la cuarta derivada y todas las *derivadas de orden superior* de f serán cero.

Hemos introducido tres notaciones para la derivada (ahora también llamada la *primera derivada*) de $y = f(x)$. Son

$$f'(x) \qquad D_x y \qquad \frac{dy}{dx}$$

denominadas, respectivamente, *notación prima*, *notación D* y *notación de Leibniz*. Hay una variación de la notación prima, y', que se utilizará en ocasiones. Todas estas notaciones tienen extensiones para derivadas de orden superior, como se muestra en la siguiente tabla. Observe especialmente que la notación de Leibniz, aunque complicada, le pareció más apropiada a Leibniz. Él pensó que es más natural escribir

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{como} \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

La notación de Leibniz para la segunda derivada se lee *la segunda derivada de y respecto a x*.

Notaciones para las derivadas de $y = f(x)$

Derivada	f' Notación	y' Notación	D Notación	Notación de Leibniz
Primera	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Segunda	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
Tercera	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
Cuarta	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4y}{dx^4}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n-ésima	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

EJEMPLO 1 Si $y = \text{sen } 2x$, encuentre d^3y/dx^3, d^4y/dx^4 y $d^{12}y/dx^{12}$.

SOLUCIÓN

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cos 2x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2^2 \text{ sen } 2x$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = -2^3 \cos 2x$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = 2^4 \text{ sen } 2x$$
$$\frac{d^5y}{dx^5} = 2^5 \cos 2x$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^{12}y}{dx^{12}} = 2^{12} \text{ sen } 2x$$

■

Velocidad y aceleración En la sección 2.1 utilizamos la noción de velocidad instantánea para motivar la definición de la derivada. Revisemos esta noción por medio de un ejemplo. También, a partir de ahora, utilizaremos la sola palabra *velocidad* en lugar de la frase más larga *velocidad instantánea*.

EJEMPLO 2 Un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado, de modo que su posición s satisface $s = 2t^2 - 12t + 8$, donde s se mide en centímetros y t en segundos con $t \geq 0$. Determine la velocidad del objeto cuando $t = 1$ y cuando $t = 6$. ¿En qué momento la velocidad es cero? ¿Cuándo es positiva?

SOLUCIÓN Si utilizamos el símbolo $v(t)$ para la velocidad en el instante t, entonces

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 4t - 12$$

Así,

$$v(1) = 4(1) - 12 = -8 \text{ centímetros por segundo}$$
$$v(6) = 4(6) - 12 = 12 \text{ centímetros por segundo}$$

La velocidad es cero cuando $4t - 12 = 0$, esto es, cuando $t = 3$. La velocidad es positiva cuando $4t - 12 > 0$, o cuando $t > 3$. Todo esto se muestra de manera esquemática en la figura 1.

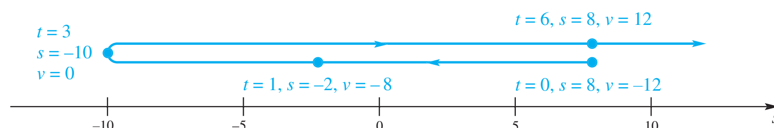


Figura 1

Por supuesto, el objeto está moviéndose a lo largo del eje s, no sobre la trayectoria señalada. Pero la trayectoria señalada muestra lo que le sucede al objeto. Entre $t = 0$ y $t = 3$ la velocidad es negativa; el objeto se mueve hacia la izquierda (regresando). En el instante $t = 3$ se ha “frenado” a una velocidad cero. Después inicia a moverse hacia la derecha conforme su velocidad se vuelve positiva. Así, velocidad negativa corresponde al movimiento en la dirección que disminuye s; velocidad positiva corresponde a moverse en la dirección que aumenta s. Un estudio riguroso de estos puntos se dará en el capítulo 3. ■

Hay una distinción técnica entre las palabras *velocidad* y *rapidez*. La velocidad tiene un signo asociado con ella; puede ser positiva o negativa. **Rapidez** se define como el valor absoluto de la velocidad. Por lo tanto, en el ejemplo anterior, la rapidez en $t = 1$ es $|-8| = 8$ centímetros por segundo. El medidor en la mayoría de los automóviles es un *rapidezómetro*, ya que siempre da valores no negativos.

Ahora queremos dar una interpretación física a la segunda derivada d^2s/dt^2. Por supuesto, sólo es la primera derivada de la velocidad. Así, mide la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, la cual tiene el nombre de **aceleración**. Si se denota por medio de a, entonces

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Medición del tiempo
Si $t = 0$ corresponde al momento presente, entonces $t < 0$ corresponde al pasado, y $t > 0$ al futuro. En muchos problemas, será obvio que sólo estamos interesados con el futuro. Sin embargo, como el enunciado del ejemplo 3 no especifica esto, parece razonable permitir que t tenga tanto valores negativos como positivos.

En el ejemplo 2, $s = 2t^2 - 12t + 8$. Así,

$$v = \frac{ds}{dt} = 4t - 12$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 4$$

Esto significa que la velocidad está aumentando a una razón constante de 4 centímetros por segundo cada segundo, que podemos escribir como 4 centímetros por segundo por segundo, o 4 cm/seg^2.

EJEMPLO 3 Un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado horizontal de tal manera que su posición en el instante t está especificada por

$$s = t^3 - 12t^2 + 36t - 30$$

Aquí s se mide en pies y t en segundos

(a) ¿Cuándo es cero la velocidad?
(b) ¿Cuándo es positiva la velocidad?
(c) ¿Cuándo se está moviendo el objeto hacia la izquierda (es decir, en la dirección negativa)?
(d) ¿Cuándo es positiva la aceleración?

SOLUCIÓN

(a) $v = ds/dt = 3t^2 - 24t + 36 = 3(t - 2)(t - 6)$. Así, $v = 0$ en $t = 2$ y en $t = 6$.
(b) $v > 0$ cuando $(t - 2)(t - 6) > 0$. En la sección 0.2 aprendimos cómo resolver desigualdades cuadráticas. La solución es $\{t: t < 2 \text{ o } t > 6\}$ o en notación de intervalos, $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$; véase la figura 2.



Figura 2

(c) El objeto está moviéndose hacia la izquierda cuando $v < 0$; esto es, cuando $(t-2)(t-6) < 0$. Esta desigualdad tiene como solución el intervalo $(2, 6)$.
(d) $a = dv/dt = 6t - 24 = 6(t - 4)$. Por lo tanto, $a > 0$ cuando $t > 4$. El movimiento del punto se muestra de manera esquemática en la figura 3.

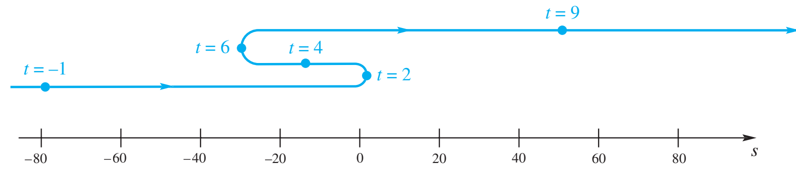


Figura 3

Problemas sobre un cuerpo que cae Si un objeto se lanza directamente hacia arriba (o hacia abajo) desde una altura inicial de s_0 pies, con una velocidad inicial v_0 pies por segundo y si s es su altura por arriba del piso en pies después de t segundos, entonces

$$s = -16t^2 + v_0 t + s_0$$

Esto supone que el experimento se lleva a cabo cerca del nivel del mar y que se desprecia la resistencia del aire. El diagrama en la figura 4 describe la situación que tenemos en mente. Obsérvese que velocidad positiva significa que el objeto está moviéndose hacia arriba.

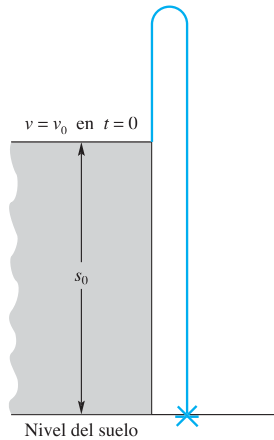


Figura 4

EJEMPLO 4 Desde lo alto de un edificio, de 160 pies de altura, se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 64 pies por segundo.

(a) ¿Cuándo alcanza la altura máxima?
(b) ¿Cuál es su altura máxima?
(c) ¿Cuándo llega al piso?
(d) ¿A qué velocidad llega al piso?
(e) ¿Cuál es su aceleración en $t = 2$?

SOLUCIÓN Suponga que $t = 0$ corresponde al instante cuando la pelota fue lanzada. Entonces $s_0 = 160$ y $v_0 = 64$ (v_0 es positiva, ya que la pelota se lanzó *hacia arriba*)). Así,

$$s = -16t^2 + 64t + 160$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -32t + 64$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -32$$

(a) La pelota alcanzó su altura máxima en el instante en que su velocidad fue cero, esto es, cuando $-32t + 64 = 0$ o cuando $t = 2$ segundos
(b) En $t = 2$, $s = -16(2)^2 + 64(2) + 160 = 224$ pies.
(c) La pelota llega al piso cuando $s = 0$, esto es, cuando

$$-16t^2 + 64t + 160 = 0$$

Dividiendo entre -16 se obtiene

$$t^2 - 4t - 10 = 0$$

Entonces, la fórmula cuadrática da

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 40}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{14}}{2} = 2 \pm \sqrt{14}$$

Sólo la respuesta positiva tiene sentido. Así, la pelota llega al piso en $t = 2 + \sqrt{14} \approx 5.74$ segundos.
(d) En $t = 2 + \sqrt{14}$, $v = -32\left(2 + \sqrt{14}\right) + 64 \approx -119.73$. Así, la pelota llega al piso con una rapidez de 119.73 pies por segundo.

(e) La aceleración siempre es −32 pies por segundo por segundo. Ésta es la aceleración debida a la gravedad cerca del mar. ■

Revisión de conceptos

1. Si $y = f(x)$, entonces la tercera derivada de y con respecto a x puede denotarse por cualquiera de los siguientes cuatro símbolos: _____.

2. Si $s = f(t)$ denota la posición de una partícula en un eje coordenado en el instante t, entonces su velocidad está dada por _____, su rapidez está dada por _____, y su aceleración está dada por _____.

3. Si $s = f(t)$ denota la posición de un objeto en el instante t, entonces el objeto está moviéndose hacia la derecha si _____ .

4. Suponga que un objeto se lanza directamente hacia arriba de modo que su altura s en el instante t está dado por $s = f(t)$. El objeto alcanza su altura máxima cuando ds/dt = _____, después del cual ds/dt _____.

Conjunto de problemas 2.6

En los problemas del 1 al 8 encuentre d^3y/dx^3.

1. $y = x^3 + 3x^2 + 6x$ **2.** $y = x^5 + x^4$

3. $y = (3x + 5)^3$ **4.** $y = (3 - 5x)^5$

5. $y = \operatorname{sen}(7x)$ **6.** $y = \operatorname{sen}(x^3)$

7. $y = \dfrac{1}{x - 1}$ **8.** $y = \dfrac{3x}{1 - x}$

En los problemas del 9 al 16 encuentre $f''(2)$.

9. $f(x) = x^2 + 1$ **10.** $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + x$

11. $f(t) = \dfrac{2}{t}$ **12.** $f(u) = \dfrac{2u^2}{5 - u}$

13. $f(\theta) = (\cos \theta\pi)^{-2}$ **14.** $f(t) = t \operatorname{sen}(\pi/t)$

15. $f(s) = s(1 - s^2)^3$ **16.** $f(x) = \dfrac{(x + 1)^2}{x - 1}$

17. Sea $n! = n(n - 1)(n - 2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$. Por consiguiente, $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ y $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$. Damos a $n!$ el nombre de ***n* factorial**. Demuestre que $D_x^n(x^n) = n!$

18. Encuentre una fórmula para

$$D_x^n(a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0)$$

19. Sin hacer cálculo alguno, encuentre cada derivada.

(a) $D_x^4(3x^3 + 2x - 19)$ (b) $D_x^{12}(100x^{11} - 79x^{10})$

(c) $D_x^{11}(x^2 - 3)^5$

20. Encuentre una fórmula para $D_x^n(1/x)$.

21. Si $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x - 6$, encuentre el valor de f'' en cada cero de f', esto es, en cada punto c en donde $f'(c) = 0$

22. Suponga que $g(t) = at^2 + bt + c$ y $g(1) = 5$, $g'(1) = 3$ y $g''(1) = -4$. Encuentre a, b y c.

En los problemas del 23 al 28, un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado horizontal de acuerdo a la fórmula s = f(t), donde s, la distancia dirigida medida desde el origen, está en pies y t está en segundos. En cada caso, responda las siguientes preguntas (véanse los ejemplos 2 y 3).

(a) ¿Cuáles son $v(t)$ y $a(t)$, la velocidad y la aceleración, en el instante t?

(b) ¿Cuándo está moviéndose el objeto hacia la derecha?

(c) ¿Cuándo está moviéndose hacia la izquierda?

(d) ¿Cuándo es negativa su aceleración?

(e) Dibuje un diagrama esquemático que muestre el movimiento del objeto.

23. $s = 12t - 2t^2$ **24.** $s = t^3 - 6t^2$

25. $s = t^3 - 9t^2 + 24t$ **26.** $s = 2t^3 - 6t + 5$

27. $s = t^2 + \dfrac{16}{t}, t > 0$ **28.** $s = t + \dfrac{4}{t}, t > 0$

29. Si $s = \frac{1}{2}t^4 - 5t^3 + 12t^2$, encuentre la velocidad del objeto en movimiento cuando su aceleración es cero.

30. Si $s = \frac{1}{10}(t^4 - 14t^3 + 60t^2)$, encuentre la velocidad del objeto en movimiento cuando su aceleración es cero.

31. Dos objetos se mueven a lo largo de un eje coordenado. Al final de t segundos sus distancias dirigidas desde el origen, en pies, están dadas por $s_1 = 4t - 3t^2$ y $s_2 = t^2 - 2t$, respectivamente.

(a) ¿Cuándo tienen la misma velocidad?

(b) ¿Cuándo tienen la misma rapidez?

(c) ¿Cuál es la altura máxima?

32. Las posiciones de dos objetos, P_1 y P_2, en un eje coordenado al final de t segundos, están dadas por $s_1 = 3t^3 - 12t^2 + 18t + 5$ y $s_2 = -t^3 + 9t^2 - 12t$, respectivamente. ¿Cuándo tienen la misma velocidad los dos objetos?

33. Un objeto que se lanza directamente hacia arriba está a una altura $s = -16t^2 + 48t + 256$ pies después de t segundos (véase el ejemplo 4).

(a) ¿Cuál es su velocidad inicial?

(b) ¿Cuándo alcanza su altura máxima?

(c) ¿Cuál es la altura máxima?

C (d) ¿Cuándo llega al suelo?

C (e) ¿Con qué rapidez llega al suelo?

34. Un objeto lanzado directamente hacia arriba desde el nivel del piso con una velocidad de 48 pies por segundo es $s = 48t - 16t^2$ pies de altura al final de t segundos.

(a) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza?

(b) Al final de un segundo, ¿qué tan rápido se está moviendo el objeto y en qué dirección?

(c) ¿Cuánto tarda en regresar a su posición original?

C **35.** Un proyectil se dispara directamente hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo. Su altura a los t segundos está dada por $5 = v_0t - 16t^2$ pies. ¿Cuál debe ser su velocidad inicial para que el proyectil alcance una altura máxima de 1 milla?

36. Se lanza un objeto directamente hacia abajo desde lo alto de un acantilado con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo, cae $s = v_0t + 16t^2$ pies en t segundos. Si cae al océano en 3 segundos a una velocidad de 140 pies por segundo, ¿cuál es la altura del acantilado?

37. Un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado horizontal, de tal manera que su posición en el instante t está especificada por $s = t^3 - 3t^2 - 24t - 6$. Aquí, s se mide en centímetros y t, en segundos. ¿Cuándo está frenándose el objeto; es decir, cuándo su *rapidez* está disminuyendo?

38. Explique por qué un punto que se mueve a lo largo de una línea está frenándose cuando su velocidad y su aceleración tienen signos opuestos (véase el problema 37).

EXPL **39.** Leibniz obtuvo una fórmula general para $D_x^n(uv)$, donde u y v son funciones de x. Vea si usted puede encontrarla. *Sugerencia:* empiece por considerar los casos $n = 1, n = 2$ y $n = 3$.

40. Utilice la fórmula del problema 39 para encontrar $D_x^4(x^4 \text{ sen } x)$.

GC **41.** Sea $f(x) = x[\text{sen } x - \cos(x/2)]$.

(a) Dibuje las gráficas de $f(x), f'(x), f''(x)$ y $f'''(x)$ en $[0, 6]$ utilizando los mismos ejes.

(b) Evalúe $f'''(2.13)$.

GC **42.** Repita el problema 41 para $f(x) = (x + 1)/(x^2 + 2)$.

Respuestas a la revisión de conceptos:
1. $f'''(x)$; $D_x^3 y$; d^3y/dx^3; y''' **2.** ds/dt; $|ds/dt|$; d^2s/dt^2
3. $f'(t) > 0$ **4.** 0; <0

2.7 Derivación implícita

En la ecuación

$$y^3 + 7y = x^3$$

no podemos despejar y en términos de x. Sin embargo, aún puede ser el caso de que exista exactamente una y correspondiente a cada x. Por ejemplo, podemos preguntar qué valores de y (si existe alguno) corresponden a $x = 2$. Para responder esta pregunta, debemos resolver

$$y^3 + 7y = 8$$

Desde luego, $y = 1$ es una solución, y resulta que $y = 1$ es la *única* solución real. Dado $x = 2$, la ecuación $y^3 + 7y = x^3$ determina un correspondiente valor de y. Decimos que la ecuación define a y como una función **implícita** de x. La gráfica de esta ecuación, que se muestra en la figura 1, por supuesto que se ve como la gráfica de una función derivable. El nuevo elemento es que no tenemos una ecuación de la forma $y = f(x)$. Con base en la gráfica, suponemos que y es alguna función desconocida de x. Si denotamos a esta función como $y(x)$, podemos escribir la ecuación como

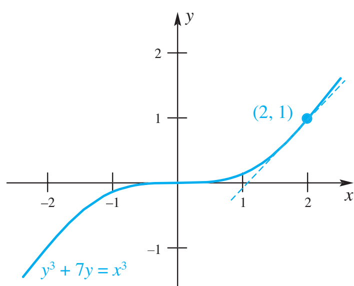


Figura 1

$$[y(x)]^3 + 7y(x) = x^3$$

Aunque no tenemos una fórmula para $y(x)$, podemos, a pesar de eso, obtener una relación entre x, $y(x)$ y $y'(x)$, mediante la derivación, respecto a x, de ambos lados de la ecuación. Recordando aplicar la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(y^3) + \frac{d}{dx}(7y) = \frac{d}{dx}x^3$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 7\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 + 7) = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{3y^2 + 7}$$

Obsérvese que nuestra expresión para dy/dx incluye tanto a x como a y, un hecho que con frecuencia es una molestia. Pero si sólo deseamos determinar la pendiente en un punto en donde conocemos ambas coordenadas, no existe dificultad. En $(2, 1)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(2)^2}{3(1)^2 + 7} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

La pendiente es $\frac{6}{5}$.

El método que se acaba de ilustrar para determinar dy/dx sin despejar primero la y —de manera explícita de la ecuación dada— en términos de x se denomina **derivación implícita**. Pero, ¿el método es legítimo? ¿Da la respuesta correcta?

Un ejemplo que puede verificarse Para dar alguna evidencia de la validez del método, considérese el ejemplo siguiente, el cual puede resolverse de dos maneras.

EJEMPLO 1 Encuentre dy/dx, si $4x^2y - 3y = x^3 - 1$.

SOLUCIÓN

Método 1 Podemos despejar explícitamente la y de la ecuación dada como sigue:

$$y(4x^2 - 3) = x^3 - 1$$

$$y = \frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4x^2 - 3)(3x^2) - (x^3 - 1)(8x)}{(4x^2 - 3)^2} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$$

Método 2 Derivación implícita Igualamos las derivadas de los dos lados.

$$\frac{d}{dx}(4x^2y - 3y) = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$

Después de utilizar la regla para el producto en el primer término, obtenemos,

$$4x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot 8x - 3\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(4x^2 - 3) = 3x^2 - 8xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3}$$

Estas dos respuestas se ven diferentes. Por un lado, la respuesta obtenida por el método 1 incluye sólo a x, mientras que la respuesta del método 2 incluye a x y a y. Sin embargo, recuerde que de la ecuación original podía despejarse a y en términos de x para obtener $y = (x^3 - 1)/(4x^2 - 3)$. Cuando sustituimos $y = (x^3 - 1)/(4x^2 - 3)$ en la expresión que se acaba de obtener para dy/dx, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3} = \frac{3x^2 - 8x\dfrac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}}{4x^2 - 3}$$

$$= \frac{12x^4 - 9x^2 - 8x^4 + 8x}{(4x^2 - 3)^2} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$$ ■

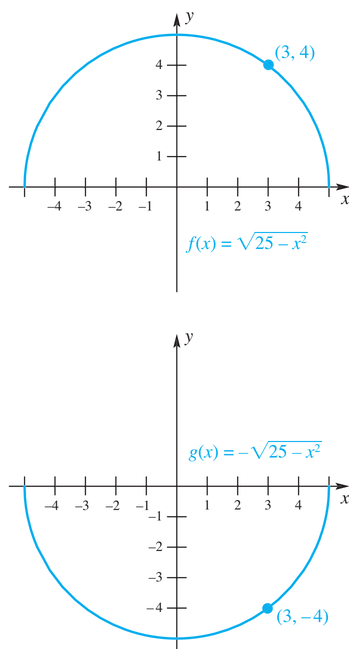


Figura 2

Algunas dificultades sutiles Si una ecuación en x y y determina una función $y = f(x)$ y si esta función es derivable, entonces el método de la derivación implícita obtendrá una expresión correcta para dy/dx. Pero obsérvese que hay dos grandes *si* en este enunciado.

Considere la ecuación

$$x^2 + y^2 = 25$$

que determina a las funciones $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Sus gráficas se muestran en la figura 2.

Felizmente, ambas funciones son derivables en $(-5, 5)$. Primero, considérese a f. Satisface

$$x^2 + [f(x)]^2 = 25$$

Cuando derivamos implícitamente y despejamos a $f'(x)$, obtenemos

$$2x + 2f(x)f'(x) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Un tratamiento similar de $g(x)$ produce

$$g'(x) = -\frac{x}{g(x)} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Con fines prácticos, podemos obtener ambos resultados de manera simultánea por medio de la derivación implícita de $x^2 + y^2 = 25$. Ésta da

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} & \text{si } y = f(x) \\ \dfrac{-x}{-\sqrt{25 - x^2}} & \text{si } y = g(x) \end{cases}$$

Naturalmente, los resultados son idénticos a los que se obtuvieron antes.

Obsérvese que con frecuencia es suficiente saber que $dy/dx = -x/y$ para aplicar nuestros resultados. Supóngase que queremos conocer las pendientes de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ cuando $x = 3$. Para $x = 3$, los correspondientes valores de y son 4 y -4. Las pendientes en (3, 4) y (3, -4), obtenidas por medio de la sustitución en $-x/y$, son $-\frac{3}{4}$ y $\frac{3}{4}$, respectivamente (véase la figura 2).

Para complicar el asunto, hacemos notar que

$$x^2 + y^2 = 25$$

determina muchas otras funciones. Por ejemplo, considere la función h definida por

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \le x \le 3 \\ -\sqrt{25 - x^2} & \text{si } 3 < x \le 5 \end{cases}$$

También satisface $x^2 + y^2 = 25$, ya que $x^2 + [h(x)]^2 = 25$. Pero ni siquiera es continua en $x = 3$, de modo que en realidad no tiene derivada allí (véase la figura 3).

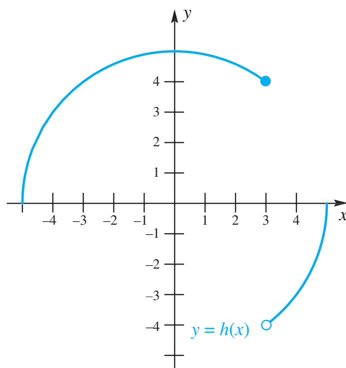


Figura 3

Aunque el tema de funciones implícitas conduce a preguntas técnicas difíciles (tratadas en cálculo avanzado), los problemas que estudiamos tienen soluciones directas.

Más ejemplos En los siguientes ejemplos suponemos que la ecuación dada determina una o más funciones derivables, cuyas derivadas pueden obtenerse por medio de la derivación implícita. Obsérvese que en cada caso empezamos tomando la derivada, respecto de la variable apropiada, de cada lado de la ecuación. Después utilizamos la regla de la cadena conforme la necesitemos.

EJEMPLO 2 Encuentre dy/dx, si $x^2 + 5y^3 = x + 9$

SOLUCIÓN

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 5y^3) = \frac{d}{dx}(x + 9)$$

$$2x + 15y^2\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x}{15y^2}$$

■

EJEMPLO 3 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y^3 - xy^2 + \cos xy = 2$$

en el punto (0, 1).

SOLUCIÓN Por simplicidad, usamos la notación y' para dy/dx. Cuando derivamos ambos lados e igualamos los resultados, obtenemos

$$3y^2y' - x(2yy') - y^2 - (\operatorname{sen} xy)(xy' + y) = 0$$
$$y'(3y^2 - 2xy - x \operatorname{sen} xy) = y^2 + y \operatorname{sen} xy$$
$$y' = \frac{y^2 + y \operatorname{sen} xy}{3y^2 - 2xy - x \operatorname{sen} xy}$$

En $(0, 1)$, $y' = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente en (0, 1) es

$$y - 1 = \tfrac{1}{3}(x - 0)$$

o

$$y = \tfrac{1}{3}x + 1$$

■

Otra vez la regla para la potencia Hemos aprendido que $D_x(x^n) = nx^{n-1}$, donde n es cualquier entero distinto de cero. Ahora extendemos esto para el caso en donde n es cualquier número racional.

Teorema A Regla para la potencia

Sea r cualquier número racional distinto de cero. Entonces, para $x > 0$,

$$D_x(x^r) = rx^{r-1}$$

Si r puede escribirse en su mínima expresión como $r = p/q$, donde q es impar, entonces $D_x(x^r) = rx^{r-1}$ para toda x.

Demostración Como r es racional, r puede escribirse como p/q, donde p y q son enteros con $q > 0$. Sea

$$y = x^r = x^{p/q}$$

Entonces

$$y^q = x^p$$

y, por la derivación implícita,

$$qy^{q-1}D_x y = px^{p-1}$$

Por consiguiente,

$$D_x y = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}}$$
$$= \frac{p}{q}x^{p-1-p+p/q} = \frac{p}{q}x^{p/q-1} = rx^{r-1}$$

Hemos obtenido el resultado deseado; pero para ser honestos, debemos señalar un error en nuestro argumento. En el paso de la derivación implícita supusimos que $D_x y$ existe, esto es, que $y = x^{p/q}$ es derivable. Podemos llenar este hueco, pero como es un trabajo difícil, relegamos la demostración completa al apéndice (sección A.2, teorema C). ■

EJEMPLO 4 Si $y = 2x^{5/3} + \sqrt{x^2 + 1}$, encuentre $D_x y$.

SOLUCIÓN Mediante el teorema A y la regla de la cadena, tenemos

$$D_x y = 2D_x x^{5/3} + D_x(x^2 + 1)^{1/2}$$
$$= 2 \cdot \frac{5}{3} x^{5/3-1} + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{1/2-1} \cdot (2x)$$
$$= \frac{10}{3} x^{2/3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

■

Revisión de conceptos

1. De la relación implícita $yx^3 - 3y = 9$ puede despejarse y resultando $y =$ _____.

2. La derivación implícita de $y^3 + x^3 = 2x$ con respecto a x da _____ $+ 3x^2 = 2$.

3. La derivación implícita de $xy^2 + y^3 - y = x^3$ respecto a x da _____ = _____.

4. La regla para la potencia con exponentes racionales dice que $D_x(x^{p/q}) =$ _____. Esta regla, junto con la regla de la cadena, implica que $D_x[(x^2 - 5x)^{5/3}] =$ _____.

Conjunto de problemas 2.7

Suponiendo que en los problemas del 1 al 12 cada ecuación define una función derivable de x, encuentre $D_x y$ por medio de la derivación implícita.

1. $y^2 - x^2 = 1$ **2.** $9x^2 + 4y^2 = 36$

3. $xy = 1$

4. $x^2 + \alpha^2 y^2 = 4\alpha^2$, donde α es una constante.

5. $xy^2 = x - 8$ **6.** $x^2 + 2x^2 y + 3xy = 0$

7. $4x^3 + 7xy^2 = 2y^3$ **8.** $x^2 y = 1 + y^2 x$

9. $\sqrt{5xy} + 2y = y^2 + xy^3$ **10.** $x\sqrt{y + 1} = xy + 1$

11. $xy + \text{sen}(xy) = 1$ **12.** $\cos(xy^2) = y^2 + x$

En los problemas del 13 al 18 encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto que se indica (véase el ejemplo 3).

13. $x^3 y + y^3 x = 30; (1, 3)$

14. $x^2 y^2 + 4xy = 12y; (2, 1)$

15. $\text{sen}(xy) = y; (\pi/2, 1)$

16. $y + \cos(xy^2) + 3x^2 = 4; (1, 0)$

17. $x^{2/3} - y^{2/3} - 2y = 2; (1, -1)$

18. $\sqrt{y} + xy^2 = 5; (4, 1)$

En los problemas del 19 al 32 encuentre dy/dx

19. $y = 3x^{5/3} + \sqrt{x}$ **20.** $y = \sqrt[3]{x} - 2x^{7/2}$

21. $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **22.** $y = \sqrt[4]{2x + 1}$

23. $y = \sqrt[4]{3x^2 - 4x}$ **24.** $y = (x^3 - 2x)^{1/3}$

25. $y = \frac{1}{(x^3 + 2x)^{2/3}}$ **26.** $y = (3x - 9)^{-5/3}$

27. $y = \sqrt{x^2 + \text{sen}\, x}$ **28.** $y = \sqrt{x^2 \cos x}$

29. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 \,\text{sen}\, x}}$ **30.** $y = \sqrt[4]{1 + \text{sen}\, 5x}$

31. $y = \sqrt[4]{1 + \cos(x^2 + 2x)}$ **32.** $y = \sqrt{\tan^2 x + \text{sen}^2 x}$

33. Si $s^2 t + t^3 = 1$, encuentre ds/dt y dt/ds

34. Si $y = \text{sen}(x^2) + 2x^3$, encuentre dy/dx.

35. Dibuje la gráfica de la circunferencia $x^2 + 4x + y^2 + 3 = 0$, y luego encuentre las ecuaciones de las dos rectas tangentes que pasan por el origen.

36. Determine la ecuación de la **recta normal** (recta perpendicular a la recta tangente) a la curva $8(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2)$ en $(3, 1)$.

37. Suponga que $xy + y^3 = 2$. Entonces, derivando implícitamente dos veces con respecto a x, por pasos se obtiene:

(a) $xy' + y + 3y^2 y' = 0$;

(b) $xy'' + y' + y' + 3y^2 y'' + 6y(y')^2 = 0$.

Despeje y' de (a) y sustituya en (b) y después despeje y''

38. Encuentre y'', si $x^3 - 4y^2 + 3 = 0$ (véase el problema 37).

39. Encuentre y'' en $(2, 1)$, si $2x^2 y - 4y^3 = 4$ (véase el problema 37).

40. Utilice derivación implícita dos veces para encontrar y'' en $(3, 4)$, si $x^2 + y^2 = 25$

41. Demuestre que la recta normal a $x^3 + y^3 = 3xy$ en $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ pasa por el origen.

42. Demuestre que las hipérbolas $xy = 1$ y $x^2 - y^2 = 1$ se intersecan en ángulos rectos.

43. Demuestre que las gráficas de $2x^2 + y^2 = 6$ y $y^2 = 4x$ se intersecan en ángulos rectos.

44. Suponga que las curvas C_1 y C_2 se intersecan en (x_0, y_0) con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, como se muestra en la figura 4. Entonces (véase el problema 40 de la sección 0.7) el ángulo positivo q de C_1 (es decir, desde la recta tangente a C_1 en (x_0, y_0)) a C_2 satisface

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

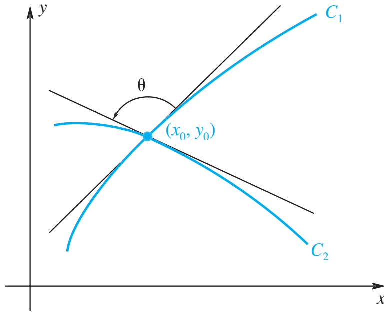


Figura 4

Encuentre los ángulos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ a la circunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ en los dos puntos de intersección.

45. Encuentre el ángulo de la recta $y = 2x$ a la curva $x^2 - xy + 2y^2 = 28$ en su punto de intersección en el primer cuadrante (véase el problema 44).

46. Una partícula de masa m se mueve a lo largo del eje x, de modo que su posición x y velocidad $v = dx/dt$ satisfacen

$$m(v^2 - v_0^2) = k(x_0^2 - x^2)$$

donde v_0, x_0 y k son constantes. Demuestre por medio de derivación implícita que

$$m\frac{dv}{dt} = -kx$$

siempre que $v \neq 0$.

47. La curva $x^2 - xy + y^2 = 16$ es una elipse con centro en el origen y con la recta $y = x$ como su eje mayor. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en los dos puntos donde la elipse interseca al eje x.

48. Encuentre todos los puntos sobre la curva $x^2y - xy^2 = 2$ en donde la recta tangente es vertical, esto es, en donde $dx/dy = 0$.

≈ **49.** ¿A qué altura h debe estar el foco de la figura 5, si el punto (1.25, 0) está en el borde de la región iluminada?

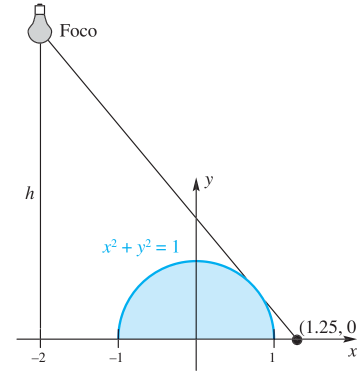


Figura 5

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $9/(x^3 - 3)$
2. $3y^2\frac{dy}{dx}$ **3.** $x \cdot 2y\frac{dy}{dx} + y^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 3x^2$
4. $\frac{p}{q}x^{p/q-1}$; $\frac{5}{3}(x^2 - 5x)^{2/3}(2x - 5)$

2.8 Razones de cambio relacionadas

Si una variable y depende del tiempo t, entonces su derivada dy/dt se denomina **razón de cambio con respecto al tiempo,** o sólo **razón de cambio**. Por supuesto, si y mide la distancia, entonces esta razón de cambio también se llama velocidad. Estamos interesados en una amplia variedad de razones de cambio: la razón a la que fluye agua al interior de un depósito, la tasa a la cual el área de un derrame de petróleo está creciendo, la razón a la cual el valor de una propiedad está aumentando, etcétera. Si y se da de manera explícita en términos de t, el problema es sencillo; sólo derivamos y luego evaluamos la derivada en el instante requerido.

Puede ser que, en lugar de conocer a y de manera explícita en términos de t, conozcamos una relación que relaciona a y y a otra variable x, y que también conozcamos algo acerca de dx/dt. Aún podemos ser capaces de encontrar dy/dt, ya que dy/dt y dx/dt son **razones de cambio relacionadas** (o razones afines). Por lo regular, esto requiere derivación implícita.

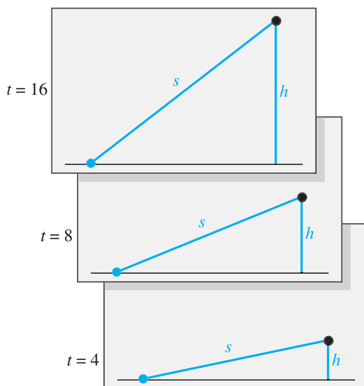


Figura 1

Dos ejemplos sencillos

En la preparación de un procedimiento sistemático para la resolución de problemas con tasas de cambio relacionadas, estudiamos dos ejemplos.

EJEMPLO 1 Se suelta un pequeño globo en un punto a 150 pies alejado de un observador, quien se encuentra en el nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta hacia arriba a una velocidad de 8 pies por segundo, ¿qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo cuando éste se encuentra a 50 pies de altura?

SOLUCIÓN Sea t el número de segundos contados a partir de que se suelta el globo. Sea h la altura del globo y s su distancia al observador (véase la figura 1). Tanto h como s son variables que dependen de t; sin embargo, la base del triángulo (la distancia des-

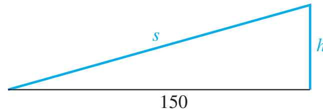


Figura 2

de el observador al punto de lanzamiento) permanece sin cambio conforme t aumenta. La figura 2 muestra las cantidades clave en un diagrama simple.

≈ Antes de avanzar, recordemos un tema estudiado antes en el libro, *estimación de la respuesta*. Observe que, al inicio, s casi no cambia ($ds/dt \approx 0$), pero eventualmente s cambia casi tan rápido como cambia h ($ds/dt \approx dh/dt = 8$). Una estimación de ds/dt cuando $h = 50$ podría ser alrededor de un tercio o un medio de dh/dt, o 3. Si obtenemos una respuesta alejada de este valor, sabremos que hemos cometido un error. Por ejemplo, respuesta tales como 17, o aun 7, obviamente son incorrectas.

Continuemos con la solución exacta. Para enfatizar, preguntamos y respondemos tres preguntas fundamentales.

(a) ¿Qué está dado? *Respuesta:* $dh/dt = 8$.
(b) ¿Qué queremos conocer? *Respuesta:* queremos conocer ds/dt en el instante en que $h = 50$
(c) ¿Cómo están relacionadas s y h? *Respuesta:* las variables s y h cambian con el tiempo (son funciones implícitas de t), pero siempre están relacionadas por medio de la ecuación pitagórica

$$s^2 = h^2 + (150)^2$$

Si derivamos de manera implícita con respecto a t y utilizamos la regla de la cadena, obtenemos

$$2s\frac{ds}{dt} = 2h\frac{dh}{dt}$$

o

$$s\frac{ds}{dt} = h\frac{dh}{dt}$$

Esta relación se cumple para toda $t > 0$

Ahora, y *no antes de este momento*, pasamos al instante específico cuando $h = 50$. Con base en el Teorema de Pitágoras, vemos que, cuando $h = 50$

$$s = \sqrt{(50)^2 + (150)^2} = 50\sqrt{10}$$

Sustituyendo en $s(ds/dt) = h(dh/dt)$ se obtiene

$$50\sqrt{10}\frac{ds}{dt} = 50(8)$$

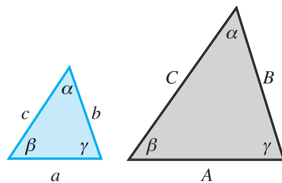
o

$$\frac{ds}{dt} = \frac{8}{\sqrt{10}} \approx 2.53$$

En el instante cuando $h = 50$, la distancia entre el globo y el observador está aumentando a una velocidad de 2.53 pies por segundo. ■

Triángulos semejantes

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes.



En geometría aprendimos que razones de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales. Por ejemplo,

$$\frac{b}{a} = \frac{B}{A}$$

Este hecho, utilizado en el ejemplo 2, con frecuencia se necesitará en el conjunto de problemas.

EJEMPLO 2 En un tanque cónico se vierte agua a una razón de 8 pies cúbicos por minuto. Si la altura del tanque es de 12 pies y el radio de su abertura circular es de 6 pies, ¿qué tan rápido se está elevando el nivel del agua cuando este líquido tiene una profundidad de 4 pies?

SOLUCIÓN Denótese la profundidad del agua con h y sea r el radio correspondiente de la superficie del agua (véase la figura 3).

Se nos *da* que el volumen, V, de agua en el tanque está aumentando a una razón de 8 pies cúbicos por minuto; esto es, $dV/dt = 8$. *Queremos saber* qué tan rápido está elevándose el agua (esto es, dh/dt) en el instante cuando $h = 4$

Necesitamos encontrar una ecuación que relacione a V y a h; después la derivaremos para obtener una relación entre dV/dt y dh/dt. La fórmula para el volumen de agua en el tanque $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, tiene una variable no deseada r; es indeseada porque no conocemos su razón dr/dt. No obstante, por medio de triángulos semejantes (véase el recuadro al margen), tenemos $r/h = 6/12$, o $r = h/2$. Sustituyendo esto en $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ da

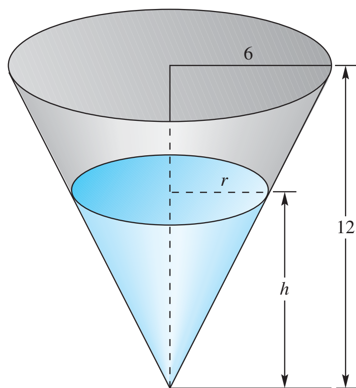


Figura 3

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$$

Ahora derivamos de manera implícita; para ello, tenemos presente que tanto V como h dependen de t. Obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi h^2}{12}\frac{dh}{dt} = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt}$$

Ahora que tenemos una relación entre dV/dt y dh/dt, y no antes, consideramos la situación cuando $h = 4$. Sustituyendo $h = 4$ y $dV/dt = 8$, obtenemos

$$8 = \frac{\pi(4)^2}{4}\frac{dh}{dt}$$

a partir de la cual

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2}{\pi} \approx 0.637$$

Cuando la profundidad del agua es de 4 pies, el nivel del agua está elevándose a 0.637 pies por minuto. ■

Si reflexiona por un momento en el ejemplo 2, usted se da cuenta de que el nivel del agua se elevará cada vez más despacio conforme el tiempo avance. Por ejemplo, cuando $h = 10$

$$8 = \frac{\pi(10)^2}{4}\frac{dh}{dt}$$

de modo que $dh/dt = 32/(100\pi) \approx 0.102$ pies por minuto.

Lo que estamos diciendo en realidad es que la aceleración d^2h/dt^2 es negativa. Podemos calcular una expresión para ella. En cualquier instante t,

$$8 = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt}$$

de modo que

$$\frac{32}{\pi} = h^2\frac{dh}{dt}$$

Si derivamos otra vez implícitamente, obtenemos

$$0 = h^2\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{dh}{dt}\left(2h\frac{dh}{dt}\right)$$

de la cual

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{-2\left(\frac{dh}{dt}\right)^2}{h}$$

Ésta es claramente negativa.

Un procedimiento sistemático Los ejemplos 1 y 2 sugieren el siguiente método para resolver un problema de tasas relacionadas.

Paso 1: Denote mediante t el tiempo transcurrido. Dibuje un diagrama que sea válido para toda $t > 0$. Etiquete las cantidades cuyos valores no cambian conforme t aumenta con sus respectivos valores *constantes* dados. Asigne letras a las cantidades que varían con t y etiquete las secciones convenientes de la figura con estas variables.

Paso 2: Establezca lo que está dado acerca de las variables y qué información se requiere de ellas. Esta información estará en la forma de derivadas respecto a t.

Paso 3: Relacione las variables y escriba una ecuación que sea válida para todos los instantes $t > 0$, no sólo para alguno en particular.

Paso 4: Derive implícitamente, con respecto a t, la ecuación encontrada en el paso 3. La ecuación resultante, que tiene derivadas con respecto a t, es válida para toda $t > 0$

Paso 5: En este momento, y no antes, sustituya en la ecuación encontrada en el paso 4 todos los datos que son válidos *en el instante particular,* por el cual la respuesta al problema es necesaria. Despeje la derivada deseada.

EJEMPLO 3 Un aeroplano que vuela hacia el norte, a 640 millas por hora, pasa sobre cierta ciudad al mediodía. Un segundo aeroplano que va hacia el este, a 600 millas por hora, está directamente encima de la misma ciudad 15 minutos más tarde. Si los aeroplanos están volando a la misma altitud, ¿qué tan rápido se están separando a la 1:15 P. M.?

SOLUCIÓN

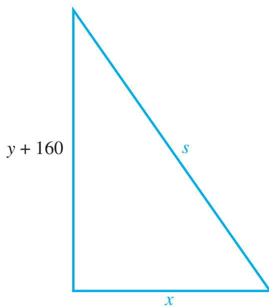


Figura 4

Paso 1: Denótese con t el número de horas después de las 12:15 P. M., con y a la distancia en millas recorridas por el aeroplano que se dirige al norte, después de las 12:15 P. M., x la distancia que ha volado, después de las 12:15 P. M., el aeroplano que lleva rumbo este y s la distancia entre los aeroplanos. Quince minutos después del mediodía, a las 12:15 P. M., el aeroplano que va hacia el norte habrá volado $\frac{640}{4} = 160$ millas, de modo que la distancia, en el instante t, de la ciudad al aeroplano que va al norte será $y + 160$. (Véase la figura 4.)

Paso 2: Se nos da que, para toda $t > 0$, $dy/dt = 640$ y que $dx/dt = 600$. Queremos conocer ds/dt en $t = 1$, esto es, a la 1:15 P. M.

Paso 3: Por el Teorema de Pitágoras,

$$s^2 = x^2 + (y + 160)^2$$

Paso 4: Al derivar implícitamente con respecto a t y mediante la regla de la cadena, tenemos

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2(y + 160)\frac{dy}{dt}$$

o

$$s\frac{ds}{dt} = x\frac{dx}{dt} + (y + 160)\frac{dy}{dt}$$

Paso 5: Para toda $t > 0$, $dx/dt = 600$ y $dy/dt = 640$, mientras que en el instante particular $t = 1$, $x = 600$, $y = 640$ y $s = \sqrt{(600)^2 + (640 + 160)^2} = 1000$. Cuando sustituimos estos datos en la ecuación del paso 4, obtenemos

$$1000\frac{ds}{dt} = (600)(600) + (640 + 160)(640)$$

de la cual

$$\frac{ds}{dt} = 872$$

A la 1:15 P. M., los aeroplanos están alejándose a 872 millas por hora

≈ Ahora veamos si nuestra respuesta tiene sentido. Otra vez, véase la figura 4. Claramente, s está aumentando más rápido que lo que aumentan x o y, de modo que ds/dt excede a 640. Por otra parte, seguramente s está aumentando más lentamente que la suma de x y y; es decir, $ds/dt < 600 + 640 = 1240$. Nuestra respuesta, $ds/dt = 872$, es razonable. ■

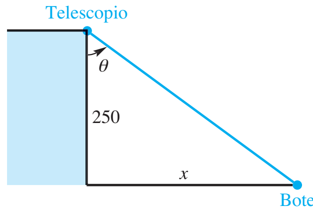


Figura 5

EJEMPLO 4 Una mujer que está ante un acantilado, con un telescopio observa cómo se aproxima un bote de motor a la playa que está directamente debajo de ella. Si el telescopio está a 250 pies por arriba del nivel del agua y si el bote se aproxima a 20 pies por segundo, ¿a qué velocidad está cambiando el ángulo del telescopio cuando el bote está a 250 pies de la playa?

SOLUCIÓN

Paso 1: Dibuje una figura (véase la figura 5) e introduzca variables x y θ, como se muestra.

Paso 2: Nos dan que $dx/dt = -20$; el signo es negativo porque x disminuye con el tiempo. Queremos conocer $d\theta/dt$ en el instante cuando $x = 250$

Paso 3: Por trigonometría

$$\tan\theta = \frac{x}{250}$$

Paso 4: Derivamos implícitamente usando el hecho de que $D_\theta \tan\theta = \sec^2\theta$ (teorema 2.4B). Obtenemos

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{250}\frac{dx}{dt}$$

Paso 5: En el instante cuando $x = 250$, θ es $\theta/4$ radianes y $\sec^2\theta = \sec^2(\pi/4) = 2$. Por lo tanto,

$$2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{250}(-20)$$

o

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{25} = -0.04$$

El ángulo está cambiando -0.04 radianes por segundo. El signo negativo muestra que θ está disminuyendo con el tiempo. ■

EJEMPLO 5 Conforme el Sol se pone detrás de un edificio de 120 pies de altura, la sombra del inmueble crece. ¿Qué tan rápido está creciendo la sombra (en pies por segundo) cuando los rayos del Sol forman un ángulo de 45◦ (o $\pi/4$ radianes).

SOLUCIÓN

Paso 1: Denótese con t al tiempo, en segundos, a partir de la medianoche. Sea x la longitud de la sombra en pies y sea θ el ángulo del rayo del Sol. Véase la figura 6.

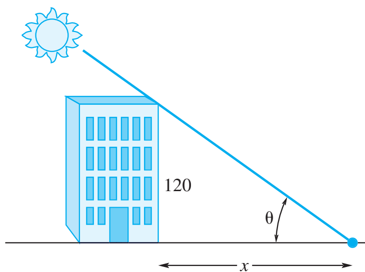


Figura 6

Paso 2: Como la Tierra da un giro completo una vez cada 24 horas, es decir, 86,400 segundos, sabemos que $d\theta/dt = -2\pi/86{,}400$. (El signo negativo es necesario porque θ *disminuye* conforme el Sol se pone). Queremos conocer dx/dt cuando $\theta = \pi/4$.

Paso 3: La figura 6 indica que las cantidades x y θ satisfa cen $\cot\theta = x/120$, por lo que $x = 120\cot\theta$

Paso 4: Al derivar ambos lados de $x = 120\cot\theta$ con respecto a t se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = 120(-\csc^2\theta)\frac{d\theta}{dt} = -120(\csc^2\theta)\left(-\frac{2\pi}{86{,}400}\right) = \frac{\pi}{360}\csc^2\theta$$

Paso 5: Cuando $\theta = \pi/4$, tenemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{360}\csc^2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{360}(\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{180} \approx 0.0175\frac{\text{pies}}{\text{sec}}$$

Observe que conforme el Sol se pone, θ disminuye (ya que $d\theta/dt$ es negativa), mientras que la sombra x está aumentando (ya que dx/dt es positiva). ■

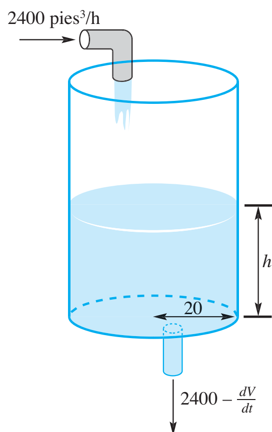


Figura 7

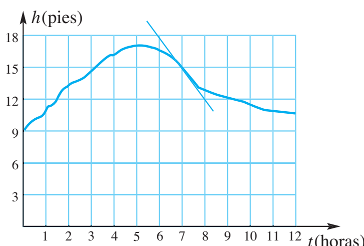


Figura 8

Un problema gráfico de razones relacionadas Con frecuencia, en una situación de la vida real no conocemos una fórmula para cierta función, sino que tenemos una gráfica determinada de manera empírica para ella. Aun así, podemos ser capaces de responder preguntas sobre razones de cambio.

EJEMPLO 6 La ciudad de Webster monitorea la altura del agua en su tanque cilíndrico con un dispositivo de registro automático. El agua se bombea de manera constante al tanque a una velocidad de 2400 pies cúbicos por hora, como se muestra en la figura 7. Durante cierto periodo de 12 horas (empezando a la medianoche), el nivel del agua se elevó y descendió de acuerdo con la gráfica en la figura 8. Si el radio del tanque es de 20 pies, ¿a qué velocidad está utilizándose el agua a las 7:00 A. M.?

SOLUCIÓN Sean t el número de horas transcurridas después de la medianoche, h la altura del agua en el tanque en el instante t y V el volumen del agua en el tanque en el instante t (véase la figura 7). Entonces dV/dt es la razón de entrada menos la razón de salida, de modo que $2400 - dV/dt$ es la velocidad a la que el agua está utilizándose en cualquier instante t. Como la pendiente de la recta tangente en $t = 7$ es aproximadamente -3 (véase la figura 8), concluimos que $dh/dt \approx -3$ en ese instante.

Para un cilindro, $V = \pi r^2 h$, y de este modo

$$V = \pi(20)^2 h$$

de la cual

$$\frac{dV}{dt} = 400\pi \frac{dh}{dt}$$

En $t = 7$,

$$\frac{dV}{dt} \approx 400\pi(-3) \approx -3770$$

Por lo tanto, los residentes de la ciudad de Webster estaban utilizando el agua a una tasa de $2400 + 3770 = 6170$ pies cúbicos por hora a las 7:00 A. M. ■

Revisión de conceptos

1. Preguntar qué tan rápido está cambiando u con respecto al tiempo después de dos horas es equivalente a preguntar el valor de _____ en _____.

2. Un aeroplano con rapidez constante de 400 millas por hora voló directamente sobre un observador. La distancia entre el observador y el aeroplano aumentó a una velocidad creciente y eventualmente se aproxima a una tasa de _____.

3. Si dh/dt disminuye cuando el tiempo aumenta, entonces d^2h/dt^2 es _____.

4. Si está fluyendo agua al interior de un tanque esférico a una razón constante, entonces la altura del nivel del líquido crece a una tasa variable y positiva dh/dt, pero d^2h/dt^2 es _____ hasta que h llega a la mitad de la altura del tanque, después de lo cual d^2h/dt^2 se vuelve _____.

Conjunto de problemas 2.8

1. Cada arista de un cubo variable está aumentando a razón de 3 pulgadas por segundo. ¿Qué tan rápido está aumentando el volumen del cubo cuando una arista es de 12 pulgadas de longitud?

2. Suponga que una pompa de jabón mantiene su forma esférica conforme se expande, ¿qué tan rápido aumenta el radio cuando éste es de 3 pulgadas, si se sopla aire a la burbuja a una razón de 3 pulgadas cúbicas por segundo?

≈ **3.** Un aeroplano que vuela horizontalmente a una altitud de una milla pasa directamente sobre un observador. Si la velocidad constante del aeroplano es de 400 millas por hora, ¿qué tan rápido aumenta su distancia respecto del observador 45 segundos más tarde? *Sugerencia:* observe que en 45 segundos $\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{80}\text{ hora}\right)$, el aeroplano ha recorrido 5 millas.

4. Un estudiante utiliza un popote para beber de un vaso cónico de papel, cuyo eje es vertical, a razón de 3 centímetros cúbicos por segundo. Si la altura del vaso es de 10 centímetros y el diámetro de su abertura es de 6 centímetros, ¿qué tan rápido está bajando el nivel del líquido cuando la profundidad del líquido es de 5 centímetros?

≈ **5.** Un aeroplano que vuela hacia el oeste a 300 millas por hora pasa por arriba de la torre de control al mediodía, y un segundo aeroplano que vuela hacia el norte, a la misma altitud pero a 400 millas por hora, pasa por la torre una hora después. ¿Qué tan rápido está cambiando la distancia entre los aeroplanos a las 2:00 p. m.? *Sugerencia:* véase el ejemplo 3.

≈ **6.** Una mujer en un muelle jala una cuerda atada a la proa de un pequeño bote. Si las manos de la mujer están 10 pies por encima del punto en donde la cuerda está sujeta al bote, y si ella está recobrando la cuerda a razón de 2 pies por segundo, ¿qué tan rápido se aproxima el bote al muelle cuando falta por recogerse 25 pies de cuerda?

≈ **7.** Una escalera de 20 pies está recargada contra un edificio. Si la parte inferior de la escalera se desliza a lo largo del pavimento alejándose directamente del edificio a una velocidad de 1 pie por segun-

do, ¿qué tan rápido está descendiendo el extremo superior de la escalera, cuando el pie de la escalera está a 5 pies de la pared?

8. Supongamos que un derrame de petróleo se está limpiando por medio de bacterias esparcidas en él, las cuales lo consumen a una razón de 4 pies cúbicos por hora. El derrame de petróleo está modelado por la forma de un cilindro muy delgado cuya altura es el grosor de la capa de petróleo. Cuando el grosor de la capa es de 0.001 pie, el cilindro tiene 500 pies de diámetro. Si la altura disminuye 0.0005 pie por hora, ¿a qué razón cambia el área de la capa?

9. De un tubo sale arena a razón de 16 pies cúbicos por segundo. Si al caer la arena se forma un montón cónico en el piso, cuya altura siempre es $\frac{1}{4}$ del diámetro de la base, ¿qué tan rápido aumenta la altura cuando el montón es de 4 pies de altura? *Sugerencia:* refiérase a la figura 9 y utilice el hecho de que $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

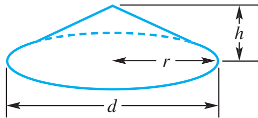


Figura 9

10. Un niño está volando una cometa. Si la cometa está a 90 pies del nivel de la mano del niño y el viento sopla en dirección horizontal a 5 pies por segundo, ¿con que rapidez el niño suelta cordel, cuando ya ha soltado 150 pies de cordel? (Suponga que el cordel permanece en línea recta desde la mano hasta la cometa, en verdad una suposición poco realista).

11. Una alberca es de 40 pies de largo, 20 pies de ancho, 8 pies de profundidad en el extremo más hondo y 3 pies en el extremo menos profundo; el fondo es rectangular (véase la figura 10). Si la alberca se llena al bombear agua a una razón de 40 pies cúbicos por minuto, ¿con qué rapidez se eleva el nivel del agua cuando la profundidad es de 3 pies en el extremo más hondo?

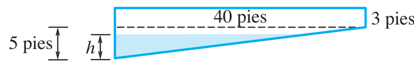


Figura 10

12. Una partícula P se mueve a lo largo de la gráfica de $y = \sqrt{x^2 - 4}$, $x \geq 2$, de modo que la abscisa de P está aumentando a razón de 5 unidades por segundo. ¿Qué tan rápido está aumentando la ordenada (coordenada y) cuando $x = 3$?

13. Un disco metálico se dilata con el calor. Si su radio aumenta a razón de 0.02 pulgadas por segundo, ¿con qué rapidez aumenta el área de una de sus caras cuando su radio es de 8.1 pulgadas?

14. Dos barcos parten desde el mismo puerto en una isla, uno va en dirección norte a 24 nudos (24 millas náuticas por hora) y el otro con rumbo este a 30 nudos. El barco con dirección norte salió a las 9:00 a. m. y el otro dejó el puerto a las 11:00 A. M. ¿Qué tan rápido aumenta la distancia entre ellos a las 2:00 P. M.? *Sugerencia:* sea $t = 0$ a las 11:00 A. M.

15. La luz de un faro, que se encuentra 1 kilómetro alejado de una playa recta, gira a 2 revoluciones por minuto. ¿Con qué rapidez se mueve el rayo de luz a lo largo de la playa cuando pasa por el punto que se encuentra a $\frac{1}{2}$ kilómetro del punto que está enfrente del faro?

16. Una aficionada a la aviación observa un aeroplano que vuela a una altura constante de 4000 pies hacia un punto que se encuentra directamente sobre de ella. Ella observa que cuando el ángulo de elevación es $\frac{1}{2}$ radián, éste aumenta a una velocidad de $\frac{1}{10}$ radián por segundo. ¿Cuál es la velocidad del aeroplano?

17. Chris, que mide 6 pies de estatura, camina alejándose de un poste de luz, de 30 pies de altura, a una velocidad de 2 pies por segundo

(a) ¿A qué rapidez aumenta la longitud de su sombra cuando Chris está a 24 pies del poste? ¿A 30 pies?

(b) ¿A qué velocidad se mueve el extremo de la sombra?

(c) Para seguir el extremo de su sombra, ¿a qué velocidad angular debe levantar sus ojos Chris cuando su sombra es de 6 pies de largo?

18. El vértice del ángulo, θ, opuesto a la base de un triángulo isósceles, con lados iguales de longitud 100 centímetros, aumenta a razón de $\frac{1}{10}$ de radián por minuto. ¿Con qué rapidez aumenta el área del triángulo cuando el ángulo del vértice mide $\pi/6$ radianes? *Sugerencia:* $A = \frac{1}{2}ab \text{ sen } \theta$.

19. Un largo paso a desnivel de una autopista pasa por encima de una vía de ferrocarril que está a 100 pies por debajo y forma un ángulo recto con él. Si un automóvil que viaja a 45 millas por hora (66 pies por segundo) está directamente por arriba de la parte delantera de un tren que va a 60 millas por hora (88 pies por segundo), ¿qué tan rápido se están separando 10 segundos después?

20. Se bombea agua a una razón constante de 2 litros por minuto (1 litro = 1000 centímetros cúbicos) a un tanque con forma de cono circular recto truncado. El tanque tiene una altura de 80 centímetros y los radios inferior y superior miden 20 y 40 centímetros, respectivamente (véase la figura 11). ¿A qué velocidad se eleva el nivel del agua cuando la profundidad del líquido es de 30 centímetros? *Nota:* el volumen, V, de un cono circular recto truncado de altura h y radios inferior y superior a y b es $V = \frac{1}{3}\pi h \cdot (a^2 + ab + b^2)$.

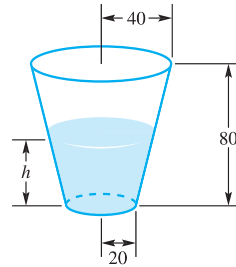


Figura 11

21. Del fondo de un depósito semiesférico, de radio 8 pies, está saliendo agua a razón de 2 pies cúbicos por hora. El depósito estaba lleno en cierto momento. ¿A qué velocidad cambia el nivel del agua cuando su altura es de 3 pies? *Nota:* el volumen de un casquete de altura h en un hemisferio de radio r es $\pi h^2[r - (h/3)]$. (Véase la figura 12).

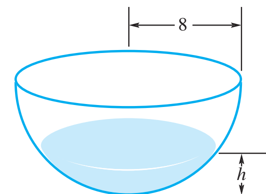


Figura 12

22. Las manecillas de un reloj son de 5 pulgadas (el minutero) y de 4 pulgadas (el horario). ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los extremos de las manecillas a las 3:00?

23. Una bola de acero caerá $16t^2$ pies en t segundos. Dicha pelota se deja caer desde una altura de 64 pies a una distancia horizontal de 10 pies de un poste de luz, que tiene una altura de 48 pies. Cuando la bola llega al suelo, ¿con qué rapidez se está moviendo la sombra de la bola?

24. Resuelva otra vez el ejemplo 6; suponga que el tanque de agua es una esfera de radio de 20 pies. (Véase el problema 21 para el volumen de un casquete esférico).

25. Resuelva otra vez el ejemplo 6; suponga que el tanque de agua tiene forma de un hemisferio superior, con radio de 20 pies. (Véase el problema 21 para el volumen de un casquete esférico).

26. Con respecto al ejemplo 6. Desde la medianoche hasta el mediodía, ¿cuánta agua utilizó, en este periodo de 12 horas, la ciudad de Webster? *Sugerencia:* éste no es un problema de derivación.

≈ **27.** Una escalera de 18 pies descansa contra un muro vertical de 12 pies y su extremo superior sobresale del muro. El extremo inferior de la escalera se empuja a lo largo del piso y se aleja del muro a 2 pies por segundo.

(a) Encuentre la velocidad vertical del extremo superior de la escalera cuando ésta forma un ángulo de 60° con el piso.

(b) Encuentre la aceleración vertical en ese mismo instante.

28. Una bola esférica de acero permanece en el fondo del depósito del problema 21. Responda la pregunta planteada allí, si la bola tiene radio

(a) 6 pulgadas y (b) 2 pies.

(Suponga que la bola no afecta el flujo que sale del tanque).

29. Una bola de nieve se derrite a una razón proporcional al área de su superficie.

(a) Demuestre que su radio se contrae a una razón constante.

(b) Si en una hora de derrite a $\frac{8}{27}$ de su volumen original, ¿cuánto tardará en derretirse por completo?

30. Un cilindro circular recto con un pistón en un extremo se llena con gas. Su volumen cambia de manera continua a causa del pistón. Si la temperatura del gas se mantiene constante, entonces, por **la Ley de Boyle**, $PV = k$, donde P es la presión (libras por pulgada cuadrada), V es el volumen (pulgadas cúbicas) y k es una constante. La presión es controlada por medio de un dispositivo de registro en un periodo de 10 minutos. El resultado se muestra en la figura 13. De manera aproximada, ¿qué tan rápido estaba cambiando el volumen en $t = 6.5$, si el volumen en ese instante fue de 300 pulgadas cúbicas? (Véase el ejemplo 6.)

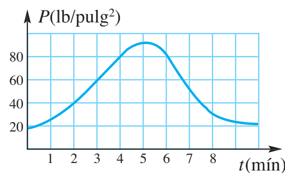


Figura 13

31. Una niña de 5 pies de estatura camina hacia un poste de luz, de 20 pies de altura, a una velocidad de 4 pies por segundo. Su hermano menor, de 3 pies de estatura, la sigue a una distancia constante de 4 pies, directamente atrás de ella (véase la figura 14).

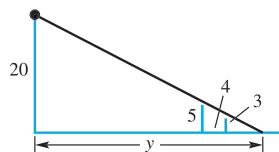


Figura 14

Determine a qué velocidad se mueve el extremo de la sombra, esto es, determine dy/dt. *Nota:* cuando la niña está lejos del poste, ella controla el extremo de la sombra, mientras que su hermano la controla cerca del poste.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** du/dt; $t = 2$ **2.** 400 mi/h **3.** negativa **4.** negativa; positiva

2.9 Diferenciales y aproximaciones

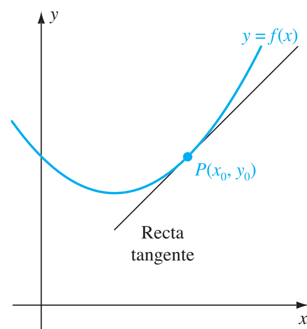


Figura 1

La notación de Leibniz dy/dx ha sido utilizada para la derivada de y respecto a x. La notación d/dx se ha utilizado como un operador para la derivada (de lo que sigue a d/dx) respecto a x. Así, d/dx y D_x son sinónimos. Hasta ahora hemos tratado a dy/dx (o d/dx) como un *solo* símbolo y no hemos tratado de dar significados separados a los símbolos dy y dx. En esta sección daremos significado a dy y a dx.

Sea f una función derivable. Para motivar nuestras definiciones, sea $P(x_0, y_0)$ un punto en la gráfica de $y = f(x)$ como se muestra en la figura 1. Ya que f es derivable,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Así, si Δx es pequeña, el cociente $[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]/\Delta x$ será aproximadamente $f'(x_0)$, de modo que

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx \Delta x\, f'(x_0)$$

El lado izquierdo de esta expresión se denomina Δy; éste es el cambio *real* en y cuando x cambia de x_0 a $x_0 + \Delta x$. El lado derecho se denomina dy, y sirve como una aproximación para Δy. Como lo indica la figura 2, la cantidad dy es igual al cambio en la recta

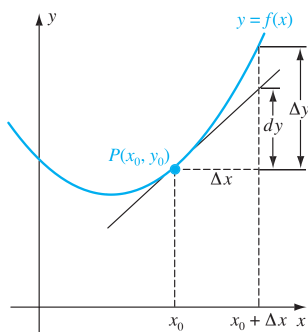


Figura 2

tangente a la curva en P cuando x cambia de x_0 a $x_0 + \Delta x$. Cuando Δx es pequeña, esperamos que dy será una buena aproximación para Δy, y será sólo una constante por Δx, por lo regular más fácil de calcular.

Definición de diferenciales A continuación están las definiciones formales de las diferenciales dx y dy.

Definición Diferenciales

Sea $y = f(x)$ una función derivable de la variable independiente x.

Δx es un incremento arbitrario en la variable independiente x.

dx, denominada la **diferencial de la variable independiente** x, es igual a Δx.

Δy Δy es el cambio real en la variable y cuando x cambia de x a $x + \Delta x$; esto es, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

dy, llamada la **diferencial de la variable dependiente** y, se define como $dy = f'(x)dx$.

EJEMPLO 1 Encuentre dy, si

(a) $y = x^3 - 3x + 1$ (b) $y = \sqrt{x^2 + 3x}$

(c) $y = \operatorname{sen}(x^4 - 3x^2 + 11)$

SOLUCIÓN Si sabemos cómo calcular derivadas, también sabemos cómo calcular diferenciales. Basta con calcular la derivada y multiplicarla por dx.

(a) $dy = (3x^2 - 3)\,dx$

(b) $dy = \frac{1}{2}(x^2 + 3x)^{-1/2}(2x + 3)\,dx = \dfrac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}dx$

(c) $dy = \cos(x^4 - 3x^2 + 11)\cdot(4x^3 - 6x)\,dx$ ■

Le pedimos que note dos cosas. Primera, como $dy = f'(x)dx$, la división de ambos lados entre dx da

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

y podemos, si lo deseamos, interpretar la derivada como un cociente de dos diferenciales.

Segunda, a cada regla de derivación existe una correspondiente regla de diferenciación, obtenida a partir de la primera "multiplicándola" por dx. Ilustramos las principales reglas en la tabla siguiente.

Distinción entre derivadas y diferenciales

Las derivadas y las diferenciales no son lo mismo. Cuando usted escribe $D_x y$ o dy/dx, está utilizando el símbolo de la derivada; cuando escribe dy, está denotando una diferencial. No sea flojo escribiendo dy cuando quiera referirse a una derivada. Si lo hace, lo llevará a una seria confusión.

Regla de derivación	Regla de diferenciación
1. $\dfrac{dk}{dx} = 0$	1. $dk = 0$
2. $\dfrac{d(ku)}{dx} = k\dfrac{du}{dx}$	2. $d(ku) = k\,du$
3. $\dfrac{d(u + v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$	3. $d(u + v) = du + dv$
4. $\dfrac{d(uv)}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$	4. $d(uv) = u\,dv + v\,du$
5. $\dfrac{d(u/v)}{dx} = \dfrac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$	5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$
6. $\dfrac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$	6. $d(u^n) = nu^{n-1}\,du$

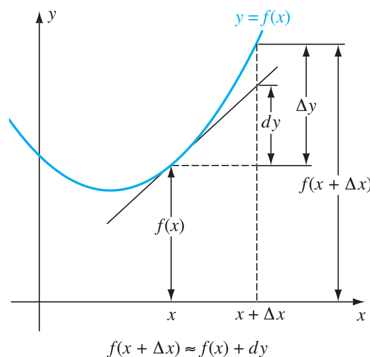


Figura 3

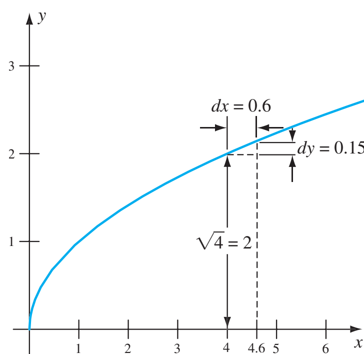


Figura 4

Aproximaciones Las diferenciales desempeñan varios papeles en este texto; pero por ahora su principal uso está en proporcionar aproximaciones. Esto ya lo sugerimos antes.

Suponga $y = f(x)$, como se muestra en la figura 3. Un incremento Δx produce un correspondiente incremento Δy en y, que puede aproximarse con dy. Así, $f(x + \Delta x)$ se aproxima por medio de

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\,\Delta x}$$

Ésta es la base para las soluciones de todos los ejemplos que siguen.

EJEMPLO 2 Suponga que necesita buenas aproximaciones para $\sqrt{4.6}$ y $\sqrt{8.2}$, pero que no sirve su calculadora. ¿Qué podría hacer?

SOLUCIÓN Considere la gráfica de $y = \sqrt{x}$ bosquejada en la figura 4. Cuando x cambia de 4 a 4.6, $\sqrt{x}$ cambia de $\sqrt{4} = 2$ a (aproximadamente) $\sqrt{4} + dy$. Ahora,

$$dy = \frac{1}{2}x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

que, en $x = 4$ y $dx = 0.6$, tiene el valor

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(0.6) = \frac{0.6}{4} = 0.15$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{4.6} \approx \sqrt{4} + dy = 2 + 0.15 = 2.15$$

De manera análoga, en $x = 9$ y $dx = -0.8$,

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{9}}(-0.8) = \frac{-0.8}{6} \approx -0.133$$

De aquí que,

$$\sqrt{8.2} \approx \sqrt{9} + dy \approx 3 - 0.133 = 2.867$$

Observe que, en este caso, tanto dx como dy fueron negativas.

Los valores aproximados 2.15 y 2.867 pueden compararse con los valores verdaderos (a cuatro decimales) de 2.1448 y 2.8636. ■

EJEMPLO 3 Utilice diferenciales para aproximar el aumento en el área de una pompa de jabón cuando su radio aumenta de 3 pulgadas a 3.025 pulgadas.

SOLUCIÓN El área de una pompa de jabón esférica está dada por $A = 4\pi r^2$. Podemos aproximar el cambio exacto, ΔA, por medio de la diferencial dA, donde

$$dA = 8\pi r\,dr$$

En $r = 3$ y $dr = \Delta r = 0.025$,

$$dA = 8\pi(3)(0.025) \approx 1.885 \text{ pulgadas cuadradas}$$ ■

Estimación de errores A continuación se presenta un problema común en la ciencia. Un investigador mide cierta variable x y tiene un valor x_0, con un posible error de tamaño $\pm\Delta x$. Después, el valor x_0 es utilizado para calcular un valor y_0, para y que depende de x. El valor de y_0 está contaminado por el error en x, pero, ¿qué tanto? El procedimiento estándar es estimar este error por medio de diferenciales.

EJEMPLO 4 La arista de un cubo se midió como 11.4 centímetros con un posible error de ± 0.05 centímetros. Evalúe el volumen del cubo y proporcione una estimación para el posible error en este valor.

SOLUCIÓN El volumen V de un cubo de arista x es $V = x^3$. Por lo tanto, $dV = 3x^2 dx$. Si $x = 11.4$ y $dx = 0.05$, entonces $V = (11.4)^3 \approx 1482$ y

$$\Delta V \approx dV = 3(11.4)^2(0.05) \approx 19$$

Por lo tanto, podríamos reportar el volumen del cubo como 1482 ± 19 centímetros cúbicos. ■

La cantidad ΔV en el ejemplo 4 se denomina **error absoluto.** Otra medida del error es el **error relativo**, que se obtiene dividiendo el error absoluto entre el volumen total. Podemos aproximar el error relativo $\Delta V/V$ por dV/V. En el ejemplo 4, el error relativo es

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} \approx \frac{19}{1482} \approx 0.0128$$

Con frecuencia, el error relativo se expresa en términos de porcentaje. Así, decimos que para el cubo del ejemplo 4 el error relativo es aproximadamente 1.28%.

EJEMPLO 5 La Ley de Poiseuille para el flujo de la sangre dice que el volumen que fluye por una arteria es proporcional a la cuarta potencia del radio, esto es, $V = kR^4$. ¿En cuánto debe aumentarse el radio para aumentar el flujo de la sangre en 50%?

SOLUCIÓN La diferencial satisface $dV = 4kR^3\,dR$. El cambio relativo en el volumen es

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4kR^3\,dR}{kR^4} = 4\frac{dR}{R}$$

así que para 50% de cambio en el volumen,

$$0.5 \approx \frac{dV}{V} = 4\frac{dR}{R}$$

El cambio relativo en R debe ser

$$\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{dR}{R} \approx \frac{0.5}{4} = 0.125$$

Por lo tanto, sólo 12.5% de aumento en el radio de una arteria aumentará el flujo de la sangre en alrededor de 50%. ■

Aproximación lineal Si f es diferenciable en a, entonces de la forma punto-pendiente de la recta, la recta tangente a f en $(a, f(a))$ está dada por $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. La función

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

se denomina **aproximación lineal** a la función f en a, y con frecuencia es una muy buena aproximación para f cuando x es cercana a a.

EJEMPLO 6 Encuentre y dibuje la aproximación lineal a $f(x) = 1 + \text{sen}(2x)$ en $x = \pi/2$

SOLUCIÓN: La derivada de f es $f'(x) = 2\cos(2x)$, de modo que la aproximación lineal es

$$\begin{aligned} L(x) &= f(\pi/2) + f'(\pi/2)(x - \pi/2) \\ &= (1 + \text{sen}\,\pi) + (2\cos\pi)(x - \pi/2) \\ &= 1 - 2(x - \pi/2) = (1 + \pi) - 2x \end{aligned}$$

La figura 5a muestra la gráfica de la función f y la gráfica de la aproximación lineal L en el intervalo $[0, \pi]$. Podemos ver que la aproximación es buena cerca de $\pi/2$, pero la aproximación no es buena cuando se aleja de $\pi/2$. Las figuras 5b y 5c también muestran las gráficas de las funciones L y f en intervalos cada vez más pequeños. Para valores de x cercanos a $\pi/2$, vemos que la aproximación lineal es muy parecida a la función f. ■

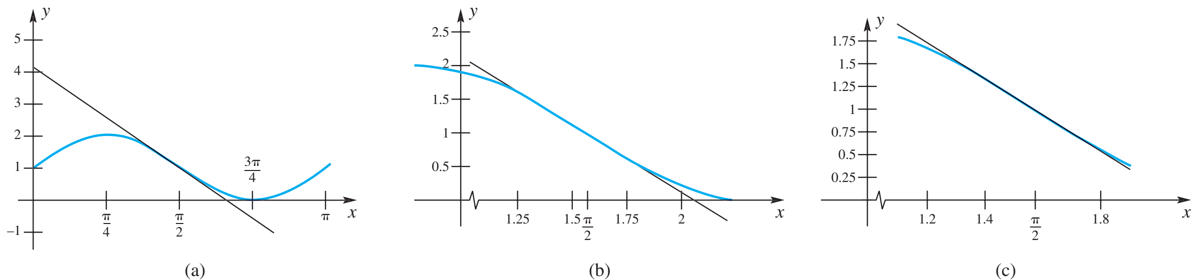


Figura 5

Revisión de conceptos

1. Sea $y = f(x)$. La diferencial de y en términos de dx está definida por medio de dy_____.

2. Considere la curva $y = f(x)$ y suponga que a x se le da un incremento Δx. El cambio correspondiente en y sobre la curva está denotado por _____, mientras que el correspondiente cambio en y sobre la recta tangente está denotado por _____.

3. Podemos esperar que dy sea una buena aproximación a Δy, siempre que _____.

4. Sobre la curva $y = \sqrt{x}$, debemos esperar que dy sea cercana a Δy, pero siempre _____ que Δy. Sobre la curva $y = x^2, x \geq 0$, debemos esperar que dy sea _____ que Δy.

Conjunto de problemas 2.9

En los problemas del 1 al 8 encuentre dy.

1. $y = x^2 + x - 3$

2. $y = 7x^3 + 3x^2 + 1$

3. $y = (2x + 3)^{-4}$

4. $y = (3x^2 + x + 1)^{-2}$

5. $y = (\text{sen } x + \cos x)^3$

6. $y = (\tan x + 1)^3$

7. $y = (7x^2 + 3x - 1)^{-3/2}$

8. $y = \left(x^{10} + \sqrt{\text{sen } 2x}\right)^2$

9. Si $s = \sqrt{(t^2 - \cot t + 2)^3}$, encuentre ds.

10. Sea $y = f(x) = x^3$. Encuentre el valor de dy en cada caso.

(a) $x = 0.5, dx = 1$ (b) $x = -1, dx = 0.75$

11. Para la función definida en el problema 10, con cuidado haga un dibujo de la gráfica de f para $-1.5 \leq x \leq 1.5$ y las tangentes a la curva en $x = 0.5$ y $x = -1$; en este dibujo marque dy y dx para cada uno de los conjuntos de datos dados en las partes (a) y (b).

12. Sea $y = 1/x$. Encuentre el valor de dy en cada caso.

(a) $x = 1, dx = 0.5$ (b) $x = -2, dx = 0.75$

13. Para la función definida en el problema 12, con cuidado haga un dibujo (como en el problema 11), para la parte (a) $0 < x \leq 3$ y para la parte (b) $-3 \leq x < 0$.

C **14.** Para los datos del problema 10 encuentre los cambios reales en y, es decir, Δy.

C **15.** Para los datos del problema 12, encuentre los cambios reales en y, es decir, Δy.

16. Si $y = x^2 - 3$, encuentre los valores de Δy y dy en cada caso.

(a) $x = 2$ y $dx = \Delta x = 0.5$

C (b) $x = 3$ y $dx = \Delta x = -0.12$

17. Si $y = x^4 + 2x$, encuentre los valores de Δy y dy en cada caso.

(a) $x = 2$ y $dx = \Delta x = 1$

C (b) $x = 2$ y $dx = \Delta x = 0.005$.

En los problemas del 18 al 20 utilice diferenciales para aproximar los números dados (véase el ejemplo 2). Compárelos con los valores obtenidos con una calculadora

18. $\sqrt{402}$

19. $\sqrt{35.9}$

20. $\sqrt[3]{26.91}$

C **21.** Aproxime el volumen del material en un cascarón esférico con radio interno de 5 centímetros y radio externo de 5.125 centímetros (véase el ejemplo 3).

C **22.** Las seis caras de una caja cúbica metálica tienen un grosor de 0.25 pulgadas y el volumen del interior de la caja es de 40 pulgadas cúbicas. Utilice diferenciales para aproximar el volumen de metal empleado para fabricar la caja.

23. El diámetro exterior de un cascarón esférico delgado es de 12 pies. Si el cascarón tiene un grosor de 0.3 pulgadas, utilice diferenciales para aproximar el volumen de la región interior.

24. El interior de un tanque cilíndrico abierto es de 12 pies de diámetro y de 8 pies de profundidad. El fondo es de cobre y los lados son de acero. Utilice diferenciales para encontrar, de manera aproximada, cuántos galones de pintura a prueba de agua es necesaria para aplicar un capa de 0.05 pulgadas a la parte de acero del interior del tanque (1 galón $\approx$ 231 pulgadas cúbicas).

25. Suponga que el ecuador es un círculo cuyo radio es de aproximadamente 4000 millas, ¿en cuánto excedería al ecuador un círculo concéntrico y coplanar a él, si cada punto en él estuviese 2 pies alejado del ecuador? Utilice diferenciales.

26. El periodo de un péndulo simple, de longitud L pies, está dado por $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ segundos. Supongamos que g, la aceleración debida a la gravedad en (o muy cerca de) la superficie de la Tierra, es de 32 pies por segundo por segundo. Si el péndulo es el de un reloj que se mantiene sincronizado cuando $L = 4$ pies, ¿cuánto tiempo se adelantará el reloj en 24 horas, si la longitud del péndulo se disminuye a 3.97 pies?

27. El diámetro de una esfera se mide y es de 20 ± 0.1 centímetros. Calcule el volumen y estime el error absoluto y el error relativo (véase el ejemplo 4).

28. Un rodillo cilíndrico tiene exactamente 12 pulgadas de largo y su diámetro se estima en 6 ± 0.005 pulgadas. Calcule su volumen con una estimación para el error absoluto y para el error relativo.

C **29.** El ángulo θ entre los dos lados iguales de un triángulo isósceles mide 0.53 ± 0.005 radianes. Los dos lados iguales miden exactamente 151 centímetros de largo. Calcule la longitud del tercer lado con una estimación para los errores absoluto y relativo.

C **30.** Calcule el área del triángulo del problema 29 con una estimación para los errores absoluto y relativo. *Sugerencia:* $A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$.

31. Puede demostrarse que si $|d^2y/dx^2| \le M$ en un intervalo cerrado con c y $c + \Delta x$ como puntos extremos, entonces

$$|\Delta y - dy| \le \tfrac{1}{2}M(\Delta x)^2$$

Utilizando diferenciales, encuentre el cambio en $y = 3x^2 - 2x + 11$, cuando x aumenta de 2 a 2.001 y luego proporcione una cota para el error que ha cometido por usar diferenciales.

32. Suponga que f es una función que satisface $f(1) = 10$ y $f'(1.02) = 12$. Utilice esta información para aproximar $f(1.02)$.

33. Suponga que f es una función que satisface $f(3) = 8$ y $f'(3.05) = \frac{1}{4}$. Utilice esta información para aproximar $f(3.05)$.

34. Una copa cónica, de 10 centímetros de altura y 8 centímetros de ancho en la parte superior, se llena con agua hasta una profundidad de 9 centímetros. Un cubo de hielo de 3 centímetros de lado está a punto de dejarse caer en la copa. Utilice diferenciales para decidir si se derramará la copa.

35. Un tanque tiene forma cilíndrica con extremos semiesféricos. Si la parte cilíndrica tiene una longitud de 100 centímetros de largo y un diámetro exterior de 20 centímetros, ¿aproximadamente cuánta pintura se requerirá para cubrir el exterior del tanque con una capa de 1 milímetro de espesor?

C **36.** La teoría especial de la relatividad de Einstein dice que la masa m está relacionada con la velocidad v por medio de la fórmula

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Aquí, m_0 es la masa en reposo y c es la velocidad de la luz. Utilice diferenciales para determinar el aumento porcentual en la masa de un objeto cuando su velocidad aumenta de $0.9c$ a $0.92c$.

En los problemas del 37 al 44 determine la aproximación lineal a las funciones dadas en los puntos especificados. Dibuje la función y la aproximación lineal en el intervalo que se indica.

37. $f(x) = x^2$ en $a = 2$, $[0, 3]$

38. $g(x) = x^2 \cos x$ en $a = \pi/2$, $[0, \pi]$

39. $h(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = 0$, $[-\pi, \pi]$

40. $F(x) = 3x + 4$ en $a = 3$, $[0, 6]$

41. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ en $a = 0$, $[-1, 1]$

42. $g(x) = x/(1 - x^2)$ en $a = \frac{1}{2}$, $[0, 1)$

43. $h(x) = x \sec x$ en $a = 0$, $(-\pi/2, \pi/2)$

44. $G(x) = x + \operatorname{sen} 2x$, en $a = \pi/2$, $[0, \pi]$

45. Determine la aproximación lineal para $f(x) = mx + b$ en una a arbitraria. ¿Cuál es la relación entre $f(x)$ y $L(x)$?

46. Demuestre que para toda $a > 0$ la aproximación lineal $L(x)$ de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en a satisface $f(x) \le L(x)$ para toda $x > 0$.

47. Demuestre que para cada a la aproximación lineal $L(x)$ para la función $f(x) = x^2$ en a satisface $L(x) \le f(x)$ para toda x.

EXPL **48.** Determine una aproximación lineal a $f(x) = (1 + x)^\alpha$ en $x = 0$, en donde α es cualquier número. Para distintos valores de α, grafique $f(x)$ y su aproximación lineal $L(x)$. ¿Para qué valores de α la aproximación siempre sobreestima a $f(x)$? ¿Para qué valores de α la aproximación lineal siempre subestima a $f(x)$?

EXPL **49.** Suponga que f es diferenciable. Si utilizamos la aproximación $f(x + h) \approx f(x) + f'(x)h$, el error es $\varepsilon(h) = f(x + h) - f(x) - f'(x)h$. Demuestre que

(a) $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ y (b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\varepsilon(h)}{h} = 0$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $f'(x)dx$ **2.** $\Delta y, dy$ **3.** Δx es pequeña **4.** más grande; más pequeña

2.10 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

1. La recta tangente a la curva en un punto no puede cruzar a la curva en ese punto.

2. La recta tangente puede tocar a la curva en un solo punto.

3. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^4$ es diferente en cada punto de la curva.

4. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = \cos x$ es diferente en cada punto de la curva.

5. Es posible que la velocidad de un objeto esté aumentando, mientras que su rapidez esté disminuyendo.

6. Es posible que la rapidez de un objeto esté aumentando, mientras que su velocidad esté disminuyendo.

7. Si la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ es horizontal en $x = c$, entonces $f'(c) = 0$

8. Si $f'(x) = g'(x)$ para toda x, entonces $f(x) = g(x)$ para toda x.

9. Si $g(x) = x$, entonces $f'(g(x)) = D_x f(g(x))$.

10. Si $y = \pi^5$, entonces $D_x y = 5\pi^4$.

11. Si $f'(c)$ existe, entonces f es continua en c.

12. La gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$ tiene una recta tangente en $x = 0$, aunque $D_x y$ no existe en ese punto.

13. La derivada de un producto siempre es el producto de las derivadas.

14. Si la aceleración de un objeto es negativa, entonces su velocidad está disminuyendo.

15. Si x^3 es un factor de la función derivable $f(x)$, entonces x^2 es un factor de su derivada.

16. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3$ en $(1, 1)$ es $y - 1 = 3x^2(x - 1)$.

17. Si $y = f(x)g(x)$, entonces $D_x^2 y = f(x)g''(x) + g(x)f''(x)$.

18. Si $y = (x^3 + x)^8$, entonces $D_x^{25} y = 0$.

19. La derivada de un polinomio es un polinomio.

20. La derivada de una función racional es una función racional.

21. Si $f'(c) = g'(c) = 0$ y $h(x) = f(x)g(x)$, entonces $h'(c) = 0$.

22. La expresión

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\operatorname{sen} x - 1}{x - \pi/2}$$

es la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$, en $x = \pi/2$.

23. El operador D^2 es lineal.

24. Si $h(x) = f(g(x))$, donde f y g son derivables, entonces $g'(c) = 0$ implica que $h'(c) = 0$.

25. Si $f'(2) = g'(2) = g(2) = 2$, entonces $(f \circ g)'(2) = 4$.

26. Si f es derivable y creciente, y además si $dx = \Delta x > 0$, entonces $\Delta y > dy$

27. Si el radio de una esfera está aumentando a razón de 3 pies por segundo, entonces su volumen está creciendo 27 pies cúbicos por segundo.

28. Si el radio de un círculo aumenta 4 pies por segundo, entonces su circunferencia aumenta 8π pies por segundo.

29. $D_x^{n+4}(\operatorname{sen} x) = D_x^n(\operatorname{sen} x)$ para todo entero positivo n.

30. $D_x^{n+3}(\cos x) = -D_x^n(\operatorname{sen} x)$ para todo entero positivo n.

31. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{3x} = \frac{1}{3}$.

32. Si $s = 5t^3 + 6t - 300$ proporciona la posición de un objeto, en el instante t, en un eje coordenado horizontal, entonces ese objeto siempre se está moviendo hacia la derecha (la dirección en que aumenta s).

33. Si se está bombeando aire a un globo esférico de hule a una velocidad constante de 3 pulgadas cúbicas por segundo, entonces el radio aumentará, pero a una razón cada vez menor.

34. Si se bombea agua a un tanque esférico de radio fijo, a una tasa constante de 3 galones por segundo, la altura del agua en el tanque aumentará más rápidamente cuando el tanque esté próximo a ser llenado.

35. Si se cometió un error Δr al medir el radio de una esfera, el correspondiente error en el volumen calculado será aproximadamente $S \cdot \Delta r$, donde S es el área de la superficie de la esfera.

36. Si $y = x^5$, entonces $dy \geq 0$.

37. La aproximación lineal para la función definida por $f(x) = \cos x$ en $x = 0$ tiene pendiente positiva.

Problemas de examen

1. Utilice $f'(x) = \lim_{h \to 0} [f(x + h) - f(x)]/h$ para encontrar la derivada de cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = 3x^3$ (b) $f(x) = 2x^5 + 3x$

(c) $f(x) = \frac{1}{3x}$ (d) $f(x) = \frac{1}{3x^2 + 2}$

(e) $f(x) = \sqrt{3x}$ (f) $f(x) = \operatorname{sen} 3x$

(g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ (h) $f(x) = \cos \pi x$

2. Utilice $g'(x) = \lim_{t \to x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x}$ para encontrar $g'(x)$ en cada caso.

(a) $g(x) = 2x^2$ (b) $g(x) = x^3 + x$

(c) $g(x) = \frac{1}{x}$ (d) $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

(e) $g(x) = \sqrt{x}$ (f) $g(x) = \operatorname{sen} \pi x$

(g) $g(x) = \sqrt{x^3 + C}$ (h) $g(x) = \cos 2x$

3. El límite dado es una derivada, pero ¿de qué función y en cuál punto?

(a) $\lim_{h \to 0} \frac{3(1 + h) - 3}{h}$ (b) $\lim_{h \to 0} \frac{4(2 + h)^3 - 4(2)^3}{h}$

(c) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(1 + \Delta x)^3} - 1}{\Delta x}$ (d) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi + \Delta x)}{\Delta x}$

(e) $\lim_{t \to x} \frac{4/t - 4/x}{t - x}$ (f) $\lim_{t \to x} \frac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 3t}{t - x}$

(g) $\lim_{h \to 0} \frac{\tan(\pi/4 + h) - 1}{h}$ (h) $\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{5 + h}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \frac{1}{h}$

4. Utilice la gráfica de $s = f(t)$ de la figura 1 para aproximar cada una de las siguientes.

(a) $f'(2)$ (b) $f'(6)$

(c) v_{prom} en $[3, 7]$ (d) $\frac{d}{dt} f(t^2)$ en $t = 2$

(e) $\frac{d}{dt} [f^2(t)]$ en $t = 2$ (f) $\frac{d}{dt} (f(f(t)))$ en $t = 2$

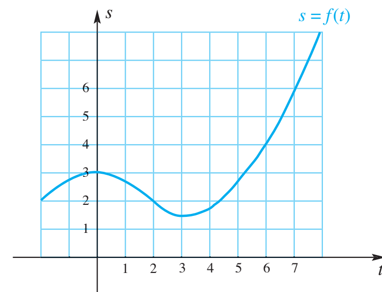


Figura 1

En los problemas del 5 al 29 encuentre la derivada que se indica por medio de las reglas que hemos desarrollado.

5. $D_x(3x^5)$

6. $D_x(x^3 - 3x^2 + x^{-2})$

7. $D_z(z^3 + 4z^2 + 2z)$

8. $D_x\left(\frac{3x - 5}{x^2 + 1}\right)$

9. $D_t\left(\frac{4t - 5}{6t^2 + 2t}\right)$

10. $D_x^2(3x + 2)^{2/3}$

11. $\frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2 - 2}{x^3 + x}\right)$

12. $D_t\left(t\sqrt{2t + 6}\right)$

13. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}\right)$

14. $\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^3 - x}}$

15. $D_\theta^2(\operatorname{sen} \theta + \cos^3 \theta)$

16. $\frac{d}{dt}[\operatorname{sen}(t^2) - \operatorname{sen}^2(t)]$

17. $D_\theta(\operatorname{sen}(\theta^2))$

18. $\frac{d}{dx}(\cos^3 5x)$

19. $\frac{d}{d\theta}[\text{sen}^2(\text{sen}(\pi\theta))]$

20. $\frac{d}{dt}[\text{sen}^2(\cos 4t)]$

21. $D_\theta \tan 3\theta$

22. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen } 3x}{\cos 5x^2}\right)$

23. $f'(2)$ si $f(x) = (x^2 - 1)^2(3x^3 - 4x)$

24. $g''(0)$ si $g(x) = \text{sen } 3x + \text{sen}^2 3x$

25. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\cot x}{\sec x^2}\right)$

26. $D_t\left(\frac{4t \text{ sen } t}{\cos t - \text{sen } t}\right)$

27. $f'(2)$ si $f(x) = (x - 1)^3(\text{sen } \pi x - x)^2$

28. $h''(0)$ si $h(t) = (\text{sen } 2t + \cos 3t)^5$

29. $g'''(1)$ si $g(r) = \cos^3 5r$

En los problemas del 30 al 33 suponga que todas las funciones dadas son derivables y encuentre la derivada que se indica.

30. $f'(t)$ si $f(t) = h(g(t)) + g^2(t)$

31. $G''(x)$ si $G(x) = F(r(x) + s(x)) + s(x)$

32. Si $F(x) = Q(R(x))$, $R(x) = \cos x$, y $Q(R) = R^3$, encuentre $F'(x)$.

33. Si $F(z) = r(s(z))$, $r(x) = \text{sen } 3x$, y $s(t) = 3t^3$, encuentre $F'(z)$.

34. Encuentre las coordenadas del punto en la curva $y = (x - 2)^2$ donde exista una recta tangente que sea perpendicular a la recta $2x - y + 2 = 0$

35. Un globo esférico se expande debido al calor del Sol. Encuentre la tasa de cambio del volumen del globo con respecto a su radio cuando el radio es de 5 metros.

36 Si el volumen del globo del problema 35 está aumentando a una razón constante de 10 metros cúbicos por hora, ¿a qué velocidad aumenta su radio cuando éste es de 5 metros?

37. Un abrevadero de 12 pies de largo tiene una sección transversal en forma de triángulo isósceles (con base en la parte superior) de 4 pies de profundidad y 6 pies de ancho. Si el abrevadero se está llenando con agua a una razón de 9 pies cúbicos por minuto, ¿a qué velocidad está elevándose el nivel del agua cuando el agua tiene 3 pies de profundidad?

38. Desde el suelo, un objeto se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 128 pies por segundo. Su altura s al final de t segundos es aproximadamente $s = 128t - 16t^2$ pies.

(a) ¿Cuándo alcanza su altura máxima y cuál es esa altura?

(b) ¿Cuándo llega al suelo y con qué velocidad?

39. Un objeto se mueve sobre un eje coordenado horizontal. Su distancia dirigida, s, desde el origen al final de t segundos es $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ pies.

(a) ¿Cuando se está moviendo el objeto hacia la izquierda?

(b) ¿Cuál es su aceleración cuando su velocidad es cero?

(c) ¿Cuándo es positiva su aceleración?

40. En cada caso encuentre $D_x^{20}y$.

(a) $y = x^{19} + x^{12} + x^5 + 10$ (b) $y = x^{20} + x^{19} + x^{18}$

(c) $y = 7x^{21} + 3x^{20}$ (d) $y = \text{sen } x + \cos x$

(e) $y = \text{sen } 2x$ (f) $y = \frac{1}{x}$

41. En cada caso, encuentre dy/dx.

(a) $(x - 1)^2 + y^2 = 5$ (b) $xy^2 + yx^2 = 1$

(c) $x^3 + y^3 = x^3y^3$ (d) $x \text{ sen}(xy) = x^2 + 1$

(e) $x \tan(xy) = 2$

42. Demuestre que las tangentes a las curvas $y^2 = 4x^3$ y $2x^2 + 3y^2 = 14$ en $(1, 2)$ son perpendiculares entre sí. *Sugerencia:* use derivación implícita.

43. Sea $y = \text{sen}(\pi x) + x^2$. Si x cambia de 2 a 2.01, ¿cuánto cambia y aproximadamente?

44. Sea $xy^2 + 2y(x + 2)^2 + 2 = 0$.

(a) Si x cambia de -2.00 a -2.01 y $y > 0$, ¿cuánto cambia y aproximadamente?

(b) Si x cambia de -2.00 a -2.01 y $y < 0$, ¿cuánto cambia y aproximadamente?

45. Suponga que $f(2) = 3, f'(2) = 4, f''(2) = -1, g(2) = 2$ y $g'(2) = 5$. Encuentre cada valor..

(a) $\frac{d}{dx}[f^2(x) + g^3(x)]$ en $x = 2$

(b) $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]$ en $x = 2$

(c) $\frac{d}{dx}[f(g(x))]$ en $x = 2$ (d) $D_x^2[f^2(x)]$ en $x = 2$

≈ **46.** Una escalera de 13 pies está apoyada contra un muro vertical. Si la parte inferior de la escalera se jala alejándola del muro a una velocidad constante de 2 pies por segundo, ¿a qué velocidad desciende, en el muro, la parte superior de la escalera cuando se encuentra 5 pies por encima del nivel del suelo?

≈ **47.** Un aeroplano se eleva, formando un ángulo de 15° con la horizontal. ¿A qué velocidad está ganando altura si su velocidad es de 400 millas por hora?

48. Dado que $D_x|x| = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$, encuentre una fórmula para

(a) $D_x(|x|^2)$ (b) $D_x^2|x|$

(c) $D_x^3|x|$ (d) $D_x^2(|x|^2)$

49. Dado que $D_t|t| = \frac{|t|}{t}$, $t \neq 0$, encuentre una fórmula para

(a) $D_\theta|\text{sen } \theta|$ (b) $D_\theta|\cos \theta|$

50. Encuentre la aproximación lineal para las siguientes funciones en los puntos dados..

(a) $\sqrt{x + 1}$ en $a = 3$ (b) $x \cos x$ at $a = 1$

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

En los problemas del 1 al 6 resuelva las desigualdades dadas. (Véase la sección 0.2.)

1. $(x - 2)(x - 3) < 0$

2. $x^2 - x - 6 > 0$

3. $x(x - 1)(x - 2) \leq 0$

4. $x^3 + 3x^2 + 2x \geq 0$

5. $\dfrac{x(x - 2)}{x^2 - 4} \geq 0$

6. $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2} > 0$

En los problemas del 7 al 14 determine la derivada $f'(x)$ de la función dada.

7. $f(x) = (2x + 1)^4$

8. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$

9. $f(x) = (x^2 - 1) \cos 2x$

10. $f(x) = \dfrac{\sec x}{x}$

11. $f(x) = \tan^2 3x$

12. $f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}$

13. $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$

14. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} 2x}$

15. Determine todos los puntos en la gráfica de $y = \tan^2 x$, en donde la recta tangente es horizontal.

16. Determine todos los puntos en la gráfica de $y = x + \operatorname{sen} x$, en donde la recta tangente es horizontal.

17. Determine todos los puntos en la gráfica de $y = x + \operatorname{sen} x$, donde la recta tangente es paralela a la recta $y = 2 + x$.

18. Una caja rectangular se fabrica a partir de una pieza de cartón de 24 pulgadas de largo y 9 pulgadas de ancho; para ello, se cortan cuadrados iguales a partir de las cuatro esquinas y los lados se doblan hacia arriba, como en la figura 1. Si x es la longitud del lado de uno de los cuadrados que se cortan, ¿cuál es el volumen de la caja resultante?

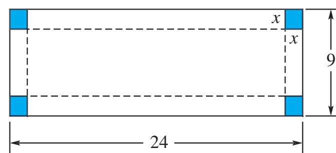


Figura 1

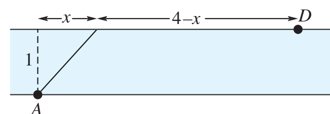


Figura 2

19. Andy quiere cruzar un río que tiene un ancho de 1 kilómetro a fin de alcanzar un punto 4 kilómetros río abajo. (Véase la figura 2.) Él puede nadar a 4 kilómetros por hora y correr a 10 kilómetros por hora. Suponiendo que él inicia nadando y que lo hace hacia un punto a x kilómetros río abajo del punto A de donde parte, ¿cuánto tardará en llegar a su destino D?

20. Sea $f(x) = x - \cos x$.

(a) ¿La ecuación $x - \cos x = 0$ tiene una solución entre $x = 0$ y $x = \pi$? ¿Cómo lo sabe?

(b) Determine la ecuación de la recta tangente en $x = \pi/2$.

(c) La recta tangente de la parte (b), ¿en dónde interseca al eje x?

21. Determine una función cuya derivada sea

(a) $2x$ (b) $\operatorname{sen} x$ (c) $x^2 + x + 1$

22. Sume 1 a cada respuesta del problema 21. ¿Estas funciones también son soluciones para el problema 21? Explique.

CAPÍTULO 3

Aplicaciones de la derivada

3.1 Máximos y mínimos

Con frecuencia en la vida, nos enfrentamos con el problema de encontrar la *mejor* manera de hacer algo. Por ejemplo, un granjero necesita elegir la mezcla de cultivos que sea la más apropiada para producir la mayor ganancia. Un médico desea seleccionar la menor dosis de una droga que curará cierta enfermedad. A un fabricante le gustaría minimizar el costo de distribución de sus productos. Algunas veces, un problema de este tipo puede formularse de modo que implique maximizar o minimizar una función en un conjunto específico. Si es así, los métodos de cálculo proporcionan una herramienta poderosa para resolver el problema.

Entonces suponga que se nos da una función $f(x)$ y un dominio S como en la figura 1. Ahora planteamos tres preguntas:

1. ¿$f(x)$ tiene un valor máximo o un valor mínimo en S?
2. Si tiene un valor máximo o un valor mínimo, ¿dónde se alcanzan?
3. Si existen, ¿cuáles son los valores máximo y mínimo?

Dar respuesta a estas tres interrogantes es el principal objetivo de esta sección. Empezamos por introducir un vocabulario preciso.

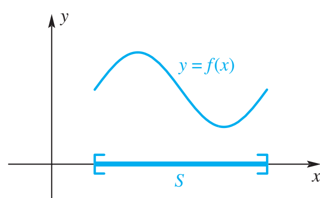


Figura 1

Definición

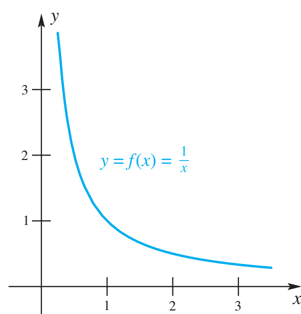
Suponga que S, el dominio de f, contiene el punto c. Decimos que:

(i) $f(c)$ es el **valor máximo** de f en S, si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en S;
(ii) $f(c)$ es el **valor mínimo** de f en S, si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en S;
(iii) $f(c)$ es el **valor extremo** de f en S, si es un valor máximo o un valor mínimo;
(iv) la función que queremos maximizar o minimizar es la **función objetivo.**

La cuestión de la existencia *¿f tiene un valor máximo (o mínimo) en S?* La respuesta depende, sobre todo, del conjunto S. Considere $f(x) = 1/x$ en $S = (0, \infty)$; no tiene valor máximo ni mínimo (véase la figura 2). Por otra parte, la misma función en $S = [1, 3]$ tiene el valor máximo de $f(1) = 1$ y el valor mínimo de $f(3) = \frac{1}{3}$. En $S = (1, 3]$, f no tiene valor máximo y el valor mínimo es $f(3) = \frac{1}{3}$.

La respuesta también depende del tipo de función. Considere la función discontinua g (véase la figura 3) definida por

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



En $(0, \infty)$, no hay máximo ni mínimo
En $[1, 3]$, máximo = 1, mínimo = $\frac{1}{3}$
En $(1, 3]$, no hay máximo, mínimo = $\frac{1}{3}$

Figura 2

En $S = [1, 3]$, g no tiene valor máximo (se acerca arbitrariamente a 2, pero nunca lo alcanza). Sin embargo, g tiene el valor mínimo $g(2) = 0$.

Existe un teorema preciso que responde la pregunta de existencia para muchos problemas que se presentan en la práctica. Aunque intuitivamente es obvio, una demostración rigurosa es muy difícil, la dejamos para textos más avanzados de cálculo.

Teorema A Teorema de existencia de máximo y mínimo

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo.

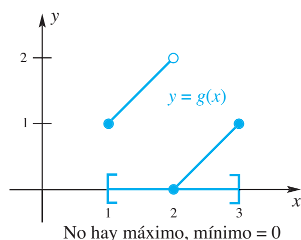


Figura 3

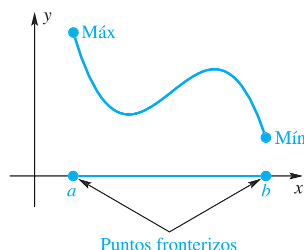


Figura 4

Observe las palabras clave en el teorema A; se requiere que f sea *continua* y que el conjunto S sea un *intervalo cerrado*.

¿En dónde se presentan los valores extremos? Por lo común, la función objetivo tendrá un intervalo I como su dominio. Pero este intervalo puede ser de cualquiera de los nueve tipos estudiados en la sección 0.2. Algunos de ellos contienen sus puntos finales (puntos fronterizos); algunos no. Por ejemplo, $I = [a, b]$ contiene ambos puntos fronterizos; $[a, b)$ sólo contiene su punto fronterizos izquierdo; (a, b) no contiene ninguno de sus puntos fronterizos (véase la figura 4).

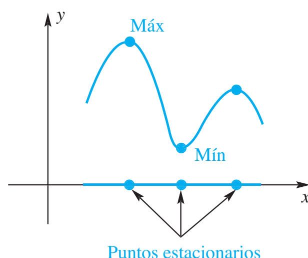


Figura 5

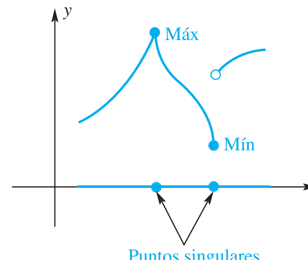


Figura 6

Si c es un punto en el que $f'(c) = 0$, lo llamamos **punto estacionario**. El nombre proviene del hecho de que un punto estacionario de la gráfica se coloca en una trayectoria horizontal, puesto que la recta tangente es horizontal. A menudo, los valores extremos aparecen en los puntos estacionarios (véase la figura 5).

Por último, si c es un punto interior de I, en donde f' no existe, decimos que c es un **punto singular**. Es un punto en donde la gráfica de f tiene una esquina, una tangente vertical, quizás un salto, o cerca del cual la gráfica oscila de manera abrupta. Los valores extremos pueden aparecer en puntos singulares (véase la figura 6), aunque en problemas prácticos esto es muy raro.

Estas tres clases de puntos (fronterizos, estacionarios y singulares) son los puntos clave en la teoría de máximos y mínimos. Cualquier punto de uno de estos tres tipos, en el dominio de una función f, se denomina **punto crítico** de f.

EJEMPLO 1 Encuentre los puntos críticos de $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ en $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$.

SOLUCIÓN Los puntos fronterizos son $-\frac{1}{2}$ y 2. Para determinar los puntos estacionarios, resolvemos $f'(x) = -6x^2 + 6x = 0$, para x, obteniendo 0 y 1. No existen puntos singulares. Por lo tanto, los puntos críticos son $-\frac{1}{2}$, 0, 1, y 2. ■

Teorema B Teorema de los puntos críticos

Sea f definida en un intervalo I que contiene al punto c. Si $f(c)$ es un valor extremo, entonces c debe ser un punto crítico; es decir, c es alguno de los siguientes:

(i) un punto fronterizo de I;

(ii) un punto estacionario de f; es decir, un punto en donde $f'(c) = 0$; o

(iii) un punto singular de f; esto es, un punto en donde $f'(c)$ no existe.

Demostración Primero considere el caso en donde $f(c)$ es el valor máximo de f en I y suponga que c no es un punto fronterizo ni un punto singular. Debemos demostrar que c es un punto estacionario.

Ahora, como $f(c)$ es el valor máximo, $f(x) \le f(c)$ para toda x en I; esto es,

$$f(x) - f(c) \le 0$$

Por consiguiente, si $x < c$, de modo que $x - c < 0$, entonces

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0 \tag{1}$$

mientras que si $x > c$, entonces

$$(2) \qquad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Pero $f'(c)$ existe porque c no es un punto singular. En consecuencia, cuando hacemos $x \to c^-$ en (1) y $x \to c^+$ en (2), obtenemos, respectivamente, $f'(c) \geq 0$ y $f'(c) \leq 0$. Concluimos que $f'(c) = 0$, como se quería.

El caso en donde $f(c)$ es el valor mínimo se maneja de forma análoga. ■

En la demostración que se acaba de dar, utilizamos el hecho de que la desigualdad $\leq$ se preserva bajo la operación de tomar límites.

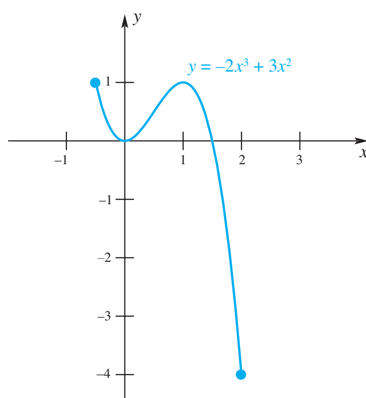


Figura 7

¿Cuáles son los valores extremos? En vista de los teoremas A y B, ahora podemos establecer un procedimiento muy sencillo para determinar los valores máximo y mínimo de una función continua f en un *intervalo cerrado I*.

Paso 1: Encuentre los puntos críticos de f en I.

Paso 2: Evalúe f en cada uno de estos puntos críticos. El mayor de estos valores es el valor máximo; el más pequeño es el valor mínimo.

EJEMPLO 2 Determine los valores máximo y mínimo de $f(x) = x^3$ en $[-2, 2]$.

SOLUCIÓN La derivada de $f'(x) = 3x^2$, que está definida en $(-2, 2)$ y es cero sólo en $x = 0$. Por lo tanto, los puntos críticos son $x = 0$ y los puntos fronterizos $x = -2$ y $x = 2$. Al evaluar f en los puntos críticos se obtiene $f(-2) = -8$, $f(0) = 0$ y $f(2) = 8$. Por lo tanto, el valor máximo de f es 8 (que se alcanza en $x = 2$) y el mínimo es -8 (que se alcanza en $x = -2$). ■

Terminología
Observe la manera en que los términos se utilizan en el ejemplo 3. El máximo es 1, que es igual a $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ y $f(1)$. Decimos que el máximo se alcanza en $-\frac{1}{2}$ y en 1. De manera análoga, el mínimo es –4, que se alcanza en 2.

Observe que en el ejemplo 2, $f'(0) = 0$, pero f no alcanza un mínimo o un máximo en $x = 0$. Esto no contradice al teorema B. Éste no dice que si c es un punto crítico, entonces $f(c)$ es un mínimo o un máximo; dice que si $f(c)$ es un mínimo o un máximo, entonces c es un punto crítico.

EJEMPLO 3 Encuentre los valores máximo y mínimo de

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2$$

en $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 1 identificamos $-\frac{1}{2}$, 0, 1, y 2 como los puntos críticos. Ahora $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, y $f(2) = -4$. Así, el valor máximo es 1 (que se alcanza en $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$), y el valor mínimo es -4 (que se alcanza en $x = 2$). La gráfica de f se muestra en la figura 7. ■

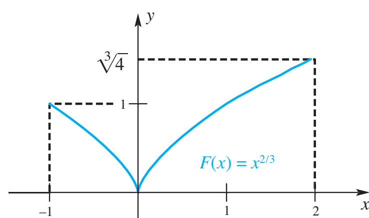


Figura 8

EJEMPLO 4 La función $F(x) = x^{2/3}$ es continua en todas partes. Encuentre sus valores máximo y mínimo en $[-1, 2]$.

SOLUCIÓN $F'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$, nunca es cero. Sin embargo, $F'(0)$ no existe, de modo que 0 es un punto crítico, así como los puntos fronterizos -1 y 2. Ahora, $F(-1) = 1$, $F(0) = 0$ y $F(2) = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$. Por consiguiente, el valor máximo es $\sqrt[3]{4}$; el valor mínimo es 0. La gráfica se muestra en la figura 8. ■

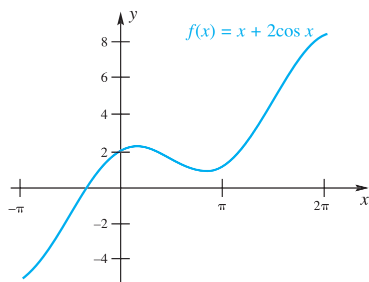


Figura 9

EJEMPLO 5 Determine los valores máximo y mínimo de $f(x) = x + 2\cos x$ en $[-\pi, 2\pi]$.

SOLUCIÓN La figura 9 muestra una gráfica de $y = f(x)$. La derivada es $f'(x) = 1 - 2$ sen x, que está definida en $(-\pi, 2\pi)$ y es cero cuando sen $x = 1/2$. Los únicos valores de x en el intervalo $[-\pi, 2\pi]$ que satisfacen sen $x = 1/2$ son $x = \pi/6$ y $x = 5\pi/6$. Estos dos números, junto con los puntos fronterizos $-\pi$ y 2π, son los puntos críticos. Ahora, evalúe f en cada punto crítico:

$$f(-\pi) = -2 - \pi \approx -5.14 \qquad f(\pi/6) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \approx 2.26$$

$$f(5\pi/6) = -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} \approx 0.89 \qquad f(2\pi) = 2 + 2\pi \approx 8.28$$

Por lo tanto, $-2 - \pi$ es el mínimo (que se alcanza en $x = -\pi$) y el máximo es $2 + 2\pi$ (que se alcanza en $x = 2\pi$). ■

Revisión de conceptos

1. Una función ________ en un intervalo ________ siempre tendrá un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo.

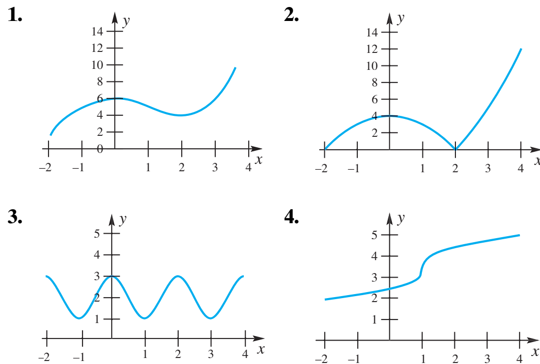
2. El término valor ________ denota un valor máximo o uno mínimo.

3. Una función puede alcanzar un valor extremo sólo en un punto crítico. Los puntos críticos son de tres tipos: ________, ________ y ________.

4. Un punto estacionario para f es un número c tal que ________; un punto singular para f es un número c tal que ________.

Conjunto de problemas 3.1

En los problemas del 1 al 4 determine todos los puntos críticos y encuentre el mínimo y el máximo de la función. Cada función tiene dominio $[-2, 4]$.



En los problemas del 5 al 26 identifique los puntos críticos y encuentre los valores máximo y mínimo en el intervalo dado.

5. $f(x) = x^2 + 4x + 4;\ I = [-4, 0]$

6. $h(x) = x^2 + x;\ I = [-2, 2]$

7. $\Psi(x) = x^2 + 3x;\ I = [-2, 1]$

8. $G(x) = \frac{1}{5}(2x^3 + 3x^2 - 12x);\ I = [-3, 3]$

9. $f(x) = x^3 - 3x + 1;\ I = \left(-\frac{3}{2}, 3\right)$ *Sugerencia:* dibuje la gráfica.

10. $f(x) = x^3 - 3x + 1;\ I = \left[-\frac{3}{2}, 3\right]$

11. $h(r) = \dfrac{1}{r};\ I = [-1, 3]$

12. $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2};\ I = [-3, 1]$

13. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2;\ I = [-2, 2]$

14. $f(x) = x^5 - \dfrac{25}{3}x^3 + 20x - 1;\ I = [-3, 2]$

15. $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2};\ I = (-\infty, \infty)$ *Sugerencia:* dibuje la gráfica.

16. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2};\ I = [-1, 4]$

17. $r(\theta) = \operatorname{sen}\theta;\ I = \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}\right]$

18. $s(t) = \operatorname{sen} t - \cos t;\ I = [0, \pi]$

19. $a(x) = |x - 1|;\ I = [0, 3]$

20. $f(s) = |3s - 2|;\ I = [-1, 4]$

21. $g(x) = \sqrt[3]{x};\ I = [-1, 27]$

22. $s(t) = t^{2/5};\ I = [-1, 32]$

23. $H(t) = \cos t;\ I = [0, 8\pi]$

24. $g(x) = x - 2\operatorname{sen} x;\ I = [-2\pi, 2\pi]$

25. $g(\theta) = \theta^2 \sec\theta;\ I = \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$

26. $h(t) = \dfrac{t^{5/3}}{2 + t};\ I = [-1, 8]$

GC **27.** Para cada función identifique los puntos críticos y encuentre los valores extremos en $[-1, 5]$.

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + x + 2$ (b) $g(x) = |f(x)|$

GC **28.** Para cada función identifique los puntos críticos y encuentre los valores extremos en $[-1, 5]$.

(a) $f(x) = \cos x + x \operatorname{sen} x + 2$ (b) $g(x) = |f(x)|$

En los problemas del 29 al 36 haga un bosquejo de la gráfica de una función con las propiedades que se dan.

29. f es diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, alcanza un máximo de 6 (cuando $x = 3$) y un mínimo de 0 (cuando $x = 0$). Además, $x = 5$ es un punto estacionario.

30. f es diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, alcanza un máximo de 4 (cuando $x = 6$) y un mínimo de -2 (cuando $x = 1$). Además, $x = 2, 3, 4, 5$ son puntos estacionarios.

31. f es continua, pero no necesariamente diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, alcanza un máximo de 6 (cuando $x = 5$) y un mínimo de 2 (cuando $x = 3$). Además, $x = 1$ y $x = 5$ son los únicos puntos estacionarios.

32. f es continua, pero no necesariamente diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, alcanza un máximo de 4 (cuando $x = 4$) y un mínimo de 2 (cuando $x = 2$). Además, f no tiene puntos estacionarios.

33. f es diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, alcanza un máximo de 4 (que se obtiene en dos valores diferentes de x, ninguno de los cuales es un punto fronterizo) y un mínimo de 1 (que se alcanza en tres valores diferentes de x, exactamente uno de los cuales es un punto fronterizo).

34. f es continua, pero no necesariamente diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, alcanza un máximo de 6 (cuando $x = 0$) y un mínimo de 0 (cuando $x = 6$). Además, f tiene dos puntos estacionarios y dos puntos singulares en $(0, 6)$.

35. f tiene dominio en $[0, 6]$, pero no necesariamente es continua, y f no alcanza un máximo.

36. f tiene dominio en $[0, 6]$, pero no necesariamente es continua, y f no alcanza ni máximo ni mínimo.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** continua; cerrado **2.** extremo **3.** puntos fronterizo; puntos estacionarios; puntos singulares **4.** $f'(c) = 0$; $f'(c)$ no existe.

3.2 Monotonía y concavidad

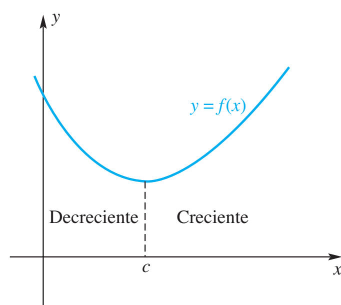


Figura 1

Considere la gráfica en la figura 1. Nadie se sorprendería cuando decimos que f es decreciente a la izquierda de c y creciente a la derecha de c. Pero, para asegurar que coincidimos en la terminología, damos definiciones precisas.

Definición

Sea f definida en un intervalo I (abierto, cerrado o ninguno de los dos). Decimos que:

(i) f es **creciente** en I si, para toda pareja de números x_1 y x_2 en I,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

(ii) f es **decreciente** en I si, para toda pareja de números x_1 y x_2 en I,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

(iii) f es **estrictamente monótona** en I, si es creciente en I o es decreciente en I.

¿Cómo decidiremos en dónde es creciente una función? Alguien podría sugerir que dibujemos su gráfica y la veamos. Pero, por lo regular, una gráfica se dibuja al trazar algunos puntos y conectarlos mediante una curva suave. ¿Quién puede asegurar que la gráfica no oscila entre los puntos trazados? Incluso, los sistemas de álgebra computacional y las calculadoras gráficas lo hacen conectando puntos. Necesitamos un procedimiento mejor.

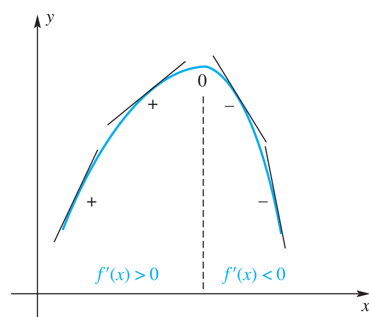


Figura 2

La primera derivada y monotonía Recuerde que la primera derivada $f'(x)$ nos da la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto x. Por lo tanto, si $f'(x) > 0$ entonces la recta tangente asciende hacia la derecha, lo cual sugiere que f es creciente. (Véase la figura 2.) De manera análoga, si $f'(x) < 0$, la recta tangente desciende hacia la derecha, lo cual sugiere que f es decreciente. También podemos observar esto en términos de movimiento a lo largo de una línea. Suponga que un objeto está en la posición $s(t)$ en el instante t y que su velocidad siempre es positiva, esto es, $s'(t) = ds/dt > 0$. Entonces, parece razonable que el objeto continúe moviéndose a la derecha mientras la derivada siga siendo positiva. En otras palabras, $s(t)$ será una función *creciente* de t. Estas observaciones no demuestran el teorema A, pero hacen creíble el resultado. Posponemos una demostración rigurosa hasta la sección 3.6.

Teorema A Teorema de monotonía

Sea f continua en el intervalo I y derivable en todo punto interior de I.

(i) Si $f'(x) > 0$ para toda x interior a I, entonces f es creciente en I.
(ii) Si $f'(x) < 0$ para toda x interior a I, entonces f es decreciente en I.

Por lo regular, este teorema nos permite determinar con precisión en dónde una función derivable es creciente y en dónde es decreciente. Es cuestión de resolver dos desigualdades.

EJEMPLO 1 Si $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$, encuentre en dónde f es creciente y en dónde es decreciente.

SOLUCIÓN Empezamos por encontrar la derivada de f,

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x + 1)(x - 2)$$

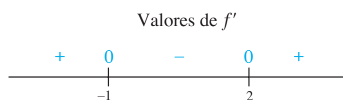


Figura 3

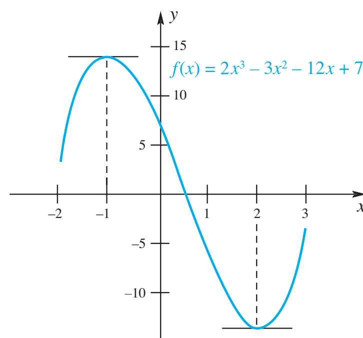


Figura 4

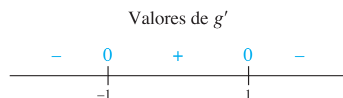


Figura 5

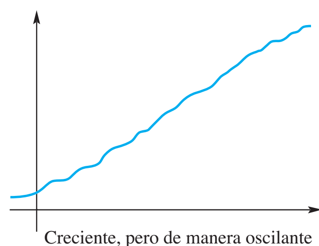


Figura 6

Necesitamos determinar en dónde

$$(x+1)(x-2) > 0$$

y también en dónde

$$(x+1)(x-2) < 0$$

Este problema fue estudiado con mayor detalle en la sección 0.2, que vale la pena revisar ahora. Los puntos de separación son -1 y 2; éstos dividen al eje x en tres intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ y $(2, \infty)$. Al utilizar los puntos de prueba -2, 0 y 3, concluimos que $f'(x) > 0$ en el primero y en el último de estos intervalos y que $f'(x) < 0$ en el intervalo de en medio (véase la figura 3). Así, por el teorema A, f es creciente en $(-\infty, -1]$ y en $[2, \infty)$, es decreciente en $[-1, 2]$. Observe que el teorema nos permite incluir los puntos fronterizos de estos intervalos, aunque $f'(x) = 0$ en esos puntos. La gráfica de f se muestra en la figura 4. ■

EJEMPLO 2 Determine en dónde $g(x) = x/(1 + x^2)$ es creciente y en dónde es decreciente.

SOLUCIÓN

$$g'(x) = \frac{(1 + x^2) - x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^2)^2}$$

Como el denominador siempre es positivo, $g'(x)$ tiene el mismo signo que el numerador $(1-x)(1+x)$. Los puntos de separación, -1 y 1, determinan los tres intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$. Cuando los probamos, encontramos que $g'(x) < 0$ en el primero y en el último de estos intervalos y que $g'(x) > 0$ en el intervalo de en medio (véase la figura 5). Con base en el teorema A, concluimos que g es decreciente en $(-\infty, -1]$ y en $[1, \infty)$ y que es creciente en $[-1, 1]$. Posponemos la graficación de g para más adelante; pero si quiere ver la gráfica, vaya a la figura 11 y al ejemplo 4. ■

La segunda derivada y concavidad Una función puede crecer y también tener una gráfica que oscila mucho (véase la figura 6). Para analizar oscilaciones, necesitamos estudiar cómo gira la recta tangente cuando nos movemos de izquierda a derecha a lo largo de la gráfica. Si la recta tangente gira constantemente en sentido contrario a las manecillas del reloj, decimos que la gráfica es *cóncava hacia arriba* (o simplemente cóncava); si la tangente gira en el mismo sentido que las manecillas del reloj, la gráfica es *cóncava hacia abajo* (o *convexa*). Ambas definiciones se formulan mejor en términos de funciones y sus derivadas.

> **Definición**
>
> Sea f derivable en un intervalo abierto I. Decimos que f (al igual que su gráfica) es **cóncava hacia arriba (cóncava)** en I, si f' es creciente en I; y decimos que f es **cóncava hacia abajo (convexa)** en I, si f' es decreciente en I.

Los diagramas en la figura 7 ayudarán a aclarar estas nociones. Obsérvese que una curva que es cóncava *hacia arriba* tiene forma parecida a una *copa*.

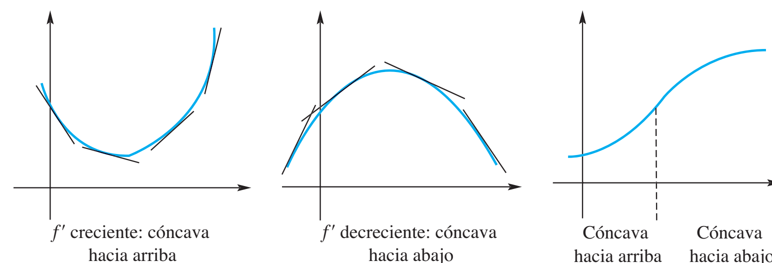


Figura 7

Condiciones en los teoremas A y B

Las condiciones que consideran a las derivadas en los teoremas A y B son suficientes para garantizar las conclusiones que se establecen. Sin embargo, estas condiciones no son necesarias. Es posible que una función sea creciente en algún intervalo, aunque la derivada no siempre sea positiva en ese intervalo. Si consideramos la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[-4, 4]$, notamos que es creciente pero su derivada no siempre es positiva en ese intervalo ($f'(0) = 0$). La función $g(x) = x^4$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $[-4, 4]$, pero la segunda derivada, $g''(x) = 12x^2$, no siempre es positiva en ese intervalo.

En vista del teorema A, tenemos un criterio sencillo para decidir en dónde una curva es cóncava (hacia arriba) y en dónde es cóncava hacia abajo (convexa). Basta con tener en mente que la segunda derivada de f es la primera derivada de f'. Por lo que, f' es creciente si f'' es positiva; es decreciente si f'' es negativa.

Teorema B Teorema de concavidad

Sea f dos veces derivable en el intervalo abierto I.

(i) Si $f''(x) > 0$ para toda x en I, entonces f es cóncava (hacia arriba) en I.

(ii) Si $f'' < 0$ para toda x en I, entonces f es cóncava hacia abajo (convexa) en I.

Para la mayoría de las funciones, este teorema reduce el problema de determinar concavidad al problema de resolver desigualdades. En esto somos expertos.

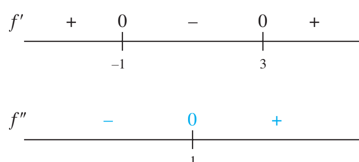


Figura 8

EJEMPLO 3 ¿En dónde $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo?

SOLUCIÓN

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$
$$f''(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$$

Al resolver las desigualdades $(x + 1)(x - 3) > 0$ y su opuesta, $(x + 1)(x - 3) < 0$, concluimos que f es creciente en $(-\infty, -1]$ y $[3, \infty)$ y decreciente en $[-1, 3]$ (véase la figura 8). De manera análoga, al resolver $2(x - 1) > 0$ y $2(x - 1) < 0$ se muestra que f es cóncava hacia arriba en $(1, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$. La gráfica de f se muestra en la figura 9. ■

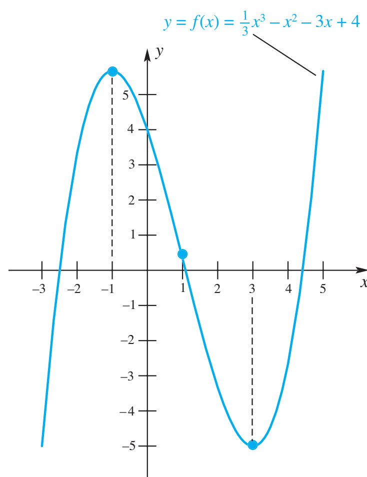


Figura 9

EJEMPLO 4 ¿En dónde $g(x) = x/(1 + x^2)$ es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo?

SOLUCIÓN Comenzamos nuestro estudio de esta función en el ejemplo 2. Allí, aprendimos que g es decreciente en $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$ y creciente en $[-1, 1]$. Para analizar la concavidad, calculamos g''.

$$g'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

$$g''(x) = \frac{(1 + x^2)^2(-2x) - (1 - x^2)(2)(1 + x^2)(2x)}{(1 + x^2)^4}$$

$$= \frac{(1 + x^2)[(1 + x^2)(-2x) - (1 - x^2)(4x)]}{(1 + x^2)^4}$$

$$= \frac{2x^3 - 6x}{(1 + x^2)^3}$$

$$= \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}$$

Como el denominador siempre es positivo, sólo necesitamos resolver $x(x^2 - 3) > 0$ y su opuesta. Los puntos de separación son $-\sqrt{3}$, 0 y $\sqrt{3}$. Estos tres puntos de separación determinan cuatro intervalos. Después de probarlos (véase la figura 10), concluimos que g es cóncava hacia arriba en $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ y en $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$ y que es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ y en $\left(0, \sqrt{3}\right)$.

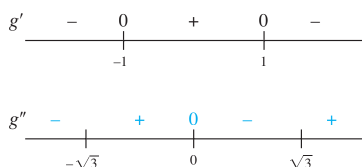


Figura 10

Para bosquejar la gráfica de g, hacemos uso de toda la información obtenida hasta el momento, más el hecho de que g es una función impar cuya gráfica es simétrica respecto al origen (véase la figura 11).

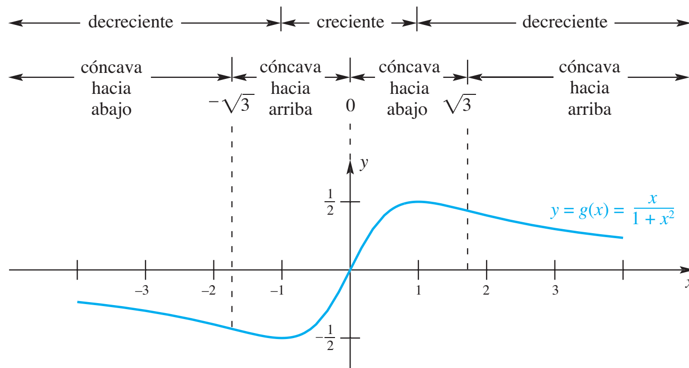


Figura 11

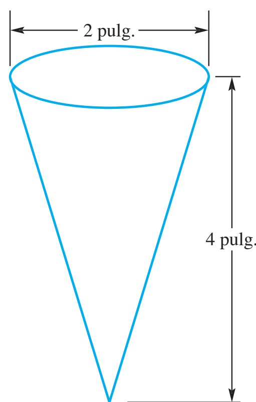


Figura 12

EJEMPLO 5 Suponga que se vierte agua en un depósito cónico, como se muestra en la figura 12, a una razón constante de $\frac{1}{2}$ pulgada cúbica por segundo. Determine la altura h como función del tiempo t y dibuje $h(t)$ desde el instante $t = 0$ hasta el momento en que el depósito está lleno.

SOLUCIÓN ≈ Antes de que resolvamos este problema, reflexionemos en cómo se verá la gráfica. Al principio, la altura aumentará con rapidez, ya que se necesita muy poca agua para llenar la parte inferior del cono. Conforme se va llenando el depósito, la altura aumentará menos rápido. ¿Qué sugieren estos enunciados con respecto a la función $h(t)$, su derivada $h'(t)$ y su segunda derivada $h''(t)$? Como el agua se vierte de manera constante, la altura siempre aumentará, de modo que $h'(t)$ será positiva. La altura aumentará más lentamente conforme se eleva el nivel. Por consiguiente, la función $h'(t)$ está disminuyendo, de modo que $h''(t)$ es negativa. Por lo tanto, la gráfica de $h(t)$ es creciente —ya que $h'(t)$ es positiva— y cóncava hacia abajo —pues $h''(t)$ es negativa.

Ahora, una vez que tenemos una idea intuitiva sobre cómo debe verse la gráfica (creciente y cóncava hacia abajo), resuelva este problema de manera analítica. El volumen de un cono circular recto es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde V, r y h son funciones del tiempo. Las funciones h y r están relacionadas; observe los triángulos semejantes en la figura 13. Al utilizar las propiedades de triángulos semejantes tenemos

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{4}$$

Así, $r = h/4$. Por esto, el volumen del agua dentro del cono es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi}{48}h^3$$

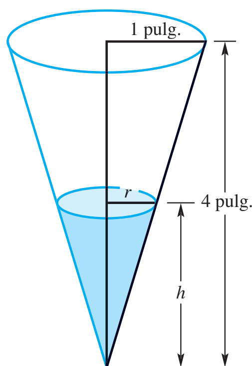


Figura 13

Por otro lado, como el agua está fluyendo al interior del contenedor a una razón de $\frac{1}{2}$ pulgada cúbica por segundo, el volumen en el instante t es $V = \frac{1}{2}t$, donde t se mide en segundos. Al igualar estas dos expresiones para V se obtiene

$$\frac{1}{2}t = \frac{\pi}{48}h^3$$

Cuando $h = 4$, tenemos $t = \frac{2\pi}{48}4^3 = \frac{8}{3}\pi \approx 8.4$; así, toma alrededor de 8.4 segundos para que se llene el depósito. Ahora se despeja h en la ecuación anterior que relaciona h y t para obtener

$$h(t) = \sqrt[3]{\frac{24}{\pi}t}$$

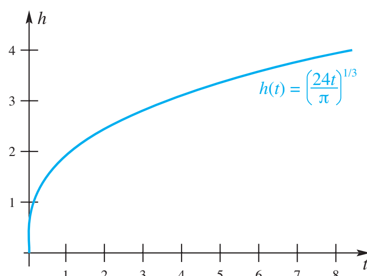


Figura 14

La primera y segunda derivadas de h son

$$h'(t) = D_t\sqrt[3]{\frac{24}{\pi}t} = \frac{8}{\pi}\left(\frac{24}{\pi}t\right)^{-2/3} = \frac{2}{\sqrt[3]{9\pi t^2}}$$

que es positiva, y

$$h''(t) = D_t\frac{2}{\sqrt[3]{9\pi t^2}} = -\frac{4}{3\sqrt[3]{9\pi t^5}}$$

que es negativa. La gráfica de $h(t)$ se muestra en la figura 14. Como se esperaba, la gráfica de h es creciente y cóncava hacia abajo. ■

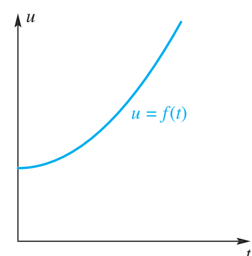


Figura 15

EJEMPLO 6 Una agencia de noticias reportó en mayo de 2004 que el desempleo en Asia oriental estaba aumentando en forma continua a una tasa creciente. Por otra parte, el precio del alimento estaba aumentando, pero a una tasa más lenta que antes. Interprete estos enunciados en términos de funciones crecientes/decrecientes y concavidad.

SOLUCIÓN Sea $u = f(t)$ el número de personas desempleadas en el instante t. Aunque en realidad u salta en cantidades enteras, seguiremos una práctica estándar al representar a u por medio de una curva suave, como en la figura 15. Decir que el desempleo está aumentando es decir que $du/dt > 0$. Decir que está aumentando a una tasa creciente es decir que la función du/dt está *creciendo*; pero esto significa que la derivada de du/dt debe ser positiva. Por lo tanto, $d^2u/dt^2 > 0$. En la figura 15, observe que la pendiente de la recta tangente aumenta conforme t aumenta. El desempleo es creciente y cóncavo hacia arriba.

De forma similar, si $p = g(t)$ representa el precio del alimento (por ejemplo, el costo común de comestibles diarios para una persona) en el instante t, entonces dp/dt es positiva pero *decreciente*. Por lo tanto, la derivada de dp/dt es negativa, por lo que $d^2p/dt^2 < 0$. En la figura 16, observe que la pendiente de la recta tangente disminuye conforme t aumenta. El precio del alimento está aumentando, pero es cóncavo hacia abajo. ■

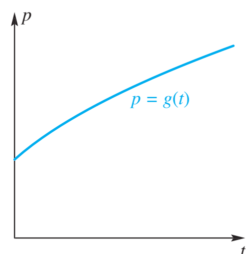


Figura 16

Puntos de inflexión Sea f continua en c. Llamamos a $(c, f(c))$ un **punto de inflexión** de la gráfica de f, si f es cóncava hacia arriba a un lado de c y cóncava hacia abajo del otro lado de c. La gráfica en la figura 17 indica varias posibilidades.

Terminología
Mientras que el mínimo o el máximo de una función es un *número*, un punto de inflexión siempre es una *pareja ordenada* $(c, f(c))$.

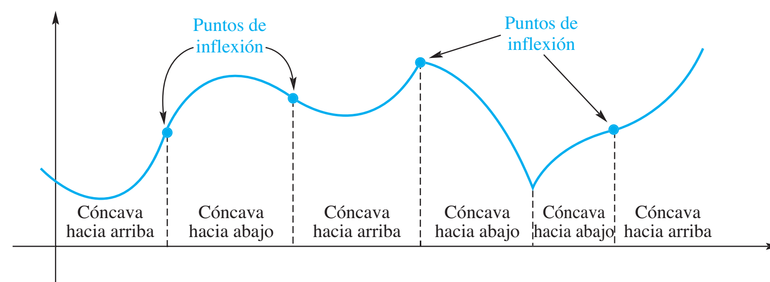


Figura 17

Como usted podría suponer, los *puntos en donde $f''(x) = 0$ o donde $f''(x)$ no existe son candidatos a puntos de inflexión*. Utilizamos la palabra *candidato* de manera deliberada. Al igual que un candidato a un cargo político puede fracasar en una elección, también, por ejemplo, un punto en donde $f''(x) = 0$ puede fracasar en ser un punto de inflexión. Considere $f(x) = x^4$, que tiene la gráfica mostrada en la figura 18. Es cierto que $f''(0) = 0$, pero el origen no es un punto de inflexión. Por lo tanto, para buscar los puntos de inflexión empezamos por identificar los puntos en donde $f''(x) = 0$ (y en donde $f''(x)$ no existe). Después verificamos para ver si en realidad son puntos de inflexión.

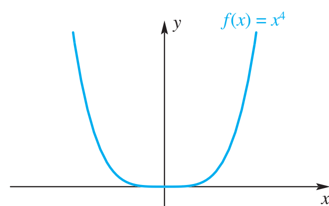


Figura 18

Regresemos a la gráfica del ejemplo 4. Verá que tiene tres puntos de inflexión. Éstos son $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/4\right)$, $(0, 0)$ y $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4\right)$.

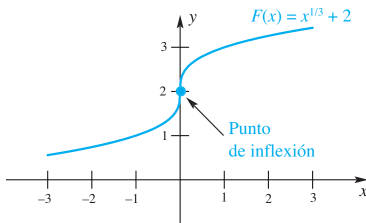


Figura 19

EJEMPLO 7 Encuentre todos los puntos de inflexión de $F(x) = x^{1/3} + 2$.

SOLUCIÓN

$$F'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}, \qquad F''(x) = \frac{-2}{9x^{5/3}}$$

La segunda derivada, $F''(x)$, nunca es cero; sin embargo, no existe en $x = 0$. El punto $(0, 2)$ es un punto de inflexión, ya que $F''(x) > 0$ para $x < 0$ y $F''(x) < 0$ para $x > 0$. La gráfica se bosqueja en la figura 19. ■

Revisión de conceptos

1. Si $f'(x) > 0$ en todas partes, entonces f es ________ en todas partes; si $f''(x) > 0$ en todas partes, entonces f es ________ en todas partes.

2. Si ________ y ________ en un intervalo abierto I, entonces f es creciente y cóncava hacia abajo en I.

3. Un punto en la gráfica de una función continua, en donde la concavidad cambia se denomina ________.

4. Al tratar de localizar los puntos de inflexión para la gráfica de una función f debemos buscar números c, en donde ________ o bien ________.

Conjunto de problemas 3.2

En los problemas del 1 al 10 utilice el teorema de monotonía para encontrar en dónde la función dada es creciente y en dónde es decreciente.

1. $f(x) = 3x + 3$ **2.** $g(x) = (x + 1)(x - 2)$

3. $h(t) = t^2 + 2t - 3$ **4.** $f(x) = x^3 - 1$

5. $G(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ **6.** $f(t) = t^3 + 3t^2 - 12$

7. $h(z) = \frac{z^4}{4} - \frac{4z^3}{6}$ **8.** $f(x) = \frac{x - 1}{x^2}$

9. $H(t) = \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 2\pi$

10. $R(\theta) = \cos^2 \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

En los problemas del 11 al 18 utilice el teorema de la concavidad para determinar en dónde la función dada es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo. También encuentre todos los puntos de inflexión.

11. $f(x) = (x - 1)^2$ **12.** $G(w) = w^2 - 1$

13. $T(t) = 3t^3 - 18t$ **14.** $f(z) = z^2 - \frac{1}{z^2}$

15. $q(x) = x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 3x + 1$

16. $f(x) = x^4 + 8x^3 - 2$ **17.** $F(x) = 2x^2 + \cos^2 x$

18. $G(x) = 24x^2 + 12 \operatorname{sen}^2 x$

En los problemas del 19 al 28 determine en dónde la gráfica de la función dada es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. Después dibuje la gráfica (véase el ejemplo 4).

19. $f(x) = x^3 - 12x + 1$

20. $g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 12$

21. $g(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$ **22.** $F(x) = x^6 - 3x^4$

23. $G(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$ **24.** $H(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

25. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ en $[0, \pi]$ **26.** $g(x) = x\sqrt{x - 2}$

27. $f(x) = x^{2/3}(1 - x)$ **28.** $g(x) = 8x^{1/3} + x^{4/3}$

En los problemas del 29 al 34 dibuje la gráfica de una función continua f en [0, 6] que satisface todas las condiciones que se establecen.

29. $f(0) = 1; f(6) = 3$; creciente y cóncava hacia abajo en $(0, 6)$.

30. $f(0) = 8; f(6) = -2$, decreciente en el intervalo $(0, 6)$; punto de inflexión en la pareja ordenada $(2, 3)$, cóncava hacia arriba en el intervalo $(2, 6)$.

31. $f(0) = 3; f(3) = 0; f(6) = 4$;
$f'(x) < 0$ en $(0, 3)$; $f'(x) > 0$ en $(3, 6)$;
$f''(x) > 0$ en $(0, 5)$; $f''(x) < 0$ en $(5, 6)$

32. $f(0) = 3; f(2) = 2; f(6) = 0$;
$f'(x) < 0$ en $(0, 2) \cup (2, 6)$; $f'(2) = 0$;
$f''(x) < 0$ en $(0, 1) \cup (2, 6)$; $f''(x) > 0$ en $(1, 2)$

33. $f(0) = f(4) = 1; f(2) = 2; f(6) = 0$;
$f'(x) > 0$ en $(0, 2)$; $f'(x) < 0$ en $(2, 4) \cup (4, 6)$;
$f'(2) = f'(4) = 0$; $f''(x) > 0$ en $(0, 1) \cup (3, 4)$;
$f''(x) < 0$ en $(1, 3) \cup (4, 6)$

34. $f(0) = f(3) = 3; f(2) = 4; f(4) = 2; f(6) = 0$;
$f'(x) > 0$ en $(0, 2)$; $f'(x) < 0$ en $(2, 4) \cup (4, 5)$;
$f'(2) = f'(4) = 0$; $f'(x) = -1$ en $(5, 6)$;
$f''(x) < 0$ en $(0, 3) \cup (4, 5)$; $f''(x) > 0$ en $(3, 4)$

35. Demuestre que una función cuadrática no tiene puntos de inflexión.

36. Demuestre que una función cúbica tiene exactamente un punto de inflexión.

37. Demuestre que, si $f'(x)$ existe y es continua en un intervalo I y si $f'(x) \neq 0$ en todos los puntos interiores de I, entonces f es creciente

en todo el intervalo I o es decreciente en todo el intervalo I. *Sugerencia:* use el teorema del valor intermedio para demostrar que no pueden existir dos puntos x_1 y x_2 de I en donde f' tiene signos opuestos.

38. Suponga que f es una función cuya derivada es $f'(x) = (x^2 - x + 1)/(x^2 + 1)$. Utilice el problema 37 para demostrar que f es creciente en todas partes.

39. Utilice el teorema de monotonía para demostrar cada proposición, si $0 < x < y$.

(a) $x^2 < y^2$ (b) $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ (c) $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$

40. ¿Qué condiciones sobre a, b y c harán que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ siempre sea creciente?

41. Determine a y b de modo que $f(x) = a\sqrt{x} + b/\sqrt{x}$ tenga a $(4, 13)$ como un punto de inflexión.

42. Suponga que la función cúbica $f(x)$ tiene tres ceros reales, r_1, r_2 y r_3. Demuestre que su punto de inflexión tiene abscisa $(r_1 + r_2 + r_3)/3$. *Sugerencia:* $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$.

43. Suponga que $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$ para toda x. ¿Qué otras condiciones sencillas (si existen) se necesitan para garantizar que:

(a) $f(x) + g(x)$ sea creciente para toda x;

(b) $f(x) \cdot g(x)$ sea creciente para toda x;

(c) $f(g(x))$ sea creciente para toda x?

44. Suponga que $f''(x) > 0$ y $g''(x) > 0$ para toda x. ¿Qué otras condiciones sencillas (si las hay) se necesitan para garantizar que:

(a) $f(x) + g(x)$ sea cóncava hacia arriba para toda x;

(b) $f(x) \cdot g(x)$ sea cóncava hacia arriba para toda x;

(c) $f(g(x))$ sea cóncava hacia arriba para toda x?

GC *Utilice una calculadora gráfica o una computadora para resolver los problemas del 45 al 48.*

45. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos(x/2)$ en el intervalo $I = (-2, 7)$.

(a) Dibuje la gráfica de f en I.

(b) Utilice esta gráfica para estimar en donde $f'(x) < 0$ en I.

(c) Utilice esta gráfica para estimar en donde $f''(x) < 0$ en I.

(d) Dibuje la gráfica de f' para confirmar su respuesta a la parte (b).

(e) Dibuje la gráfica de f'' para confirmar su respuesta a la parte (c).

46. Repita el problema 45 para $f(x) = x\cos^2(x/3)$ en $(0, 10)$.

47. Sea $f'(x) = x^3 - 5x^2 + 2$ en $I = [-2, 4]$. En el intervalo I, ¿en dónde es creciente f?

48. Sea $f''(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 4$ en $I = [-2, 3]$. En el intervalo I, ¿en dónde es cóncava hacia abajo f?

49. Traduzca cada uno de los siguientes enunciados al lenguaje de derivadas de distancia con respecto al tiempo. Para cada parte, haga un bosquejo de una gráfica de la posición del automóvil, s, contra el tiempo, t, e indique la concavidad.

(a) La velocidad del automóvil es proporcional a la distancia que ha recorrido.

(b) El automóvil está aumentando su velocidad.

(c) Yo no dije que el automóvil estaba deteniéndose, dije que su tasa de aumento de velocidad estaba disminuyendo.

(d) La velocidad del automóvil está aumentando 10 millas por hora cada minuto.

(e) El automóvil está deteniéndose muy lentamente hasta detenerse.

(f) El automóvil siempre recorre la misma distancia en intervalos iguales de tiempo.

50. Traduzca cada uno de los siguientes enunciados al lenguaje de derivadas, haga un bosquejo de la función apropiada e indique la concavidad.

(a) Se está evaporando agua del tanque a una tasa constante.

(b) Se vierte agua al interior del tanque a una razón de 3 galones por minuto, pero también sale $\frac{1}{2}$ galón por minuto.

(c) Como el agua se vierte al tanque cónico a una tasa constante, el nivel del agua se eleva a una tasa cada vez más lenta.

(d) La inflación se mantuvo estable este año, pero se espera que se eleve cada vez más rápido el año entrante.

(e) En la actualidad el precio del petróleo está bajando, pero se espera que esta tendencia sea lenta y luego se revierta en 2 años.

(f) La temperatura de David está subiendo, pero parece que la penicilina está surtiendo efecto.

51. Traduzca cada uno de los siguientes enunciados al lenguaje matemático, haga un bosquejo de la función apropiada e indique la concavidad.

(a) El costo de un automóvil continúa en aumento y a una tasa cada vez más rápida.

(b) Durante los últimos dos años, Estados Unidos ha continuado la reducción de su consumo de petróleo, pero a una tasa cada vez más lenta.

(c) La población mundial continúa creciendo, pero a una tasa cada vez más lenta.

(d) El ángulo que la torre inclinada de Pisa forma con la vertical aumenta rápidamente.

(e) Las utilidades de la compañía Upper Midwest crecen despacio.

(f) La compañía XYZ ha perdido dinero, pero pronto esta situación se revertirá.

52. Traduzca cada enunciado de la siguiente columna de un periódico en un enunciado sobre derivadas.

(a) En Estados Unidos, la razón R de deuda gubernamental al ingreso nacional permaneció sin cambio, alrededor de 28% hasta 1981, pero

(b) entonces comenzó a aumentar de manera cada vez más abrupta hasta llegar a 36% durante 1983.

53. Se vierte café en el vaso mostrado en la figura 20 a razón de 2 pulgadas cúbicas por segundo. El diámetro superior es de 3.5 pulgadas, el diámetro inferior es de 3 pulgadas y la altura del vaso es de 5 pulgadas. Este vaso se llena con casi 23 onzas. Determine la altura h del café como función del tiempo t y dibuje la gráfica de $h(t)$ desde el instante $t = 0$ hasta el momento en que el vaso esté lleno.

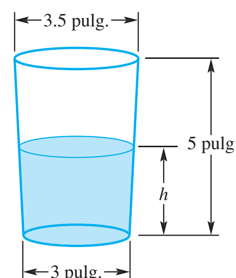


Figura 20

54. Se bombea agua a un tanque cilíndrico, a una razón constante de 5 galones por minuto, como se muestra en la figura 21. El tanque tiene 3 pies de diámetro y 9.5 pies de largo. El volumen del tanque es $\pi r^2 l = \pi \times 1.5^2 \times 9.5 \approx 67.152$ pies cúbicos ≈ 500 galones. Sin hacer cálculos, bosqueje una gráfica de la altura del agua como función del tiempo t (véase el ejemplo 6). ¿En dónde h es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo?

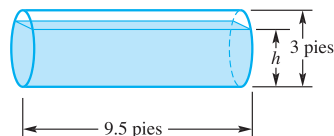


Figura 21

55. Se vierte un líquido al contenedor que se muestra en la figura 22 a razón de 3 pulgadas cúbicas por segundo. Al contenedor le caben 24 pulgadas cúbicas. Bosqueje una gráfica de la altura h del líquido como una función del tiempo t. En su gráfica, ponga atención especial a la concavidad de h.

56. Un tonel de 20 galones, como el mostrado en la figura 23, tiene una fuga y sale agua a razón constante de 0.1 galones por día. Dibuje una gráfica de la altura h del agua como función del tiempo t; suponga que el tonel está lleno en el instante $t = 0$. En su gráfica, ponga atención especial a la concavidad de h.

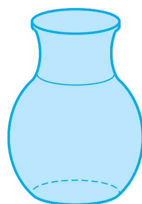


Figura 22

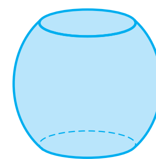


Figura 23

57. Con base en cada una de las tablas siguientes, qué puede deducir acerca de la forma de un recipiente en el que se da la medida del volumen del agua como una función de la profundidad.

(a)

Profundidad	1	2	3	4	5	6
Volumen	4	8	11	14	20	28

(b)

Profundidad	1	2	3	4	5	6
Volumen	4	9	12	14	20	28

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** creciente; cóncava hacia arriba **2.** $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ **3.** un punto de inflexión **4.** $f''(c) = 0; f''(c)$ no existe.

3.3 Extremos locales y extremos en intervalos abiertos

Recordemos de la sección 3.1 que el valor máximo (si existe) de una función f en un conjunto S es el valor más grande que f alcanza en el conjunto S. A veces se le conoce como **valor máximo global**, o *valor máximo absoluto* de f. Por lo tanto, para la función f con dominio $S = [a, b]$ cuya gráfica se bosqueja en la figura 1, $f(a)$ es el valor máximo global. Pero, ¿qué es $f(c)$? Quizá no sea el rey del país, pero al menos es el jefe de su propia localidad. Le llamamos **valor máximo local**, o *valor máximo relativo*. Por supuesto, un valor máximo global automáticamente es un valor máximo local. La figura 2 ilustra varias posibilidades. Observe que el valor máximo global (si existe) es el mayor de los valores máximos locales. De manera análoga, el valor mínimo global es el más pequeño de los valores mínimos locales.

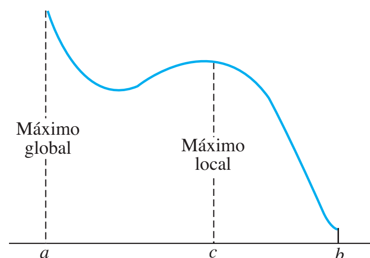


Figura 1

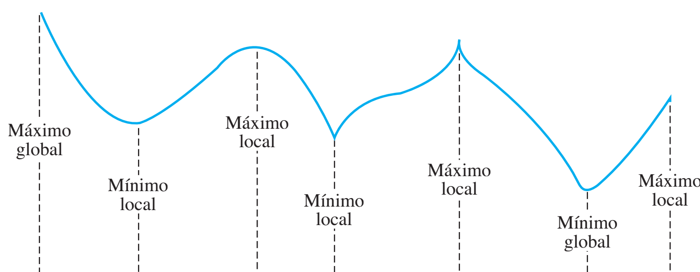


Figura 2

Aquí está la definición formal de máximos y mínimos locales. Recuerde que el símbolo ∩ denota la intersección (parte común) de dos conjuntos.

Definición

Sea S el dominio de f que contiene al punto c. Decimos que:

(i) $f(c)$ es un **valor máximo local** de f, si existe un intervalo (a, b) que contiene a c, tal que $f(c)$ es el valor máximo de f en $(a, b) \cap S$;

(ii) $f(c)$ es un **valor mínimo local** de f, si existe un intervalo (a, b) que contiene a c, tal que $f(c)$ es el valor mínimo de f en $(a, b) \cap S$;

(iii) $f(c)$ es un **valor extremo local** de f, si es un valor máximo local o un valor mínimo local.

¿En dónde se presentan los valores extremos locales? El teorema del punto crítico (teorema 3.1B) se cumple si se reemplaza la frase *valor extremo* por *valor extremo local*; la demostración es esencialmente la misma. Así, los puntos críticos (puntos fronterizos, estacionarios y singulares) son los candidatos a ser puntos en donde pueden presentarse extremos locales. Decimos *candidatos* porque no aseguramos que deba tenerse un extremo local en cada punto crítico. La gráfica de la izquierda en la figura 3

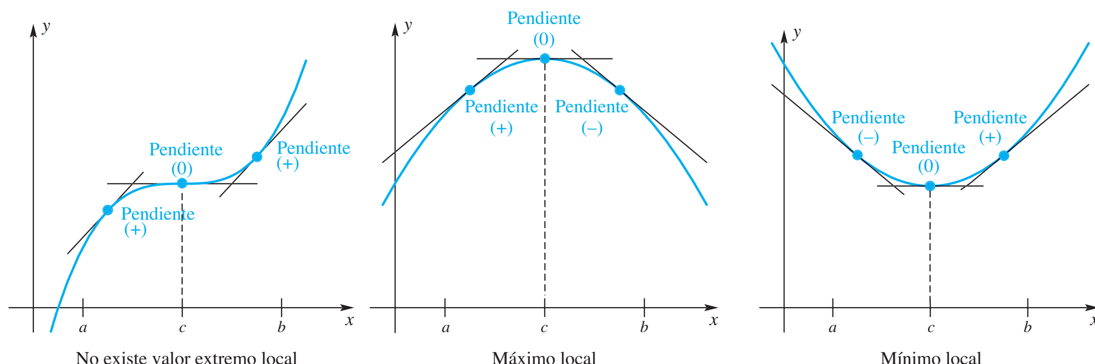


Figura 3

aclara esto. Sin embargo, si la derivada es positiva en un lado del punto crítico y negativa en el otro (y si la función es continua), entonces tenemos un extremo local, como se muestra en las gráficas de en medio y a la derecha de la figura 3.

Teorema A **Prueba (criterio) de la primera derivada**

Sea f continua en un intervalo abierto (a, b) que contiene un punto crítico c.

(i) Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, c) y $f'(x) < 0$ para toda x en (c, b), entonces $f(c)$ es un valor máximo local de f.

(ii) Si $f'(x) < 0$ para toda x en (a, c) y $f'(x) > 0$ para toda x en (c, b), entonces $f(c)$ es un valor mínimo local de f.

(iii) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo en ambos lados de c, entonces $f(c)$ no es un valor extremo de f.

Demostración de (i) Como $f'(x) > 0$ para toda x en (a, c), por el teorema de monotonía, f es creciente en $(a, c]$. Además, como $f'(x) < 0$ para toda x en (c, b), f es decreciente en $[c, b)$. Por lo tanto, $f(x) < f(c)$ para toda x en (a, b), excepto por supuesto en $x = c$. Concluimos que $f(c)$ es un máximo local.

Las demostraciones de (ii) y (iii) son semejantes. ■

EJEMPLO 1 Encuentre los valores extremos locales de la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$ en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN La función polinomial f es continua en todas partes y su derivada, $f'(x) = 2x - 6$, existe para toda x. Así, el único punto crítico para f es la solución única de $f'(x) = 0$; esto es, $x = 3$.

Como $f'(x) = 2(x - 3) < 0$ para $x < 3$, f es decreciente en $(-\infty, 3]$, y como $2(x - 3) > 0$ para $x > 3$, f es creciente en $[3, \infty)$. Por lo tanto, por la prueba de la primera derivada, $f(3) = -4$ es un valor mínimo local de f. Como 3 es el único punto crítico, no existen otros valores extremos. La gráfica de f se muestra en la figura 4. Observe que, en este caso, $f(3)$ es en realidad el valor mínimo (global). ■

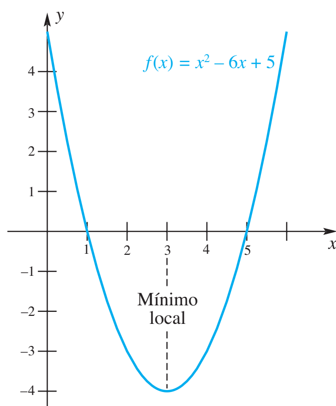


Figura 4

EJEMPLO 2 Encuentre los valores extremos locales de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$en $(-\infty, \infty)$.

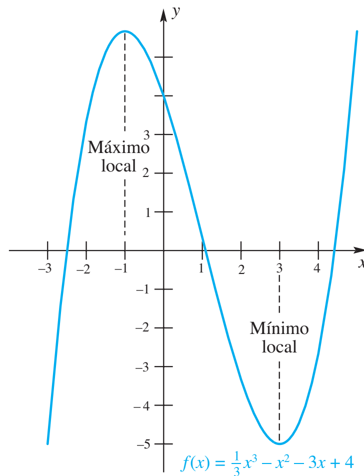


Figura 5

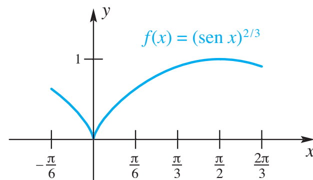


Figura 6

SOLUCIÓN Como $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, los únicos puntos críticos de f son -1 y 3. Cuando usamos los puntos de prueba -2, 0 y 4, sabemos que $(x+1)(x-3) > 0$ en $(-\infty, -1)$ y $(3, \infty)$ y $(x+1)(x-3) < 0$ en $(-1, 3)$. Por la prueba de la primera derivada, concluimos que $f(-1) = \frac{17}{3}$ es un valor máximo local y que $f(3) = -5$ es un valor mínimo local (véase la figura 5). ■

EJEMPLO 3 Encuentre los valores extremos de $f(x) = (\text{sen } x)^{2/3}$ en $(-\pi/6, 2\pi/3)$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{2 \cos x}{3(\text{sen } x)^{1/3}}, \qquad x \neq 0$$

Los puntos 0 y $\pi/2$ son puntos críticos, ya que $f'(0)$ no existe y $f'(\pi/2) = 0$. Ahora, $f'(x) < 0$ en $(-\pi/6, 0)$ y en $(\pi/2, 2\pi/3)$, mientras que $f'(x) > 0$ en $(0, \pi/2)$. Por la prueba de la primera derivada concluimos que $f(0) = 0$ es un valor mínimo local y que $f(\pi/2) = 1$ es un valor máximo local. La gráfica de f se muestra en la figura 6. ■

Prueba (criterio) de la segunda derivada Existe otra prueba para máximos y mínimos locales que, a veces, es más fácil de aplicar que la prueba de la primera derivada. Incluye la evaluación de la segunda derivada en los puntos estacionarios. No se aplica a los puntos singulares.

Teorema B Prueba (criterio) de la segunda derivada

Supóngase que f' y f'' existen en todo punto de un intervalo abierto (a, b) que contiene a c y supóngase que $f'(c) = 0$.

(i) Si $f''(c) < 0$, $f(c)$ es un valor máximo local de f.
(ii) Si $f''(c) > 0$, $f(c)$ es un valor mínimo local de f.

Demostración de (i) Es una tentación decir que, como $f''(c) < 0$, f es cóncava hacia abajo cerca de c para asegurar que esto demuestra (i). Sin embargo, para asegurar que f es cóncava hacia abajo en una vecindad de c, necesitamos que $f''(x) < 0$ en esa vecindad (no sólo en c) y nada en nuestra hipótesis garantiza esto. Debemos ser un poco más cuidadosos. Por definición e hipótesis,

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - 0}{x - c} < 0$$

de modo que podemos concluir que existe un intervalo (posiblemente pequeño) (α, β) alrededor de c, en donde

$$\frac{f'(x)}{x - c} < 0, \qquad x \neq c$$

Pero esta desigualdad implica que $f'(x) > 0$ para $\alpha < x < c$ y $f'(x) < 0$ para $c < x < \beta$. Por lo tanto, por la prueba de la primera derivada, $f(c)$ es un valor máximo local.

La demostración de (ii) es semejante. ■

EJEMPLO 4 Para $f(x) = x^2 - 6x + 5$, utilice la prueba de la segunda derivada para identificar extremos locales.

SOLUCIÓN Ésta es la función del ejemplo 1. Observe que

$$f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$$
$$f''(x) = 2$$

Así, $f'(3) = 0$ y $f''(3) > 0$. En consecuencia, por la prueba de la segunda derivada, $f(3)$ es un valor mínimo local. ■

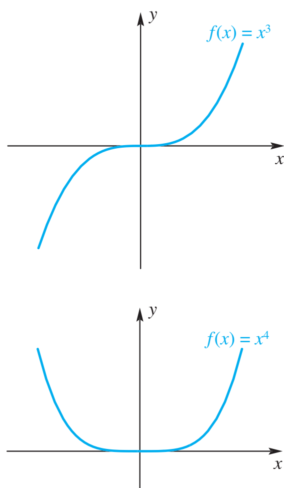


Figura 7

EJEMPLO 5 Para $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$, utilice la prueba de la segunda derivada para identificar los extremos locales.

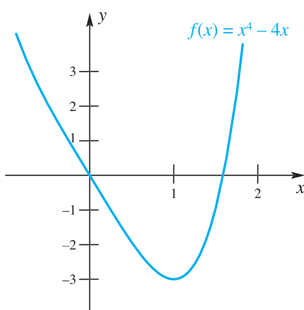
SOLUCIÓN Ésta es la función del ejemplo 2.

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$
$$f''(x) = 2x - 2$$

Los puntos críticos son -1 y 3 ($f'(-1) = f'(3) = 0$). Como $f''(-1) = -4$ y $f''(3) = 4$. Por la prueba de la segunda derivada concluimos que $f(-1)$ es un valor máximo local y que $f(3)$ es un valor mínimo local. ■

Por desgracia, la prueba de la segunda derivada en ocasiones falla, ya que $f''(x)$ puede ser cero en un punto estacionario. Para $f(x) = x^3$ y $f(x) = x^4$, $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$ (véase la figura 7). La primera no tiene un valor máximo o mínimo local en cero; la segunda tiene un mínimo local ahí. Esto muestra que si $f''(x) = 0$ en un punto estacionario, no podemos sacar una conclusión acerca de máximos o mínimos sin más información.

Extremos en intervalos abiertos Con frecuencia, los problemas que estudiamos en esta sección y en la sección 3.1 suponen que el conjunto en el que queremos maximizar o minimizar una función fue un intervalo *cerrado*. Sin embargo, los intervalos que surgen en la práctica no siempre son cerrados; en ocasiones son abiertos o, incluso, abierto por un extremo y cerrado por el otro. Todavía podemos manejar estos problemas, si aplicamos correctamente la teoría desarrollada en esta sección. Tenga presente que máximo (mínimo) sin un adjetivo calificativo significa máximo (mínimo) global.



EJEMPLO 6 Determine (si existen) los valores máximo y mínimo de $f(x) = x^4 - 4x$ en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1) = 4(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Como $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene soluciones reales (fórmula cuadrática), sólo existe un punto crítico, $x = 1$. Para $x < 1$, $f'(x) < 0$, mientras que para $x > 1$, $f'(x) > 0$. Concluimos que $f(1) = -3$ es un valor mínimo local de f; y como f es decreciente a la izquierda de 1 y decreciente a la derecha de 1, en realidad debe ser el valor mínimo de f.

Los hechos que se acaban de establecer implican que f no puede tener un valor máximo. La gráfica de f se muestra en la figura 8. ■

Figura 8

EJEMPLO 7 Determine (si existen) los valores máximo y mínimo de

$$G(p) = \frac{1}{p(1 - p)}$$

en (0, 1).

SOLUCIÓN

$$G'(p) = \frac{d}{dp}[p(1 - p)]^{-1} = \frac{2p - 1}{p^2(1 - p)^2}$$

El único punto crítico es $p = 1/2$. Para cada valor de p en el intervalo (0, 1) el denominador es positivo; por lo tanto, el numerador determina el signo. Si p está en el intervalo (0, 1/2), entonces el numerador es negativo; de aquí que $G'(p) < 0$. De forma análoga, si p está en el intervalo (1/2, 1), $G'(p) > 0$. Por lo tanto, con base en la prueba de la primera derivada, $G(1/2) = 4$ es un mínimo local. Como no hay puntos fronterizos o puntos singulares por verificar, $G(1/2)$ es un mínimo global. No hay máximo. La gráfica de $y = G(p)$ se muestra en la figura 9. ■

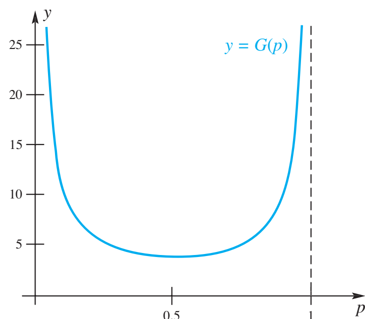


Figura 9

Revisión de conceptos

1. Si f es continua en c, $f'(x) > 0$ cerca de c a su lado izquierdo, y $f'(x) < 0$ cerca de c a su lado derecho, entonces $f(c)$ es un valor ________ local para f.

2. Si $f'(x) = (x + 2)(x - 1)$, entonces $f(-2)$ es un valor ________ local para f, y $f(1)$ es un valor ________ local para f.

3. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, esperamos encontrar un valor ________ local para f en c.

4. Si $f(x) = x^3$, entonces $f(0)$ no es ________ ni ________, aunque $f''(0) =$ ________.

Conjunto de problemas 3.3

En los problemas del 1 al 10 identifique los puntos críticos. Después utilice (a) la prueba de la primera derivada y (si es posible) (b) la prueba de la segunda derivada para decidir cuáles de los puntos críticos dan un máximo local y cuáles dan un mínimo local.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$

2. $f(x) = x^3 - 12x + \pi$

3. $f(\theta) = \operatorname{sen} 2\theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$

4. $f(x) = \frac{1}{2}x + \operatorname{sen} x, 0 < x < 2\pi$

5. $\Psi(\theta) = \operatorname{sen}^2 \theta, -\pi/2 < \theta < \pi/2$

6. $r(z) = z^4 + 4$

7. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

8. $g(z) = \dfrac{z^2}{1 + z^2}$

9. $h(y) = y^2 - \dfrac{1}{y}$

10. $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x^2 + 1}$

En los problemas del 11 al 20 encuentre los puntos críticos y utilice la prueba que elija para decidir cuáles puntos críticos dan un valor máximo local y cuáles dan un valor mínimo local. ¿Cuáles son estos valores máximos y mínimos locales?

11. $f(x) = x^3 - 3x$

12. $g(x) = x^4 + x^2 + 3$

13. $H(x) = x^4 - 2x^3$

14. $f(x) = (x - 2)^5$

15. $g(t) = \pi - (t - 2)^{2/3}$

16. $r(s) = 3s + s^{2/5}$

17. $f(t) = t - \dfrac{1}{t}, t \neq 0$

18. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4}}$

19. $\Lambda(\theta) = \dfrac{\cos \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta}, 0 < \theta < 2\pi$

20. $g(\theta) = |\operatorname{sen} \theta|, 0 < \theta < 2\pi$

En los problemas del 21 al 30 determine, si es posible, los valores máximo y mínimo (globales) de la función dada en el intervalo que se indica.

21. $f(x) = \operatorname{sen}^2 2x$ en $[0, 2]$

22. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$ en $[0, \infty)$

23. $g(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 32}$ en $[0, \infty)$

24. $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ en $[0, \infty)$

25. $F(x) = 6\sqrt{x} - 4x$ en $[0, 4]$

26. $F(x) = 6\sqrt{x} - 4x$ en $[0, \infty)$

27. $f(x) = \dfrac{64}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{27}{\cos x}$ en $(0, \pi/2)$

28. $g(x) = x^2 + \dfrac{16x^2}{(8 - x)^2}$ en $(8, \infty)$

29. $H(x) = |x^2 - 1|$ en $[-2, 2]$

30. $h(t) = \operatorname{sen} t^2$ en $[0, \pi]$

En los problemas del 31 al 36 se da la primera derivada, f'. Encuentre todos los valores de x que hacen que la función f (a) tenga un mínimo local y (b) un máximo local.

31. $f'(x) = x^3(1 - x)^2$

32. $f'(x) = -(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$

33. $f'(x) = (x - 1)^2(x - 2)^2(x - 3)(x - 4)$

34. $f'(x) = (x - 1)^2(x - 2)^2(x - 3)^2(x - 4)^2$

35. $f'(x) = (x - A)^2(x - B)^2, A \neq B$

36. $f'(x) = x(x - A)(x - B), 0 < A < B$

En los problemas del 37 al 42 bosqueje una gráfica de una función con las propiedades dadas. Si es imposible graficar tal función, entonces indique esto y justifique su respuesta.

37. f es diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$ y dos máximos locales y dos mínimos locales en $(0, 6)$.

38. f es diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, así como tres máximos locales y dos mínimos locales en $(0, 6)$.

39. f es continua, pero no es necesariamente diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$ y un mínimo local y un máximo local en $(0, 6)$.

40. f es continua, pero no es necesariamente diferenciable, tiene dominio $[0, 6]$, así como un mínimo local, y no tiene máximo local en $(0, 6)$.

41. f tiene dominio $[0, 6]$, pero no es necesariamente continua; tiene tres máximos locales y carece de mínimo local en $(0, 6)$.

42. f tiene dominio $[0, 6]$, pero no es necesariamente continua; tiene dos máximos locales y no tiene mínimo local en $(0, 6)$.

43. Considere $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, con $A > 0$. Demuestre que $f(x) \geq 0$ para toda x si y sólo si $B^2 - 4AC \leq 0$.

44. Considere $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, con $A > 0$. Demuestre que f tiene un máximo local y un mínimo local si y sólo si $B^2 - 3AC > 0$.

45. ¿Qué conclusiones puede sacar respecto a f, con base en la información de que $f'(c) = f''(c) = 0$ y $f'''(c) > 0$?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** máximo **2.** máximo; mínimo **3.** máximo **4.** máximo local; mínimo local; 0.

3.4 Problemas prácticos

Con base en los ejemplos y la teoría desarrollada en las primeras tres secciones de este capítulo, sugerimos el siguiente método paso a paso que puede aplicarse a muchos problemas prácticos de optimización. No lo siga ciegamente; con frecuencia, el sentido común sugiere un enfoque alterno o la omisión de algunos pasos.

Paso 1: Haga un dibujo del problema y asigne variables idóneas para las cantidades importantes.

Paso 2: Escriba una fórmula para la función objetivo Q que se maximizará o minimizará, en términos de las variables del paso 1.

Paso 3: Utilice las condiciones del problema para eliminar todas, excepto una de estas variables, y por consiguiente expresar a Q como una función de una sola variable.

Paso 4: Encuentre los puntos críticos (fronterizos, estacionarios, singulares).

Paso 5: Sustituya los valores críticos en la función objetivo o bien utilice la teoría de la última sección (es decir, los criterios de la primera o segunda derivada) para determinar el máximo o el mínimo.

Use siempre su intuición para obtener alguna idea de cuál debe ser la solución del problema. Para muchos problemas físicos puede tener una estimación aproximada del valor óptimo antes de que comience a realizar los detalles.

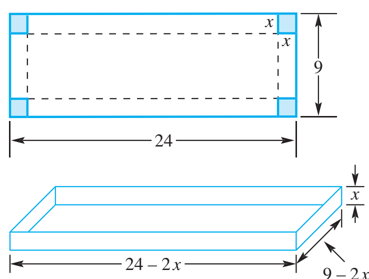


Figura 1

EJEMPLO 1 Una caja rectangular se fabrica con una pieza de cartón de 24 pulgadas de largo por 9 de ancho, de la cual se cortan cuadrados idénticos a partir de las cuatro esquinas y se doblan los lados hacia arriba, como se muestra en la figura 1. Determine las dimensiones de la caja de volumen máximo. ¿Cuál es este volumen?

SOLUCIÓN Sea x el ancho del cuadrado que se cortará y V el volumen de la caja resultante. Entonces

$$V = x(9 - 2x)(24 - 2x) = 216x - 66x^2 + 4x^3$$

Ahora, x no puede ser menor que 0 ni mayor que 4.5. Por lo tanto, nuestro problema es maximizar V en $[0, 4.5]$. Los puntos estacionarios se determinan haciendo dV/dx igual a 0 y resolviendo la ecuación resultante:

$$\frac{dV}{dx} = 216 - 132x + 12x^2 = 12(18 - 11x + x^2) = 12(9 - x)(2 - x) = 0$$

Esto da $x = 2$ o $x = 9$, pero 9 no está en el intervalo $[0, 4.5]$. Vemos que sólo existen tres puntos críticos, 0, 2 y 4.5. En los puntos fronterizos 0 y 4.5, $V = 0$; en 2, $V = 200$. Concluimos que la caja tiene un volumen máximo de 200 pulgadas cúbicas, si $x = 2$, esto es, si la caja es de 20 pulgadas de largo, 5 de ancho y 2 de profundidad. ■

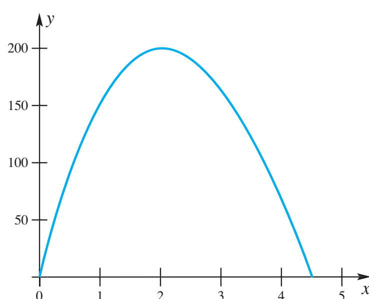


Figura 2

A menudo es útil graficar la función objetivo. Dibujar funciones puede hacerse con facilidad con una calculadora gráfica o un CAS (del inglés computer algebra system: sistema de álgebra computacional). La figura 2 muestra una gráfica de la función $V(x) = 216x - 66x^2 + 4x^3$. Cuando $x = 0$, $V(x)$ es igual a cero. En el contexto de los dobleces de la caja, esto significa que cuando el ancho de las esquinas recortadas es cero no hay que doblar hacia arriba, de modo que el volumen es cero. También, cuando $x = 4.5$, el pedazo de cartón se dobla a la mitad, de modo que no tiene base; esta caja también tendrá volumen cero. Por lo tanto, $V(0) = 0$ y $V(4.5) = 0$. El mayor volumen debe alcanzarse para algún valor de x entre 0 y 4.5. La gráfica sugiere que el volumen máximo es cuando x es alrededor de 2; por medio de cálculo, podemos determinar que el valor *exacto* de x que maximiza el volumen de la caja es $x = 2$.

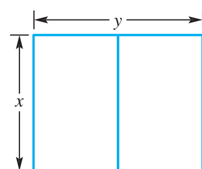


Figura 3

EJEMPLO 2 Un granjero tiene 100 metros de cerca de alambre con la cual planea construir dos corrales adyacentes, como se muestra en la figura 3. ¿Cuáles son las dimensiones que encierran el área máxima?

SOLUCIÓN Sea x el ancho y y el largo del área total encerrada, ambas en metros. Como hay 100 metros de cerca, $3x + 2y = 100$; es decir,

$$y = 50 - \tfrac{3}{2}x$$

El área total A está dada por

$$A = xy = 50x - \tfrac{3}{2}x^2$$

Como debe haber tres lados de longitud x, vemos que $0 \le x \le \frac{100}{3}$. Así, nuestro problema es maximizar A en $\left[0, \frac{100}{3}\right]$. Ahora

$$\frac{dA}{dx} = 50 - 3x$$

Cuando igualamos $50 - 3x$ a cero y resolvemos, obtenemos $x = \frac{50}{3}$ como un punto estacionario. Así, existen tres puntos críticos: $0, \frac{50}{3}$, y $\frac{100}{3}$. Los dos puntos fronterizos 0 y $\frac{100}{3}$ dan $A = 0$, mientras que $x = \frac{50}{3}$ da $A \approx 416.67$. Las dimensiones deseadas son $x = \frac{50}{3} \approx 16.67$ metros y $y = 50 - \frac{3}{2}\left(\frac{50}{3}\right) = 25$ metros.

≈ ¿Es razonable esta respuesta? Sí. Esperaríamos utilizar más de la cerca dada en la dirección y que en la dirección x, ya que en la primera se está cercando dos veces, mientras que en la segunda está cercándose tres. ■

EJEMPLO 3 Encuentre las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto dado.

SOLUCIÓN Sea a la altura y b el radio de la base del cono dado (ambas constantes). Denótese por h, r y V la altura, el radio y el volumen, respectivamente, de un cilindro inscrito (véase la figura 4).

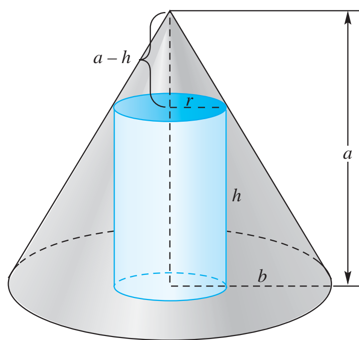


Figura 4

≈ Antes de proceder, apliquemos un poco de intuición. Si el radio del cilindro fuese cercano al radio de la base del cono, entonces el volumen del cilindro sería cercano a cero. Ahora, imagine cilindros inscritos cuya altura aumenta, pero su radio disminuye. Al principio, los volúmenes aumentarían a partir de cero, pero después disminuirían hacia cero cuando la altura de los cilindros fuese cercana a la altura del cono. De manera intuitiva, el volumen debe ser máximo para algún cilindro. Puesto que en la fórmula del volumen el radio se eleva al cuadrado, cuenta más que la altura y esperaríamos $r > h$ en el máximo.

El volumen del cilindro inscrito es

$$V = \pi r^2 h$$

Por semejanza de triángulos

$$\frac{a-h}{r} = \frac{a}{b}$$

que da

$$h = a - \frac{a}{b}r$$

Cuando sustituimos esta expresión para h en la fórmula para V, obtenemos

$$V = \pi r^2\left(a - \frac{a}{b}r\right) = \pi a r^2 - \pi\frac{a}{b}r^3$$

Queremos maximizar V para r en el intervalo $[0, b]$. Ahora,

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi a r - 3\pi\frac{a}{b}r^2 = \pi a r\left(2 - \frac{3}{b}r\right)$$

Esto produce los puntos estacionarios $r = 0$ y $r = 2b/3$, dándonos a considerar tres puntos críticos en $[0, b]$: $0, 2b/3$ y b. Como se esperaba, $r = 0$ y $r = b$ dan un volumen de cero. Así, $r = 2b/3$ tiene que dar el volumen máximo. Cuando sustituimos este valor para

Álgebra y geometría

Siempre que le sea posible, trate de ver el problema desde los dos puntos de vista, geométrico y algebraico. El ejemplo 3 es un buen ejemplo mediante el cual esta clase de enfoque se presta para tener una idea del problema.

r en la ecuación que relaciona r con h, encontramos que $h = a/3$. En otras palabras, el cilindro inscrito que tiene mayor volumen es cuando su radio es dos tercios del radio de la base del cono y su altura es un tercio de la altura del cono. ■

EJEMPLO 4 Suponga que un pez nada río arriba con velocidad relativa al agua v y que la corriente del río tiene velocidad $-v_c$ (el signo negativo indica que la velocidad de la corriente es en dirección opuesta a la del pez). La energía empleada en recorrer una distancia d a contracorriente es directamente proporcional al tiempo requerido para recorrer la distancia d y el cubo de la velocidad. ¿Qué velocidad v minimiza la energía empleada en nadar esta distancia?

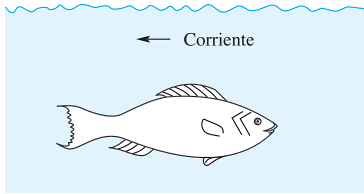


Figura 5

SOLUCIÓN La figura 5 ilustra la situación. Como la velocidad del pez a contracorriente es $v - v_c$, tenemos $d = (v - v_c)t$, donde t es el tiempo requerido. Así, $t = d/(v - v_c)$. Por lo tanto, para un valor fijo de v, la energía requerida para que el pez recorra la distancia d es

$$E(v) = k\frac{d}{v - v_c}v^3 = kd\frac{v^3}{v - v_c}$$

El dominio para la función E es el intervalo abierto (v_c, ∞). Para determinar el valor de v que minimiza la energía requerida hacemos $E'(v) = 0$ y despejamos a v:

$$E'(v) = kd\frac{(v - v_c)3v^2 - v^3(1)}{(v - v_c)^2} = \frac{kd}{(v - v_c)^2}v^2(2v - 3v_c) = 0$$

El único punto crítico en el intervalo (v_c, ∞) se determina resolviendo $2v - 3v_c = 0$, que lleva a $v = \frac{3}{2}v_c$. El intervalo es abierto, por lo que no existen puntos fronterizos que verificar. El signo de $E'(v)$ depende por completo de la expresión $2v - 3v_c$, ya que las otras expresiones son positivas. Si $v < \frac{3}{2}v_c$, entonces $2v - 3v_c < 0$, por lo que E es decreciente a la izquierda de $\frac{3}{2}v_c$. Si $v > \frac{3}{2}v_c$, entonces $2v - 3v_c > 0$, por lo que E es creciente a la derecha de $\frac{3}{2}v_c$. Por lo tanto, con base en la prueba de la primera derivada, $v = \frac{3}{2}v_c$ produce un mínimo local. Ya que éste es el único punto crítico en el intervalo (v_c, ∞), esto debe dar un mínimo global. Por lo tanto, la velocidad que minimiza la energía empleada es una y media veces la rapidez de la corriente. ■

EJEMPLO 5 Un pasillo de 6 pies de ancho da vuelta en ángulo recto. ¿Cuál es la longitud de la varilla delgada más larga que puede transportarse alrededor de la esquina, suponiendo que la varilla no puede doblarse?

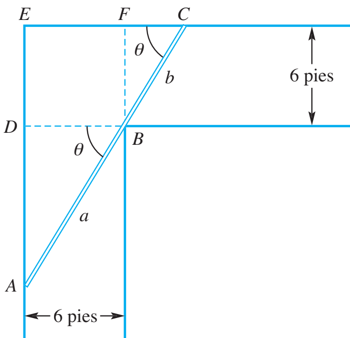


Figura 6

SOLUCIÓN La varilla tocará apenas la esquina interna de la vuelta y las paredes exteriores del pasillo. Como se sugiere en la figura 6, sean a y b las longitudes de los segmentos AB y BC, y sea θ la medida de los ángulos $\angle DBA$ y $\angle FCB$. Considere los dos triángulos rectángulos semejantes $\triangle ADB$ y $\triangle BFC$; éstos tienen hipotenusas a y b, respectivamente. Un poco de trigonometría aplicada a estos ángulos da

$$a = \frac{6}{\cos\theta} = 6\sec\theta \qquad \text{y} \qquad b = \frac{6}{\operatorname{sen}\theta} = 6\csc\theta$$

Observe que el ángulo θ determina la posición de la varilla. Así que la longitud total de la varilla en la figura 6 es

$$L(\theta) = a + b = 6\sec\theta + 6\csc\theta$$

El dominio para θ es el intervalo abierto $(0, \pi/2)$. La derivada de L es

$$\begin{aligned} L'(\theta) &= 6 \sec \theta \tan \theta - 6 \csc \theta \cot \theta \\ &= 6\left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta}\right) \\ &= 6\,\frac{\operatorname{sen}^3 \theta - \cos^3 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

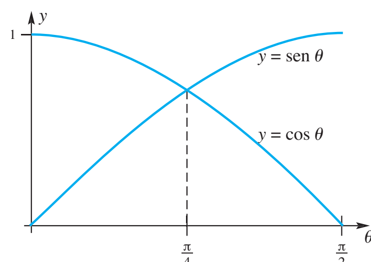


Figura 7

Por lo tanto $L'(\theta) = 0$ siempre que $\operatorname{sen}^3 \theta - \cos^3 \theta = 0$. Esto lleva a $\operatorname{sen} \theta = \cos \theta$. El único ángulo en $(0, \pi/2)$ para el que $\operatorname{sen} \theta = \cos \theta$ es el ángulo $\pi/4$ (véase la figura 7). Nuevamente aplicamos la prueba de la primera derivada. Si $0 < \theta < \pi/4$, entonces $\operatorname{sen} \theta < \cos \theta$ (otra vez véase la figura 7), de modo que $\operatorname{sen}^3 \theta - \cos^3 \theta < 0$. Por lo tanto, $L(\theta)$ es decreciente en $(0, \pi/4)$. Si $\pi/4 < \theta < \pi/2$, entonces $\operatorname{sen} \theta > \cos \theta$, por lo que $\operatorname{sen}^3 \theta - \cos^3 \theta > 0$. Así, $L(\theta)$ es creciente en $(\pi/4, \pi/2)$. Con base en el criterio de la prueba de la primera derivada, $\theta = \pi/4$ produce un mínimo. No obstante, el problema pregunta por la varilla *más larga* que puede dar la vuelta alrededor de la esquina. Como lo indica la figura 8, en realidad determinamos la varilla *más corta* que satisface las condiciones de la figura 6; en otras palabras, determinamos la varilla más corta que no da vuelta alrededor de la esquina. Por lo tanto, la varilla más larga que puede dar la vuelta alrededor de la esquina es $L(\pi/4) = 6 \sec \pi/4 + 6 \csc \pi/4 = 12\sqrt{2} \approx 16.97$ pies. ■

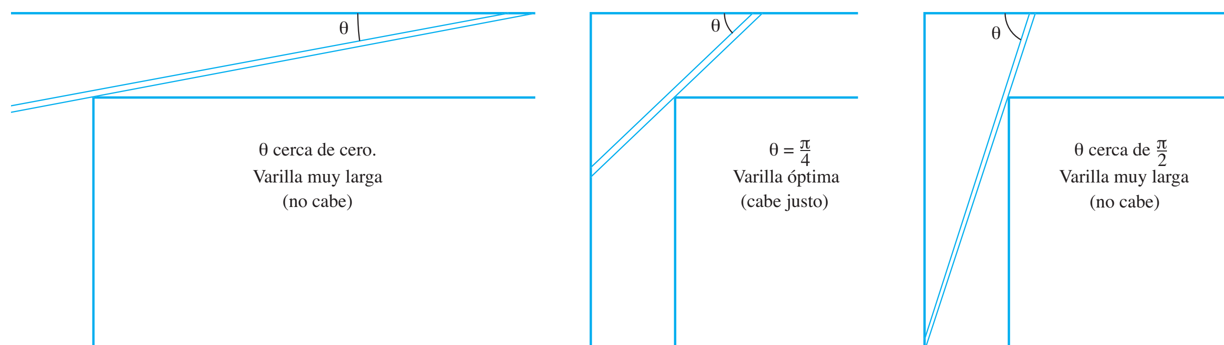


Figura 8

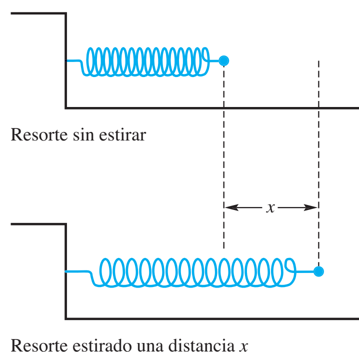


Figura 9

Distancia alargada, x (metros)	Fuerza y ejercida por el resorte (newtons)
0.005	8
0.010	17
0.015	22
0.020	32
0.025	36

Figura 10

Mínimos cuadrados (opcional) Existen varios fenómenos físicos, económicos, y sociales en los que una variable es proporcional a otra. Por ejemplo, la segunda Ley de Newton establece que la fuerza F sobre un objeto de masa m es proporcional a su aceleración a ($F = ma$). La Ley de Hooke dice que la fuerza que se ejerce sobre un resorte es proporcional a la distancia que éste se alarga ($F = kx$). (La Ley de Hooke a veces se da como $F = -kx$, con el signo menos indicando que la fuerza está en la dirección contraria al alargamiento. Por ahora, ignoraremos el signo de la fuerza). Los costos de fabricación son proporcionales al número de unidades producidas. El número de accidentes automovilísticos es proporcional al volumen del tránsito. Éstos son *modelos* y en un experimento, en rara ocasión, encontramos que los datos observados se ajustan al modelo de manera exacta.

Suponga que observamos la fuerza ejercida por un resorte cuando se alarga x centímetros (véase la figura 9). Por ejemplo, cuando alargamos el resorte 0.5 centímetros (0.005 metros), observamos una fuerza de 8 newtons, cuando lo alargamos 1.0 centímetro, observamos una fuerza de 17 newtons, y así sucesivamente. La figura 10 muestra observaciones adicionales y la figura 11 muestra una gráfica de los pares ordenados (x_i, y_i), donde x_i es la distancia que se estira y y_i es la fuerza que se ejerce sobre el resorte. Una gráfica como ésta, de los pares ordenados, se denomina **gráfica de dispersión o diagrama de dispersión**.

Generalizamos el problema en uno donde se nos dan n puntos, (x_1, y_1), (x_2, y_2),..., (x_n, y_n). Nuestro objetivo es encontrar una recta que pase por el origen y que se *ajuste mejor* a estos puntos. Antes de continuar, debemos introducir la notación sigma (Σ).

El símbolo $\sum_{i=1}^{n} a_i$ representa la suma de los números $a_1, a_2,..., a_n$. Por ejemplo,

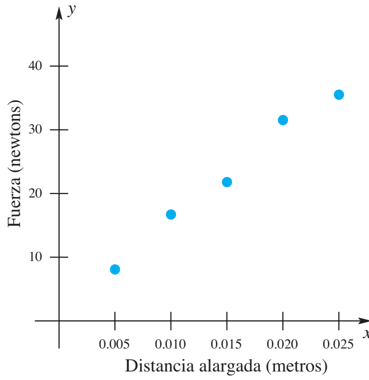


Figura 11

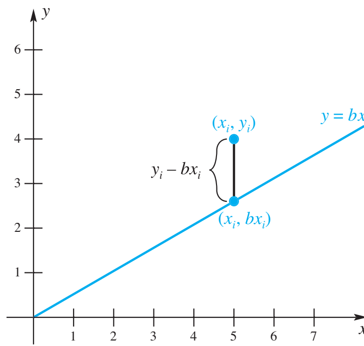


Figura 12

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

En el segundo caso, primero multiplicamos x_i y y_i y después sumamos.

Para encontrar la recta que se ajuste mejor a estos puntos, debemos especificar cómo mediremos el ajuste. Nuestra recta que *mejor se ajusta*, y que pasa por el origen, se define como aquella que minimiza la suma del cuadrado de las distancias verticales entre (x_i, y_i) y la recta $y = bx$. Si (x_i, y_i) es un punto del conjunto de datos, entonces (x_i, bx_i) es el punto sobre la recta $y = bx$ que se encuentra directamente arriba o abajo de (x_i, y_i). Por lo tanto, la distancia vertical entre (x_i, y_i) y (x_i, bx_i) es $y_i - bx_i$. (Véase la figura 12). Así, la distancia al cuadrado es $(y_i - bx_i)^2$. El problema es encontrar el valor de b que minimiza la suma de los cuadrados de estas diferencias. Si definimos

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - bx_i)^2$$

entonces debemos encontrar el valor de b que *minimiza* S. Éste es un problema de minimización, como los que se encontraron antes. Sin embargo, tenga en mente que las parejas ordenadas (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ están *fijos*; en este problema la variable es b.

Procedemos como antes a encontrar dS/db, igualando el resultado a cero y resolviendo para b. Como la derivada es un operador lineal, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dS}{db} &= \frac{d}{db}\sum_{i=1}^{n} (y_i - bx_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{db}(y_i - bx_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - bx_i)\left(\frac{d}{db}(y_i - bx_i)\right) \\ &= -2\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - bx_i) \end{aligned}$$

Al igualar este resultado a cero y al resolver se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= -2\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - bx_i) \\ 0 &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ b &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \end{aligned}$$

Para ver que esto da un valor mínimo para S observamos que

$$\frac{d^2S}{db^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

que siempre es positiva. No hay puntos fronterizos que verificar. Así, por el criterio de la segunda derivada, concluimos que la recta $y = bx$, con $b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_1^2$, es la recta que mejor ajusta, en el sentido de minimizar S. La recta $y = bx$ se denomina **recta de mínimos cuadrados que pasa por el origen**.

EJEMPLO 6 Encuentre la recta de mínimos cuadrados que pasa por el origen para los datos del resorte en la figura 10.

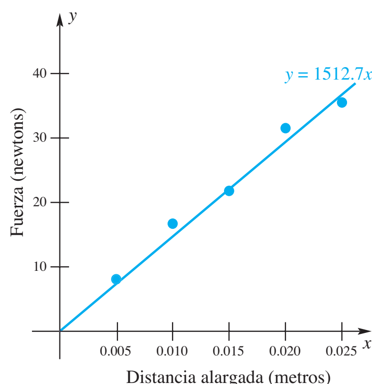


Figura 13

SOLUCIÓN

$$b = \frac{0.005 \cdot 8 + 0.010 \cdot 17 + 0.015 \cdot 22 + 0.020 \cdot 32 + 0.025 \cdot 36}{0.005^2 + 0.010^2 + 0.015^2 + 0.020^2 + 0.025^2}$$

$$\approx 1512.7$$

Por lo tanto, la recta de mínimos cuadrados que pasa por el origen es $y = 1512.7x$ y se muestra en la figura 13. Por consiguiente, la estimación de la constante del resorte es $k = 1512.7$ ■

Para la mayor parte de los problemas de ajuste de rectas, no es razonable suponer que la recta pase por el origen. Una suposición más razonable es que y esté relacionada con x por medio de $y = a + bx$. Sin embargo, en este caso la suma de cuadrados es una función de a y b, por lo que nos enfrentamos con el problema de minimizar una función de dos variables.

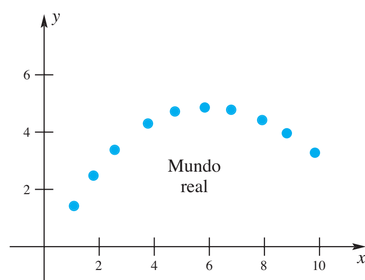


Figura 14

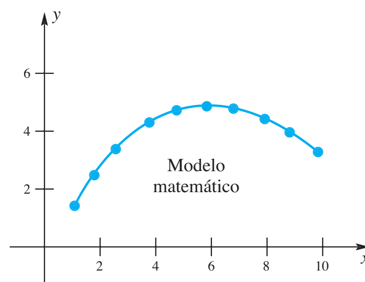


Figura 15

Aplicaciones a la economía (opcional) Considere una empresa común, la compañía ABC. Por simplicidad, suponga que ABC produce y comercia un solo producto; podrían ser aparatos de televisión, baterías para automóviles o barras de jabón. Si vende x unidades del producto en un periodo fijo (por ejemplo, un año), podría cobrar un **precio**, $p(x)$, por cada unidad. En otras palabras, $p(x)$ es el precio requerido para atraer una demanda de x unidades. El **ingreso total** que ABC puede esperar está dado por $R(x) = xp(x)$, el número de unidades por el precio unitario.

Para producir y vender x unidades, ABC tendrá un costo total, $C(x)$. Por lo regular, es la suma de un **costo fijo** (material de oficina, impuestos a la propiedad, etcétera) más un **costo variable** que depende del número de unidades producidas.

El concepto clave para la compañía es la **utilidad (ganancia) total**, $P(x)$. Sólo es la diferencia entre el ingreso y el costo; es decir,

$$P(x) = R(x) - C(x) = xp(x) - C(x)$$

Ordinariamente, una compañía busca maximizar su ganancia total.

Existe una característica que tiende a distinguir los problemas en economía de los correspondientes a las ciencias físicas. En la mayoría de los casos, los productos de ABC serán unidades discretas (usted no puede fabricar o vender 8.23 aparatos de televisión o π baterías para automóvil). Así, por lo general las funciones $R(x)$, $C(x)$ y $P(x)$ sólo están definidas para $x = 0, 1, 2, \ldots$ y, en consecuencia, sus gráficas consisten en puntos discretos (véase la figura 14). Para hacer que las herramientas de cálculo estén disponibles, conectamos estos puntos por medio de una curva suave (véase la figura 15), con lo cual pretendemos que R, C y P sean funciones derivables. Esto ilustra un aspecto de *la modelación matemática* que casi siempre es necesario, en especial en economía. Para modelar problemas del mundo real, debemos hacer suposiciones que lo simplifiquen. Esto significa que las respuestas que obtengamos son sólo aproximaciones de las respuestas que buscamos; ésta es una de las razones por las que la economía es algo menos que una ciencia perfecta. Un conocido estadístico una vez dijo: *ningún modelo es exacto, pero muchos son útiles*.

Un problema relacionado para un economista es cómo obtener fórmulas para las funciones $C(x)$ y $p(x)$. En un caso sencillo, $C(x)$ podría tener la forma

$$C(x) = 10{,}000 + 50x$$

Si es así, \$10,000 es el **costo fijo** y \$50x es el **costo variable**, sobre la base de que hay un costo directo de \$50 por cada unidad producida. Tal vez una situación más común sea

$$C_1(x) = 10{,}000 + 45x + 100\sqrt{x}$$

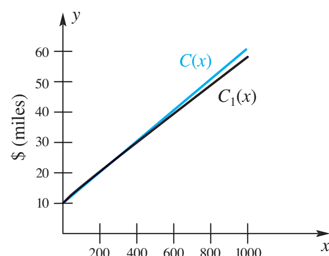


Figura 16

Ambas funciones de costo se muestran en la figura 16.

La función de costo $C(x)$ indica que el costo de fabricación de una unidad adicional es el mismo, sin importar cuántas unidades se hayan fabricado. Por otra parte, la función de costo $C_1(x)$ indica que el costo de fabricación de unidades adicionales aumenta, pero a una tasa decreciente. Por lo tanto, $c_1(x)$ permite lo que los economistas denominan economías de escala.

La selección de funciones adecuadas para modelar costo y precio no es una tarea sencilla. A veces, pueden inferirse de las hipótesis básicas. En otros casos, un estudio

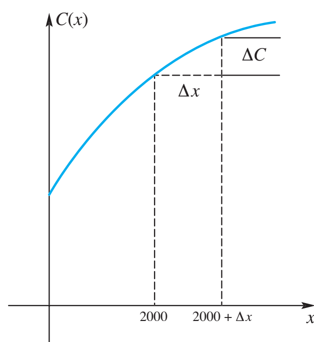


Figura 17

cuidadoso de la historia de la compañía sugerirá opciones razonables. Algunas veces, simplemente debemos hacer conjeturas inteligentes.

Uso de la palabra marginal Suponga que la empresa ABC conoce su función de costo $C(x)$ y que tiene planeado, tentativamente, producir 2000 unidades este año. Nos gustaría determinar el costo adicional por unidad, si ABC aumenta un poco su producción. Por ejemplo, ¿sería menor que el ingreso adicional por unidad? Si es así, tendría un buen sentido económico aumentar la producción.

Si la función de costo es la que se muestra en la figura 17, nos estaríamos preguntando por el valor de $\Delta C/\Delta x$ cuando $\Delta x = 1$. Pero esperamos que esto estará muy cerca del valor de

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

cuando $x = 2000$. Este límite se denomina **costo marginal**. Los matemáticos reconocemos esto como dC/dx, la derivada de C con respecto a x.

De una manera similar, definimos **precio marginal** como dp/dx, **ingreso marginal** como dR/dx y **utilidad marginal** como dP/dx.

Ahora ilustramos cómo resolver una amplia variedad de problemas económicos.

Vocabulario de economía

Ya que la economía tiende a ser un estudio de fenómenos discretos, su profesor de economía puede definir el costo marginal en x como el costo de producir una unidad adicional; esto es, como

$$C(x + 1) - C(x)$$

En el modelo matemático, este número será muy cercano en valor a dC/dx, y puesto que el último es un concepto principal en cálculo, elegimos tomarlo como la definición de costo marginal. Se tienen enunciados similares para ingreso marginal y utilidad marginal.

EJEMPLO 7 Suponga que $C(x) = 8300 + 3.25x + 40\sqrt[3]{x}$ dólares. Encuentre el costo promedio por unidad y el costo marginal; después evalúelos cuando $x = 1000$.

SOLUCIÓN

$$\text{Costo promedio: } \frac{C(x)}{x} = \frac{8300 + 3.25x + 40x^{1/3}}{x}$$

$$\text{Utilidad marginal: } \frac{dC}{dx} = 3.25 + \frac{40}{3}x^{-2/3}$$

En $x = 1000$, éstos tiene los valores 11.95 y 3.38, respectivamente. Esto significa que producir las primeras 1000 unidades cuesta \$11.95 cada una, en promedio; producir un ejemplar adicional, después de 1000, sólo cuesta alrededor de \$3.38. ■

EJEMPLO 8 En la fabricación y venta de x unidades de cierto bien de consumo, las funciones de precio p y de costo C (en dólares) están dadas por

$$p(x) = 5.00 - 0.002x$$

$$C(x) = 3.00 + 1.10x$$

Encuentre las expresiones para el ingreso, el costo y la utilidad marginales. Determine el nivel de producción que producirá la máxima utilidad total.

SOLUCIÓN

$$R(x) = xp(x) = 5.00x - 0.002x^2$$

$$P(x) = R(x) - C(x) = -3.00 + 3.90x - 0.002x^2$$

Así, tenemos las derivadas siguientes:

$$\text{Ingreso marginal: } \frac{dR}{dx} = 5 - 0.004x$$

$$\text{Costo marginal: } \frac{dC}{dx} = 1.1$$

$$\text{Utilidad marginal: } \frac{dP}{dx} = \frac{dR}{dx} - \frac{dC}{dx} = 3.9 - 0.004x$$

Para maximizar la utilidad hacemos $dP/dx = 0$ y resolvemos. Esto da $x = 975$ como el único punto crítico a considerar. Éste proporciona un máximo, como puede verificarse por medio del criterio de la primera derivada. La utilidad máxima es $P(975) = \$1898.25$. ■

Observe que en $x = 975$ tanto el ingreso como el costo marginales son \$1.10. En general, una compañía debe esperar el nivel de utilidad máxima cuando el costo de producir una unidad adicional es igual al ingreso proveniente de esa unidad.

Revisión de conceptos

1. Si un rectángulo de área 100 tiene largo x y ancho y, entonces los valores admisibles para x son ______.

2. El perímetro P del rectángulo de la pregunta 1 expresado en términos (sólo) de x está dado por $P =$ ______.

3. La recta de mínimos cuadrados que pasa por el origen minimiza $S = \sum_{i=1}^{n} (_____)^2$

4. En economía, $\frac{dR}{dx}$ se denomina ______ y $\frac{dC}{dx}$ se denomina ______.

Conjunto de problemas 3.4

1. Encuentre dos números cuyo producto sea -16 y cuya suma de sus cuadrados sea mínima.

2. ¿Para qué número la raíz cuadrada principal excede en la mayor cantidad posible a ocho veces el número?

3. ¿Para qué número la raíz cuarta principal excede en la mayor cantidad posible al doble del número?

4. Encuentre dos números cuyo producto sea -12 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

5. Encuentre los puntos sobre la parábola $y = x^2$ que estén más cerca al punto $(0, 5)$. *Sugerencia:* minimice el cuadrado de la distancia entre (x, y) y $(0, 5)$.

6. Encuentre los puntos sobre la parábola $x = 2y^2$ que estén más cerca al punto $(10, 0)$. *Sugerencia:* minimice el cuadrado de la distancia entre (x, y) y $(10, 0)$.

7. ¿Qué número excede a su cuadrado en la mayor cantidad? Comience por convencerse de que este número está en el intervalo $[0, 1]$.

8. Muestre que para un rectángulo de perímetro dado K, aquel de área máxima es un cuadrado.

9. Determine el volumen de la mayor caja abierta que pueda fabricarse con una pieza de cartón de 24 pulgadas cuadradas, recortando cuadrados iguales a partir de las esquinas y doblando hacia arriba los lados (véase el ejemplo 1).

≈ **10.** Un granjero tiene 80 pies de malla de alambre con la cual planea encerrar un corral rectangular a un lado de su establo de 100 pies de largo, como se muestra en la figura 18 (el lado a lo largo del establo no necesita valla). ¿Cuáles son las dimensiones del corral que tiene área máxima?

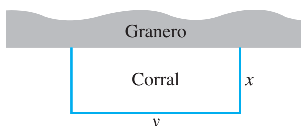


Figura 18

≈ **11.** El granjero del problema 10 decide hacer tres corrales idénticos con sus 80 pies de malla de alambre, como se muestra en la figura 19. ¿Qué dimensiones del área total encerrada hacen el área de los corrales tan grande como sea posible?

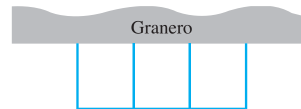


Figura 19

12. Suponga que el granjero del problema 10 tiene 180 pies de cerca de alambre y quiere que el corral quede contiguo a todo el lado del establo de 100 pies, como se muestra en la figura 20. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para tener área máxima? Observe que en este caso $0 \le x \le 40$.

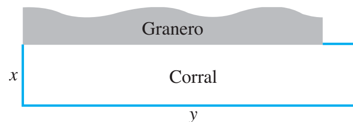


Figura 20

13. Un granjero desea cercar dos corrales rectangulares idénticos, cada uno con un área de 900 pies cuadrados, como se muestra en la figura 21. ¿Cuáles son los valores de x y y, de modo que se requiera la menor cantidad de valla?

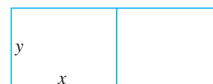


Figura 21



Figura 22

14. Un granjero desea cercar tres corrales rectangulares adyacentes idénticos (véase la figura 22), cada uno con un área de 300 pies cuadrados. ¿Cuáles deben ser el ancho y el largo de cada corral, de modo que se ocupe la menor cantidad de valla?

15. En el problema 14, suponga que la cerca exterior de los corrales requiere una valla más firme que cuesta \$3 por pie, pero que

las dos particiones internas necesitan una cerca que cuesta sólo $2 por pie. ¿Qué dimensiones de x y y producirán el costo más económico para los corrales?

16. Resuelva el problema 14, suponiendo que el área de cada corral es de 900 pies cuadrados. Estudie la solución de éste y del problema 14; además, haga una conjetura acerca de la razón x/y en todos los problemas de este tipo. Demuestre su conjetura.

17. Determine los puntos P y Q en la curva $y = x^2/4, 0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$, que están más cerca y más lejos del punto (0, 4). *Sugerencia:* el álgebra es más sencilla si considera el cuadrado de la distancia requerida en lugar de la distancia misma.

18. Un cono circular recto será inscrito en otro cono circular recto de volumen dado, con los mismos ejes y con el vértice del cono interior tocando la base del cono exterior. ¿Cuál debe ser la razón entre sus alturas para que el cono inscrito tenga volumen máximo?

≈ **19.** Una pequeña isla está a 2 millas del punto más cercano, P, de una playa rectilínea de un gran lago. Si una mujer en la isla puede remar en una lancha a 3 millas por hora y caminar 4 millas por hora, ¿en dónde debe desembarcar en el bote para llegar, en el menor tiempo, a un pueblo que está a 10 millas, medidas sobre la playa, del punto P?

≈ **20.** En el problema 19 suponga que, cuando llegue a la playa, la mujer será recogida por un automóvil que promedia 50 millas por hora. Entonces, ¿en dónde debe desembarcar?

≈ **21.** En el problema 19, suponga que la mujer utiliza una lancha de motor, que viaja a 20 millas por hora. Entonces, ¿en dónde debe desembarcar?

22. Una central eléctrica está situada en una ribera de un río rectilíneo que tiene w pies de ancho. Una fábrica está situada en la ribera opuesta del río, L pies río abajo del punto A, que está enfrente a la central eléctrica. ¿Cuál es la ruta más económica para conectar un cable de la central a la fábrica, si cuesta a dólares por pie tender el cable bajo el agua y b dólares por pie en tierra ($a > b$)?

23. A las 7:00 a. m., un barco estaba a 60 millas al este de un segundo barco. Si el primer barco navega hacia el oeste a 20 millas por hora y el segundo navega con rumbo sureste a 30 millas por hora, ¿cuándo estarán más cerca uno del otro?

24. Encuentre la ecuación de la recta que es tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el primer cuadrante y que forma con los ejes de coordenadas el triángulo con menor área posible (a y b son constantes positivas).

25. Encuentre el volumen máximo que puede tener un cilindro circular recto, si está inscrito en una esfera de radio r.

26. Demuestre que el rectángulo con perímetro máximo que puede inscribirse en un círculo es un cuadrado.

27. ¿Cuáles son las dimensiones de un cilindro circular recto, con mayor área de superficie, que puede inscribirse en una esfera de radio r?

28. La iluminación en un punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del punto a la fuente luminosa y directamente proporcional a la intensidad de la fuente. Si dos fuentes luminosas están separadas s pies y sus intensidades son I_1 e I_2, respectivamente, ¿en qué punto entre ellas la suma de sus iluminaciones será mínima?

29. Un alambre de 100 centímetros de largo se corta en dos pedazos; uno se dobla para formar un cuadrado y el otro se dobla para formar un triángulo equilátero. ¿En dónde debe hacerse el corte si (a) la suma de las dos áreas debe ser mínima; (b) máxima? (Cabe la posibilidad de no cortar).

30. Una caja cerrada en forma de paralelepípedo rectangular con base cuadrada tiene un volumen dado. Si el material utilizado para el fondo cuesta 20% más por pulgada cuadrada que el material para los lados y el material de la tapa cuesta 50% más por pulgada cuadrada que cada lado, encuentre las proporciones más económicas para la caja.

31. Un observatorio debe tener la forma de un cilindro circular recto, coronado por un domo semiesférico. Si el domo semiesférico cuesta el doble por pie cuadrado que las paredes cilíndricas, ¿cuáles son las proporciones más económicas para un volumen dado?

32. Una masa conectada a un resorte se mueve a lo largo del eje x, de modo que su abscisa en el instante t es

$$x = \operatorname{sen} 2t + \sqrt{3} \cos 2t$$

¿Cuál es la mayor distancia del origen que alcanza la masa?

33. Una jardinera tendrá la forma de un sector circular (una región en forma de rebanada de pastel) de radio r y ángulo en el vértice de θ. Encuentre r y θ, si su área, A, es constante y el perímetro es mínimo.

34. Una barda de h pies de altura corre paralela a un edificio alto y a w pies de él (véase la figura 23). Encuentre la longitud de la escalera más corta que llegue del suelo hasta la pared del edificio, pasando por encima de la barda.

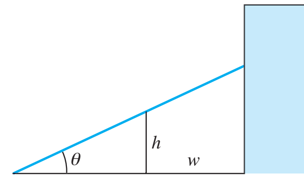


Figura 23

35. Un rectángulo tiene dos vértices sobre el eje x y los otros dos en la parábola $y = 12 - x^2$, con $y \geq 0$ (véase la figura 24). ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de este tipo con área máxima?

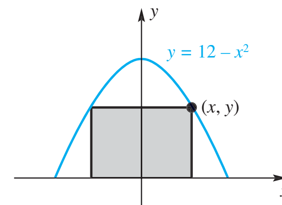


Figura 24

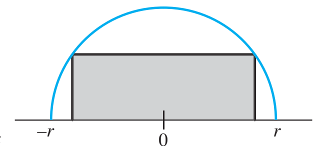


Figura 25

36. Un rectángulo se inscribirá en un semicírculo de radio r, como se muestra en la figura 25. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo, si su área debe maximizarse?

37. De todos los cilindros circulares rectos con un área de superficie dada, determine aquel con el volumen máximo. *Observación:* los extremos de los cilindros son cerrados.

38. Determine las dimensiones del rectángulo con mayor área que puede inscribirse en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

39. De todos los rectángulos con una diagonal dada, determine aquel con el área máxima.

40. Un humidificador utiliza un disco giratorio de radio r que está sumergido parcialmente en el agua. La mayor evaporación ocurre cuando la región húmeda expuesta (mostrada como la región superior sombreada en la figura 26) se maximiza. Demuestre que esto sucede cuando h (la distancia del centro al agua) es igual a $r/\sqrt{1+\pi^2}$.

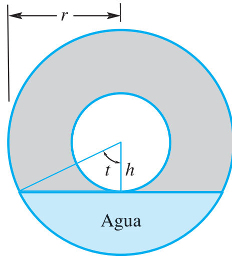


Figura 26

41. Un canalón metálico para el agua de lluvia tiene lados de 3 pulgadas y un fondo horizontal de 3 pulgadas, los lados forman ángulos iguales θ con el fondo (véase la figura 27). ¿Cuál debe ser θ para maximizar la capacidad de desalojo de agua del canalón? *Nota:* $0 \le \theta \le \theta/2$.

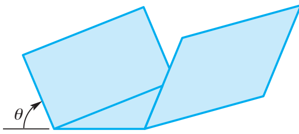


Figura 27

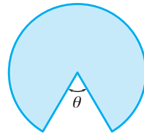


Figura 28

42. Se fabricará un gran depósito cónico con una pieza metálica circular con radio de 10 metros, cortando un sector con ángulo θ y luego soldando los lados rectos de la pieza restante (véase la figura 28). Encuentre θ, de modo que el cono resultante tenga el mayor volumen posible.

43. Con una hoja rectangular de cartón, que mide 5 por 8 pies, se confeccionará una caja con tapa. Esto se realiza cortando las regiones sombreadas de la figura 29 y luego doblando por las líneas discontinuas. ¿Cuáles son las dimensiones x, y y z que maximizan el volumen?

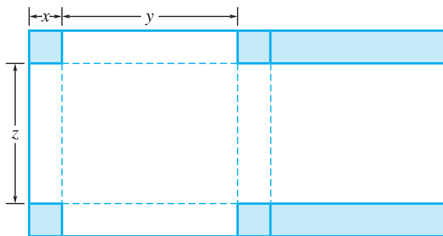


Figura 29

44. Tengo suficiente plata pura como para cubrir un área de 1 metro cuadrado de superficie. Planeo cubrir una esfera y un cubo. ¿Qué dimensiones deben tener si el volumen total de los sólidos plateados debe ser máximo? ¿Y mínimo? (Se permite la posibilidad de que se utilice toda la plata en un sólido).

45. Una esquina de una tira angosta de papel se dobla de manera que toca exactamente el lado opuesto, como se muestra en la figura 30. Con las partes marcadas como se indica, determine x para:

(a) maximizar el área del triángulo A;

(b) minimizar el área del triángulo B;

(c) minimizar la longitud z.

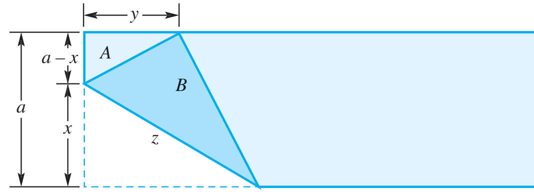


Figura 30

46. Determine θ de modo que el área de la cruz simétrica, que se muestra en la figura 31, se maximice. Después encuentre el área máxima.

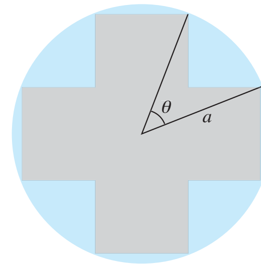


Figura 31

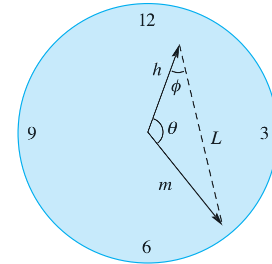


Figura 32

CAS **47.** Un reloj tiene horario y minutero de longitudes h y m, respectivamente, con $h \le m$. Queremos estudiar este reloj entre las 12:00 y las 12:30. Sean θ, ϕ y L, como se muestran en la figura 32, y observe que θ aumenta a una razón constante. Por la ley de los cosenos, $L = L(\theta) = (h^2 + m^2 - 2hm\cos\theta)^{-1/2}$ y de este modo

$$L'(\theta) = hm(h^2 + m^2 - 2hm\cos\theta)^{-1/2}\operatorname{sen}\theta$$

(a) Para $h = 3$ y $m = 5$, determine L', L y ϕ en el instante en que L' es máxima.

(b) Vuelva a resolver la parte (a) cuando $h = 5$ y $m = 13$.

(c) Con base en las partes (a) y (b) haga conjeturas con respecto a los valores de L', L y ϕ al instante en que las puntas de las manecillas se separan más rápido.

(d) Intente demostrar sus conjeturas.

≈ C **48.** Un objeto que se arroja desde el borde de un acantilado de 100 pies, sigue la trayectoria dada por $y = -\frac{x^2}{10} + x + 100$.Un observador se encuentra parado a 2 pies del fondo del acantilado.

(a) Encuentre la posición del objeto cuando está más cerca del observador.

(b) Encuentre la posición del objeto cuando está más lejos del observador.

≈ CAS **49.** La posición de la Tierra en el Sistema Solar, en el instante t, medido en años, puede describirse de forma aproximada por medio de $P(93\cos(2pt), 93\operatorname{sen}(2pt))$, en donde el Sol está en el origen y las distancias se miden en millones de millas. Suponga que un asteroide tiene posición $Q(60\cos[2\pi(1.51t - 1)], 120\operatorname{sen}[2\pi(1.51t - 1)])$. En el periodo [0, 20] (es decir, en los siguientes 20 años), ¿cuándo estará más cerca el asteroide de la Tierra? ¿Qué tan cerca estará?

50. Un folleto publicitario debe tener 50 pulgadas cuadradas para el espacio impreso con márgenes, superior e inferior, de 2 pulgadas cada uno, y cada margen lateral de una pulgada. ¿Qué dimensiones del folleto requerirán el menor papel?

≈ **51.** Un extremo de una escalera de 27 pies descansa en el piso y el otro está apoyado en la parte superior de una pared de 8 pies. Cuando el extremo inferior se empuja por el piso hacia la pared, la parte superior sobresale de la pared. Encuentre la máxima distancia horizontal que sobresale el extremo superior de la escalera.

C **52.** Se produce latón en rollos largos de una hoja delgada. Para controlar la calidad, los inspectores seleccionan al azar una pieza de la hoja, miden su área y enumeran las imperfecciones en la superficie de esa pieza. El área varía de pieza a pieza. La siguiente tabla proporciona los datos del área (en pies cuadrados) de la pieza seleccionada y el número de imperfecciones encontradas en su superficie.

Pieza	Área en pies cuadrados	Número de imperfecciones en la superficie
1	1.0	3
2	4.0	12
3	3.6	9
4	1.5	5
5	3.0	8

(a) Haga un diagrama de dispersión con el área en el eje horizontal y el número de imperfecciones en el eje vertical.

(b) ¿Le parece que una recta que pasa por el origen sería un buen modelo para estos datos? Explique.

(c) Encuentre la ecuación de la recta de mínimos cuadrados que pasa por el origen.

(d) Utilice el resultado de la parte (c) para predecir cuántas imperfecciones en la superficie tendría una hoja con área de 2.00 pies cuadrados.

C **53.** Suponga que cada orden del cliente tomada por la compañía XYZ requiere de exactamente 5 horas de trabajo para el papeleo; este intervalo de tiempo es *fijo* y no varía de lote a lote. Entonces, el número de horas requeridas y para fabricar y vender un lote de tamaño x sería:

y = (número de horas para producir un lote de tamaño x) + 5

En la siguiente tabla se dan algunos datos de los estantes de la compañía XYZ.

Orden	Tamaño de lote, x	Total de horas de trabajo
1	11	38
2	16	52
3	8	29
4	7	25
5	10	38

(a) A partir de la descripción del problema, la recta de mínimos cuadrados tiene 5 como su intersección con el eje y. Encuentre una fórmula para el valor de la pendiente b que minimiza la suma de los cuadrados

$$S = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (5 + bx_i)]^2$$

(b) Utilice esta fórmula para estimar la pendiente b.

(c) Utilice su recta de mínimos cuadrados para predecir el número total de horas de trabajo para producir un lote que consiste en 15 libreros.

54. Los costos fijos mensuales de operar una planta que fabrica ciertos artículos es de \$7000, mientras que el costo de fabricación de cada unidad es de \$100. Escriba una expresión para $C(x)$, el costo total de producir x artículos en un mes.

55. El fabricante de los artículos del problema anterior estima que pueden venderse 100 unidades por mes, si el precio unitario es de \$250 y que las ventas aumentan en 10 unidades por cada disminución de \$5 en el precio. Escriba una expresión para el precio $p(n)$ y el ingreso $R(n)$, si se venden n unidades en un mes, $n \geq 100$.

56. Utilice la información en los problemas 54 y 55 para escribir una expresión para la utilidad total mensual $P(n)$, $n \geq 100$.

57. Dibuje la gráfica de $P(n)$ del problema 56 y con base en ella estime el valor de n que maximiza P. Encuentre exactamente n por medio de los métodos de cálculo.

C **58.** El costo total de producir y vender x unidades mensuales de cierto artículo es $C(x) = 100 + 3.002x - 0.0001x^2$. Si el nivel de producción es de 1600 unidades mensuales, encuentre el costo promedio, $C(x)/x$, de cada unidad y el costo marginal.

59. El costo total de producir y vender, por semana, n unidades de cierto bien de consumo es $C(n) = 1000 + n^2/1200$. Encuentre el costo promedio, $C(n)/n$, de cada unidad y el costo marginal de un nivel de producción de 800 unidades semanales.

60. El costo total de producir y vender $100x$ unidades a la semana de un bien en particular es

$$C(x) = 1000 + 33x - 9x^2 + x^3$$

Encuentre (a) el nivel de producción en el que el costo marginal es mínimo, y (b) el costo marginal mínimo.

61. Una función de precio, p, está definida por

$$p(x) = 20 + 4x - \frac{x^2}{3}$$

donde $x \geq 0$ es el número de unidades.

(a) Encuentre la función de ingreso total y la función de ingreso marginal.

(b) ¿En qué intervalo es creciente el ingreso total?

(c) ¿Para qué número x el ingreso marginal es máximo?

C **62.** Para la función de precio definida por

$$p(x) = (182 - x/36)^{1/2}$$

encuentre el número de unidades x_1 que hace que sea máximo el ingreso total y establezca el máximo ingreso posible. ¿Cuál es el ingreso marginal cuando se vende el número óptimo de unidades, x_1?

63. Para la función de precio dada por

$$p(x) = 800/(x + 3) - 3$$

encuentre el número de unidades x_1 que hacen máximo el ingreso total, y establezca el máximo ingreso posible. ¿Cuál es el ingreso marginal cuando se vende el número óptimo de unidades, x_1?

64. Por el día de la independencia, una compañía de viajes por río ofrece una excursión a una organización fraternal, bajo el entendido de que será para 400 paseantes, por lo menos. El precio de cada boleto será de \$12.00 y la compañía acepta hacer un descuento de \$0.20 por cada 10 pasajeros que excedan a 400. Escriba una expresión para la función del precio $p(x)$ y encuentre el número x_1 de pasajeros que hacen máximo el ingreso total.

65. La compañía XYZ fabrica sillas de mimbre. Con sus actuales máquinas, tiene una producción anual máxima de 500 unidades. Si fabrica x sillas, puede establecer un precio de $p(x) = 200 - 0.15x$ dólares para cada una y tendrá un costo total por año de $C(x) = 5000 + 6x - 0.002x^2$ dólares. La compañía tiene la oportunidad de comprar una máquina nueva por $4000, con lo que aumentaría su producción en 250 sillas anuales. Por lo tanto, la función de costo para valores de x entre 500 y 750 es $C(x) = 9000 + 6x - 0.002x^2$. Con base en su análisis de la utilidad para el año siguiente, responda las siguientes preguntas.

(a) ¿La compañía debe comprar la máquina adicional?

(b) ¿Cuál debe ser el nivel de producción?

66. Repita el problema 65, suponiendo que la máquina adicional cuesta $3000.

C **67.** La compañía ZEE fabrica ciertos objetos, los cuales se venden a un precio de $p(x) = 10 - 0.001x$ dólares, donde x es el número producido cada mes. Su costo mensual total es $C(x) = 200 + 4x - 0.01x^2$. En el máximo de producción puede fabricar 300 unidades. ¿Cuál es su utilidad mensual máxima y qué nivel de producción proporciona esta utilidad?

C **68.** Si la compañía del problema 67 amplía sus instalaciones de modo que puede producir hasta 450 unidades mensuales, su función de costo mensual toma la forma $C(x) = 800 + 3x - 0.01x^2$ para $300 < x \leq 450$. Determine el nivel de producción que maximiza la utilidad mensual y efectúe un cálculo de ésta. Haga un bosquejo de la gráfica de la función de utilidad mensual, $P(x)$ en $0 \leq x \leq 450$.

EXPL **69.** La media aritmética de los números a y b es $(a + b)/2$, y la media geométrica de dos números positivos, a y b, es $\sqrt{ab}$. Suponga que $a > 0$ y $b > 0$.

(a) Elevando ambos lados al cuadrado y simplificando, demuestre que se cumple $\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$.

(b) Utilice cálculo para demostrar que $\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$. *Sugerencia:* considere a fija. Eleve ambos lados de la desigualdad al cuadrado y divida entre b. Defina la función $F(b) = (a + b)^2/4b$. Demuestre que F tiene su mínimo en a.

(c) La media geométrica de tres números positivos, a, b y c, es $(abc)^{1/3}$. Demuestre que se cumple la desigualdad análoga:

$$(abc)^{1/3} \leq \frac{a + b + c}{3}$$

Sugerencia: considere a y c fijas y defina $F(b) = (a + b + c)^3/27b$. Demuestre que F tiene un mínimo en $b = (a + c)/2$ y que este mínimo es $[(a + b)/2]^2$. Luego utilice el resultado de la parte (b).

EXPL **70.** Demuestre que de todas las cajas de tres dimensiones con un área de superficie dada, el cubo tiene el volumen máximo. *Sugerencia:* el área de la superficie es $S = 2(lw + lh + hw)$ y el volumen es $V = lwh$. Sea $a = lw$, $b = lh$ y $c = wh$. Utilice el problema anterior para demostrar que $(V^2)^{1/3} \leq S/6$. ¿Cuándo se satisface como igualdad?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $0 < x < \infty$ **2.** $2x + 200/x$ **3.** $y_i - bx_i$ **4.** ingreso marginal; costo marginal.

3.5 Graficación de funciones mediante cálculo

En la sección 0.4, nuestro tratamiento de graficación fue elemental. Propusimos trazar suficientes puntos, de modo que las características esenciales de la gráfica fuesen claras. Mencionamos que las simetrías de la gráfica podrían reducir el esfuerzo necesario. Sugerimos que uno debe estar alerta a posibles asíntotas. Pero si la ecuación a graficar es complicada o si queremos una gráfica precisa, las técnicas de esa sección no son adecuadas.

El cálculo proporciona una herramienta poderosa para analizar la estructura fina de una gráfica, en especial para identificar los puntos en donde cambian las características de la gráfica. Podemos localizar puntos máximos locales, puntos mínimos locales y puntos de inflexión; podemos determinar, con precisión, en dónde la gráfica es creciente o en dónde es cóncava hacia arriba. La inclusión de todas estas ideas en nuestro procedimiento para graficar es el programa de esta sección.

Funciones polinomiales Un polinomio de grado 1 o 2 es fácil de graficar a mano; uno de grado 50 sería casi imposible. Si el grado es de tamaño modesto, como 3 o 6, podemos utilizar las herramientas de cálculo con gran ventaja.

EJEMPLO 1 Haga la gráfica de $f(x) = \dfrac{3x^5 - 20x^3}{32}$.

SOLUCIÓN Como $f(-x) = -f(x)$, f es una función impar y, por lo tanto, su gráfica es simétrica con respecto al origen. Haciendo $f(x) = 0$, encontramos que las intersecciones con el eje x son 0 y $\pm\sqrt{20/3} \approx \pm 2.6$. Podemos llegar hasta aquí sin cálculo.

Cuando derivamos f, obtenemos

$$f'(x) = \frac{15x^4 - 60x^2}{32} = \frac{15x^2(x - 2)(x + 2)}{32}$$

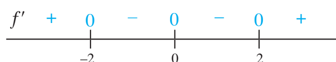


Figura 1



Figura 2

Así, los puntos críticos son −2, 0 y 2; rápidamente descubrimos que (véase la figura 1) $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -2)$ y en $(2, \infty)$, y que $f'(x) < 0$ en $(-2, 0)$ y en $(0, 2)$. Estos hechos nos dicen en dónde f es creciente y en dónde es decreciente; también confirman que $f(-2) = 2$ es un valor máximo local y que $f(2) = -2$ es un valor mínimo local.

Al derivar nuevamente, obtenemos

$$f''(x) = \frac{60x^3 - 120x}{32} = \frac{15x\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)}{8}$$

Mediante un estudio del signo de $f''(x)$ (véase la figura 2) deducimos que f es cóncava hacia arriba en $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ y en $\left(\sqrt{2}, \infty\right)$, y cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$ y en $\left(0, \sqrt{2}\right)$. Por lo tanto, existen tres puntos de inflexión: $\left(-\sqrt{2}, 7\sqrt{2}/8\right) \approx (-1.4, 1.2)$, $(0, 0)$ y $\left(\sqrt{2}, -7\sqrt{2}/8\right) \approx (1.4, -1.2)$.

Gran parte de esta información está reunida en la parte superior de la figura 3 que usamos para dibujar la gráfica que está abajo de ella.

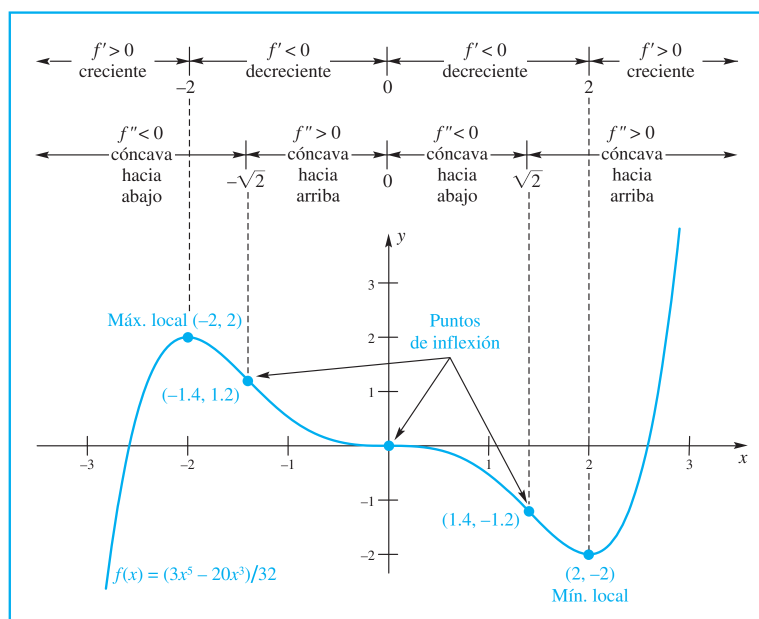


Figura 3

■

Funciones racionales Una función racional, que es el cociente de dos funciones polinomiales, es considerablemente más complicada de graficar que un polinomio. En particular, podemos esperar un comportamiento difícil cerca de donde el denominador se haga cero.

EJEMPLO 2 Dibuje la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$.

SOLUCIÓN Esta función no es par ni impar, así que no tiene ninguna de las simetrías comunes. No hay intersecciones con el eje x, ya que las soluciones de $x^2 - 2x + 4 = 0$ no son números reales. La intersección con el eje y es −2. Anticipamos una asíntota vertical en $x = 2$. De hecho,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = \infty$$

Al derivar dos veces se obtiene

$$f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2} \quad \text{y} \quad f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$$

Por lo tanto, los puntos estacionarios son $x = 0$ y $x = 4$.

Así, $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ y $f'(x) < 0$ en $(0, 2) \cup (2, 4)$. (Recuerde que $f'(x)$ no existe cuando $x = 2$). También, $f''(x) > 0$ en $(2, \infty)$ y $f''(x) < 0$ en $(-\infty, 2)$. Como $f''(x)$ nunca es cero, no hay puntos de inflexión. Por otra parte, $f(0) = -2$ y $f(4) = 6$ dan los valores máximo y mínimo locales, respectivamente.

Es una buena idea verificar el comportamiento de $f(x)$ para $|x|$ grande. Como

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = x + \frac{4}{x - 2}$$

la gráfica de $y = f(x)$ se acerca cada vez más a la recta $y = x$ cuando $|x|$ se hace cada vez más grande. Llamamos a la recta $y = x$ **asíntota oblicua** para la gráfica de f (véase el problema 49 de la sección 1.5).

Con toda esta información, somos capaces de trazar una gráfica bastante precisa (véase la figura 4).

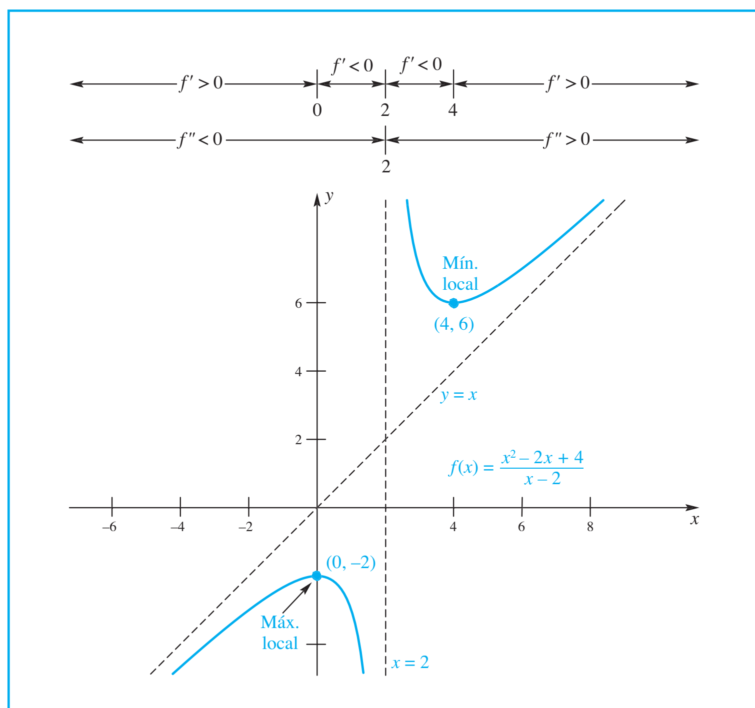


Figura 4

Funciones en las que aparecen raíces Existe una variedad infinita de funciones que implican raíces. Aquí está un ejemplo.

EJEMPLO 3 Analice la función

$$F(x) = \frac{\sqrt{x}(x-5)^2}{4}$$

y dibuje su gráfica.

SOLUCIÓN El dominio de F es $[0, \infty)$ y el rango es $[0, \infty)$, de modo que la gráfica de F está confinada al primer cuadrante y la parte positiva de los ejes de coordenadas. Las intersecciones con el eje x son 0 y 5; y la intersección con el eje y es 0. De

$$F'(x) = \frac{5(x-1)(x-5)}{8\sqrt{x}}, \qquad x > 0$$

encontramos los puntos estacionarios 1 y 5. Como $F'(x) > 0$ en $(0, 1)$ y $(5, \infty)$, mientras que $F'(x) < 0$ en $(1, 5)$, concluimos que $F(1) = 4$ es un valor máximo local y $F(5) = 0$ es un valor mínimo local.

Hasta aquí, todo va viento en popa. Pero al calcular la segunda derivada obtenemos

$$F''(x) = \frac{5(3x^2 - 6x - 5)}{16x^{3/2}}, \qquad x > 0$$

que es muy complicada. Sin embargo, $3x^2 - 6x - 5 = 0$ tiene una solución en $(0, \infty)$, a saber, $1 + 2\sqrt{6}/3 \approx 2.6$.

Utilizando los puntos de prueba 1 y 3 concluimos que $f''(x) < 0$ en $(0, 1 + 2\sqrt{6}/3$ y $f''(x) > 0$ en $(1 + 2\sqrt{6}/3, \infty)$. Entonces, se deduce que el punto $\left(1 + 2\sqrt{6}/3, F(1 + 2\sqrt{6}/3)\right)$, es un punto de inflexión.

Cuando x crece, $F(x)$ crece sin cota y mucho más rápido que cualquier función lineal; no hay asíntotas. La gráfica se dibuja en la figura 5. ■

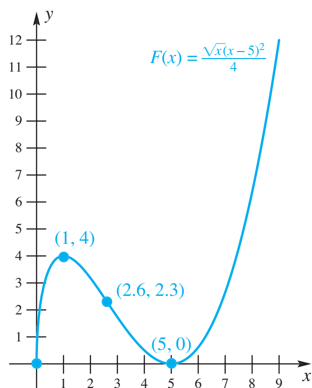


Figura 5

Resumen del método Al graficar funciones no hay sustituto para el sentido común. Sin embargo, el procedimiento siguiente será útil en la mayoría de los casos.

Paso 1: Haga un análisis antes de utilizar cálculo.

(a) Verifique el *dominio* y el *rango* de la función para ver si existen regiones en el plano que están excluidas.

(b) Verifique la *simetría* con respecto al eje y y al origen. (¿La función es par o impar?)

(c) Encuentre las *intersecciones con los ejes de coordenadas*.

Paso 2: Análisis con cálculo.

(a) Utilice la primera derivada para encontrar los puntos críticos y determinar en dónde la gráfica es *creciente* y en dónde es *decreciente*.

(b) Verifique los puntos críticos para saber si son *máximos* o *mínimos locales*.

(c) Utilice la segunda derivada para determinar en dónde la gráfica es *cóncava hacia arriba* y en dónde es *cóncava hacia abajo*, y para localizar *puntos de inflexión.*

(d) Encuentre las *asíntotas*.

Paso 3: Dibuje algunos puntos (incluya todos los puntos críticos y los puntos de inflexión).

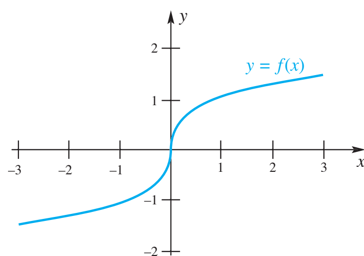
Paso 4: Haga un bosquejo de la gráfica.

EJEMPLO 4 Haga un bosquejo de las gráficas de $f(x) = x^{1/3}$ y $g(x) = x^{2/3}$ y de sus derivadas.

SOLUCIÓN El dominio de ambas funciones es $(-\infty, \infty)$. (Recuerde que la raíz cúbica existe para todo número real). El rango para $f(x)$ es $(-\infty, \infty)$, ya que cada número real es la raíz cúbica de algún otro número. Al escribir $g(x)$ como $g(x) = x^{2/3} = (x^{1/3})^2$, vemos que $g(x)$ debe ser no negativa; su rango es $[0, \infty)$. Como $f(-x) = (-x)^{1/3} = -x^{1/3} = -f(x)$, vemos que f es una función impar. De forma análoga, como $g(-x) = (-x)^{2/3} = ((-x)^2)^{1/3} = (x^2)^{1/3} = g(x)$, vemos que g es una función par. Las primeras derivadas son

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

y



$$g'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

y las segundas derivadas son

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9x^{5/3}}$$

y

$$g''(x) = -\frac{2}{9}x^{-4/3} = -\frac{2}{9x^{4/3}}$$

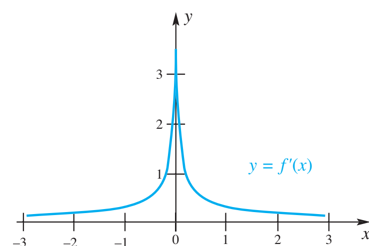
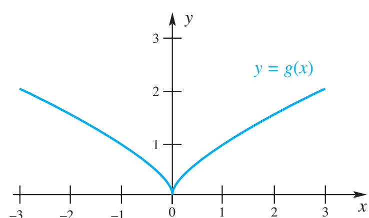


Figura 6

Para ambas funciones el único punto crítico, en este caso un punto en donde la derivada no existe, es $x = 0$

Observe que $f'(x) > 0$ para toda x, excepto $x = 0$. Por lo tanto, f es creciente en $(-\infty, 0]$ y también en $[0, \infty)$; pero como f es continua en $(-\infty, \infty)$, podemos concluir que f siempre es creciente. En consecuencia, f no tiene máximo ni mínimo locales. Como $f''(x)$ es positiva cuando x es negativa y negativa cuando x es positiva (e indefinida cuando $x = 0$), concluimos que f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia abajo en $(0, \infty)$ El punto $(0, 0)$ es un punto de inflexión porque es en donde la concavidad cambia.

Ahora considere $g(x)$. Observe que $g'(x)$ es negativa cuando x es negativa y positiva cuando x es positiva. Como g es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$, $g(0) = 0$ es un mínimo local. También observe que $g''(x)$ es negativa siempre que $x \neq 0$. Por lo tanto, g es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia abajo en $(0, \infty)$, así que $(0, 0)$ no es un punto de inflexión. Las gráficas de $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ y $g'(x)$ se muestran en las figuras 6 y 7. ■



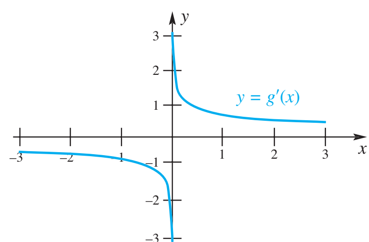


Figura 7

Observe que en el ejemplo anterior ambas funciones tienen un punto crítico, $x = 0$, en donde la derivada no está definida. Sin embargo, las gráficas de las funciones son fundamentalmente diferentes. La gráfica de $y = f(x)$ tiene una recta tangente en todos los puntos, pero es vertical cuando $x = 0$. (Si la recta tangente es vertical, entonces la derivada no existe en ese punto). La gráfica de $y = g(x)$ tiene un punto esquina, denominada **pico**, en $x = 0$.

Uso de la gráfica de la derivada para graficar una función El solo hecho de conocer la derivada de la función puede decirnos mucho acerca de la función misma y cuál es la apariencia de su gráfica.

EJEMPLO 5 La figura 8 muestra una gráfica de $y = f'(x)$. Determine todos los extremos locales y puntos de inflexión de f en el intervalo $[-1, 3]$. Dado que $f(1) = 0$, haga un bosquejo de la gráfica de $y = f(x)$

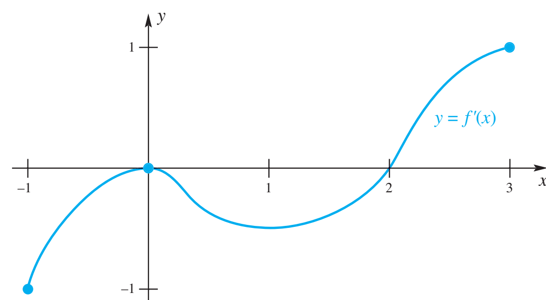


Figura 8

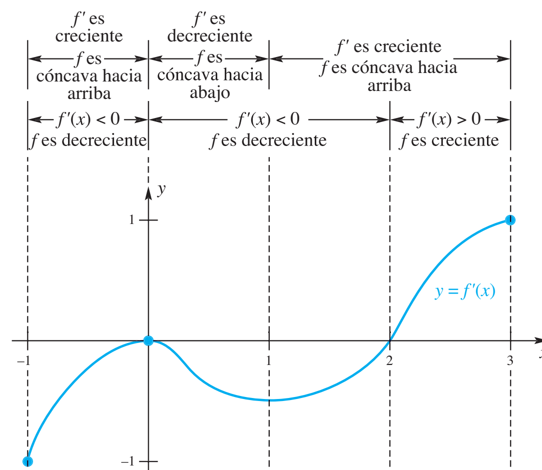


Figura 9

$f(-1)$	Máximo local
$f(2)$	Mínimo local
$f(3)$	Máximo local
$(0, f(0))$	Punto de inflexión
$(1, f(1))$	Punto de inflexión

SOLUCIÓN La derivada es negativa en los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 2)$ y positiva en el intervalo $(2, 3)$. Por lo tanto, f es decreciente en $[-1, 0]$ y en $[0, 2]$, por lo que hay un máximo local en el punto fronterizo izquierdo $x = -1$. Como $f'(x)$ es positivo en $(2, 3)$, f es creciente en $[2, 3]$, por lo que existe un máximo local en el punto fronterizo derecho $x = 3$. Ya que f es decreciente en $[-1, 2]$ y creciente en $[2, 3]$, existe un mínimo local en $x = 2$. La figura 9 resume esta información.

Los puntos de inflexión para f se producen cuando la concavidad de f cambia. Como f' es creciente en $(-1, 0)$ y en $(1, 3)$, f es cóncava hacia arriba en $(-1, 0)$ y en $(1, 3)$. Ya que f' es decreciente en $(0, 1)$, f es cóncava hacia abajo en $(0, 1)$. Así que, f cambia de concavidad en $x = 0$ y $x = 1$. Por lo tanto, los puntos de inflexión son $(0, f(0))$ y $(1, f(1))$

La información anterior, junto con el hecho de que $f(1) = 0$, puede usarse para trazar la gráfica de $y = f(x)$. (Este dibujo no puede ser demasiado preciso ya que aún tenemos información limitada acerca de f). En la figura 10 se muestra un bosquejo.

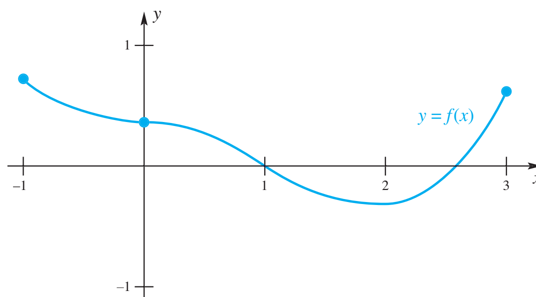


Figura 10 ■

Revisión de conceptos

1. La gráfica de f es simétrica respecto al eje y si $f(-x) =$ _____ para toda x; la gráfica es simétrica con respecto al origen si $f(-x) =$ _____ para toda x.

2. Si $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para toda x en un intervalo I, entonces la gráfica de f es _____ y _____ en I.

3. La gráfica de $f(x) = x^3/[(x+1)(x-2)(x-3)]$ tiene como asíntotas verticales las rectas _____ y como asíntota horizontal la recta _____.

4. Llamamos a $f(x) = 3x^5 - 2x^2 + 6$ una función _____ y llamamos a $g(x) = (3x^5 - 2x^2 + 6)/(x^2 - 4)$ una función _____.

Conjunto de problemas 3.5

En los problemas del 1 al 27 haga un análisis como el sugerido en el resumen anterior y después elabore un bosquejo de la gráfica.

1. $f(x) = x^3 - 3x + 5$

2. $f(x) = 2x^3 - 3x - 10$

3. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$

4. $f(x) = (x - 1)^3$

5. $G(x) = (x - 1)^4$

6. $H(t) = t^2(t^2 - 1)$

7. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 10$

8. $F(s) = \dfrac{4s^4 - 8s^2 - 12}{3}$

9. $g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

10. $g(s) = \dfrac{(s - \pi)^2}{s}$

11. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

12. $\Lambda(\theta) = \dfrac{\theta^2}{\theta^2 + 1}$

13. $h(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

14. $P(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

15. $f(x) = \dfrac{(x - 1)(x - 3)}{(x + 1)(x - 2)}$

16. $w(z) = \dfrac{z^2 + 1}{z}$

17. $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 1}$

18. $f(x) = |x|^3$ *Sugerencia:* $\dfrac{d}{dx}|x| = \dfrac{x}{|x|}$

19. $R(z) = z|z|$

20. $H(q) = q^2|q|$

21. $g(x) = \dfrac{|x| + x}{2}(3x + 2)$

22. $h(x) = \dfrac{|x| - x}{2}(x^2 - x + 6)$

23. $f(x) = |\text{sen}\, x|$

24. $f(x) = \sqrt{\text{sen}\, x}$

25. $h(t) = \cos^2 t$

26. $g(t) = \tan^2 t$

C **27.** $f(x) = \dfrac{5.235x^3 - 1.245x^2}{7.126x - 3.141}$

28. Bosqueje la gráfica de una función f que tenga las siguientes propiedades:

(a) f es continua en todas partes; (b) $f(0) = 0, f(1) = 2$;

(c) f es una función par; (d) $f'(x) > 0$ para $x > 0$;

(e) $f''(x) > 0$ para $x > 0$.

29. Trace la gráfica de una función f que tenga las siguientes propiedades:

(a) f es continua en todas partes; (b) $f(2) = -3, f(6) = 1$;

(c) $f'(2) = 0, f'(x) > 0$ para $x \neq 2, f'(6) = 3$;

(d) $f''(6) = 0, f''(x) > 0$ para $2 < x < 6, f''(x) < 0$ para $x > 6$;

30. Bosqueje la gráfica de una función g que tenga las siguientes propiedades:

(a) g es *suave* en todas partes (continua y con primera derivada continua);

(b) $g(0) = 0$; (c) $g'(x) < 0$ para toda x;

(d) $g''(x) < 0$ para $x < 0$ y $g''(x) > 0$ para $x > 0$

31. Haga la gráfica de una función f que tenga las siguientes propiedades:

(a) f es continua en todas partes;

(b) $f(-3) = 1$;

(c) $f'(x) < 0$ para $x < -3, f'(x) > 0$ para $x > -3, f''(x) < 0$ para $x \neq 3$.

32. Elabore la gráfica de una función f que tenga las siguientes propiedades:

(a) f es continua en todas partes;

(b) $f(-4) = -3, f(0) = 0, f(3) = 2$;

(c) $f'(-4) = 0, f'(3) = 0, f'(x) > 0$ para $x < -4, f'(x) > 0$ para $-4 < x < 3, f'(x) < 0$ para $x > 3$;

(d) $f''(-4) = 0, f''(0) = 0, f''(x) < 0$ para $x < -4, f''(x) > 0$ para $-4 < x < 0, f''(x) < 0$ para $x > 0$.

33. Bosqueje la gráfica de una función f que

(a) tenga primera derivada continua;

(b) sea descendente y cóncava hacia arriba para $x < 3$

(c) tenga un extremo en el punto $(3, 1)$;

(d) sea ascendente y cóncava hacia arriba para $3 < x < 5$;

(e) tenga un punto de inflexión en $(5, 4)$;

(f) sea ascendente y cóncava hacia abajo para $5 < x < 6$;

(g) tenga un extremo en $(6, 7)$;

(h) sea descendente y cóncava hacia abajo para $x > 6$.

GC *Las aproximaciones lineales proporcionan una buena aproximación, en particular cerca de los puntos de inflexión. Mediante una calculadora gráfica uno puede investigar con facilidad tal comportamiento en los problemas del 34 al 36.*

34. Grafique $y = \text{sen } x$ y su aproximación lineal $L(x) = x$ en el punto de inflexión $x = 0$.

35. Grafique $y = \cos x$ y su aproximación lineal $L(x) = -x + \pi/2$ en $x = \pi/2$.

36. Encuentre la aproximación lineal a la curva $y = (x - 1)^5 + 3$ en su punto de inflexión. Grafique tanto la función como su aproximación lineal en la vecindad del punto de inflexión.

37. Suponga que $f'(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4)$ y $f(2) = 2$. Haga una gráfica de $y = f(x)$.

38. Suponga que $f'(x) = (x - 3)(x - 2)^2(x - 1)$ y $f(2) = 0$. Bosqueje una gráfica de $f(x)$.

39. Suponga que $h'(x) = x^2(x - 1)^2(x - 2)$ y $h(0) = 0$. Elabore una gráfica de $y = h(x)$.

40. Considere una curva cuadrática general $y = ax^2 + bx + c$. Demuestre que tal curva no tiene puntos de inflexión.

41. Demuestre que la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ en donde $a \neq 0$, tiene exactamente un punto de inflexión.

42. Considere una curva general de cuarto grado $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, donde $a \neq 0$. ¿Cuál es el número máximo de puntos de inflexión que tal curva puede tener?

EXPL CAS *En los problemas del 43 al 47 la gráfica de $y = f(x)$ depende de un parámetro c. Mediante un CAS investigue cómo dependen los puntos extremos y los puntos de inflexión del valor de c. Identifique los valores extremos de c en los cuales cambia la forma básica de las curvas.*

43. $f(x) = x^2\sqrt{x^2 - c^2}$ **44.** $f(x) = \dfrac{cx}{4 + (cx)^2}$

45. $f(x) = \dfrac{1}{(cx^2 - 4)^2 + cx^2}$ **46.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4x + c}$

47. $f(x) = c + \text{sen } cx$

48. Con base en la información de que $f'(c) = f''(c) = 0$ y $f'''(c) > 0$, ¿qué conclusiones puede obtener acerca de f?

49. Sea $g(x)$ una función que tiene dos derivadas y satisface las siguientes propiedades:

(a) $g(1) = 1$;

(b) $g'(x) > 0$, para toda $x \neq 1$;

(c) g es cóncava hacia abajo para toda $x < 1$ y cóncava para arriba para toda $x > 1$;

(d) $f(x) = g(x^4)$.

Haga un bosquejo de una posible gráfica de $f(x)$ y justifique su respuesta.

50. Suponga que $H(x)$ tiene tres derivadas continuas, y sea tal que $H(1) = H'(1) = H''(1) = 0$, pero $H'''(1) \neq 0$. ¿Tiene $H(x)$ un máximo relativo, mínimo relativo o un punto de inflexión en $x = 1$? Justifique su respuesta.

51. En cada caso, ¿es posible para una función F con dos derivadas continuas satisfacer todas las propiedades siguientes? Si es así, grafique tal función. En caso contrario, justifique su respuesta.

(a) $F'(x) > 0, F''(x) > 0$, mientras que $F(x) < 0$ para toda x.

(b) $F''(x) < 0$, mientras $F(x) > 0$.

(c) $F''(x) < 0$, mientras $F'(x) > 0$.

GC **52.** Utilice una calculadora gráfica o un CAS para trazar las gráficas de cada una de las funciones siguientes en los intervalos que se indican. Determine las coordenadas de los extremos globales y de los puntos de inflexión, si existen. Usted debe ser capaz de dar respuestas que tengan al menos una precisión de un decimal. Restrinja la ventana del eje y a $-5 \leq y \leq 5$.

(a) $f(x) = x^2 \tan x; \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

(b) $f(x) = x^3 \tan x; \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

(c) $f(x) = 2x + \text{sen } x; [-\pi, \pi]$

(d) $f(x) = x - \dfrac{\text{sen } x}{2}; [-\pi, \pi]$

GC **53.** Cada una de las siguientes funciones es periódica. Utilice una calculadora gráfica o un CAS para hacer las gráficas de cada una de las siguientes funciones en un periodo completo con el centro en el intervalo ubicado en el origen. Determine las coordenadas, si las hay,

de los extremos globales y los puntos de inflexión. Debe ser capaz de dar las respuestas que tengan una precisión de al menos un decimal.

(a) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos^2 x$ (b) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$

(c) $f(x) = \cos 2x - 2 \cos x$ (d) $f(x) = \operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x$

(e) $f(x) = \operatorname{sen} 2x - \cos 3x$

54. Sea f una función continua con $f(-3) = f(0) = 2$. Si la gráfica de $y = f'(x)$ es como se muestra en la figura 6, bosqueje una posible gráfica para $y = f(x)$.

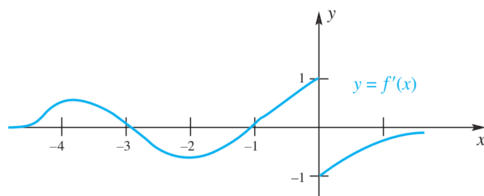


Figura 11

55. Sea f una función continua y suponga que la gráfica de f' es la que se muestra en la figura 12. Bosqueje una posible gráfica para f y responda las siguientes preguntas.

(a) ¿En dónde es creciente f? ¿En dónde es decreciente?

(b) ¿En dónde es cóncava hacia arriba? ¿En dónde es cóncava hacia abajo?

(c) ¿En dónde f alcanza un máximo local? ¿Y un mínimo local?

(d) ¿En dónde están los puntos de inflexión para f?

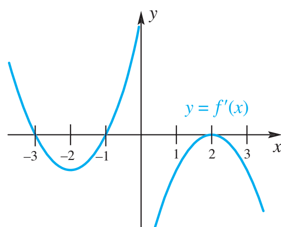


Figura 12

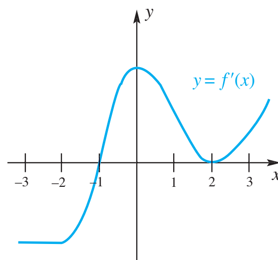


Figura 13

56. Repita el problema 55 para la figura 13.

57. Sea f una función continua con $f(0) = f(2) = 0$. Si la gráfica de $y = f'(x)$ es como la que se muestra en la figura 7, bosqueje una posible gráfica para $y = f(x)$.

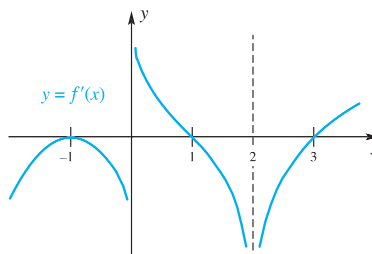


Figura 14

58. Suponga que $f'(x) = (x-3)(x-1)^2(x+2)$ y $f(1) = 2$. Haga un bosquejo de una posible gráfica de f.

GC **59.** Utilice una calculadora gráfica o un CAS para dibujar la gráfica de cada una de las siguientes funciones en $[-1, 7]$. Determine las coordenadas, si existen, de los extremos globales y puntos de inflexión. Usted debe ser capaz de dar respuestas con una precisión de al menos un decimal.

(a) $f(x) = x\sqrt{x^2 - 6x + 40}$

(b) $f(x) = \sqrt{|x|}(x^2 - 6x + 40)$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 40}/(x - 2)$

(d) $f(x) = \operatorname{sen}[(x^2 - 6x + 40)/6]$

GC **60.** Repita el problema 59 para las funciones siguientes.

(a) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 4$

(b) $f(x) = |x^3 - 8x^2 + 5x + 4|$

(c) $f(x) = (x^3 - 8x^2 + 5x + 4)/(x - 1)$

(d) $f(x) = (x^3 - 8x^2 + 5x + 4)/(x^3 + 1)$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $f(x)$; $-f(x)$ **2.** decreciente; cóncava hacia arriba **3.** $x = -1, x = 2, x = 3$; $y = 1$ **4.** polinomial; racional.

3.6 El teorema del valor medio para derivadas

En lenguaje geométrico, el teorema del valor medio es fácil de formular y entender. Dice que si la gráfica de una función continua tiene una recta tangente, que no sea vertical, en cada punto entre A y B, entonces existe al menos un punto C en la gráfica entre A y B en el cual la recta tangente es paralela a la recta secante AB. En la figura 1 existe exactamente un punto C; en la figura 2 existen varios. Primero formulamos el teorema en el lenguaje de funciones y después lo demostramos.

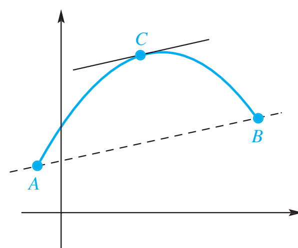


Figura 1

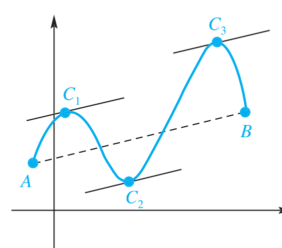


Figura 2

Teorema A **Teorema del valor medio para derivadas**

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en su interior (a, b), entonces existe al menos un número c en (a, b) donde

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

o, de manera equivalente, donde

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

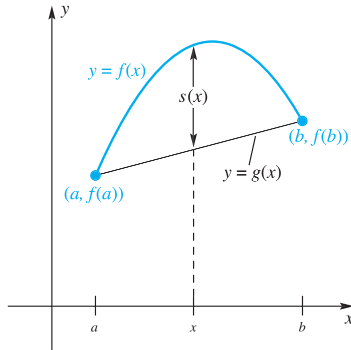


Figura 3

La clave de una demostración

La clave de esta demostración es que c es el valor en el cual $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ y $s'(c) = 0$. Muchas demostraciones tienen una o dos ideas clave; si usted entiende la clave, comprenderá la demostración.

Demostración Nuestra demostración se apoya en un análisis cuidadoso de la función $s(x) = f(x) - g(x)$, introducida en la figura 3. Aquí, $y = g(x)$ es la ecuación de la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Como la recta tiene pendiente $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ y pasa por $(a, f(a))$, la ecuación en la forma punto pendiente es

$$g(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Esto, a su vez, da una fórmula para $s(x)$:

$$s(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Observe de inmediato que $s(b) = s(a) = 0$ y que, para x en (a, b),

$$s'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ahora hacemos una observación crucial. Si supiésemos que hay un número c en (a, b) que satisface $s'(c) = 0$, estaría todo hecho. Pues entonces la última ecuación diría que

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que es equivalente a la conclusión del teorema.

Para ver que $s'(c) = 0$ para alguna c en (a, b), razónese como sigue. Es claro que s es continua en $[a, b]$, ya que es la diferencia de dos funciones continuas. Así, por el teorema de existencia de máximo y mínimo (teorema 3.1A), s debe alcanzar tanto el valor máximo como el mínimo en $[a, b]$. Si ambos valores se presentan en cero, entonces $s(x)$ es idénticamente cero en $[a, b]$, y en consecuencia $s'(x) = 0$ para toda x en (a, b), mucho más de lo que necesitamos.

Si el valor máximo —o el valor mínimo— es diferente de cero, entonces ese valor se alcanza en un punto interior c, ya que $s(a) = s(b) = 0$. Ahora, s tiene derivada en cada punto de (a, b), de modo que, por el teorema del punto crítico (teorema 3.1B), $s'(c) = 0$. Esto es todo lo que necesitábamos saber. ■

Ilustración del teorema

EJEMPLO 1 Encuentre el número c garantizado por el teorema del valor medio para $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $[1, 4]$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

y

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 - 2}{3} = \frac{2}{3}$$

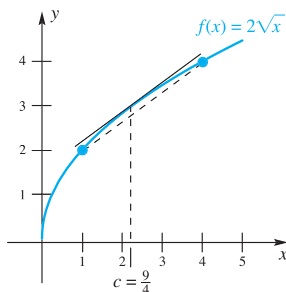


Figura 4

Así, debemos resolver

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{2}{3}$$

La única solución es $c = \frac{9}{4}$ (véase la figura 4). ■

EJEMPLO 2 Sea $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ en $[-1, 2]$. Encuentre todos los números c que satisfagan la conclusión del teorema del valor medio.

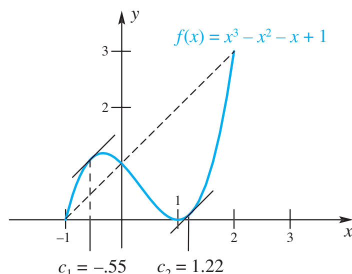


Figura 5

SOLUCIÓN La figura 5 muestra una gráfica de la función f. Con base en esta gráfica, parece que existen dos números c_1 y c_2 con la propiedad que se pide. Ahora encontramos

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

y

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{3 - 0}{3} = 1$$

Por lo tanto, debemos resolver

$$3c^2 - 2c - 1 = 1$$

o, de manera equivalente,

$$3c^2 - 2c - 2 = 0$$

Por la fórmula cuadrática, existen dos soluciones $\left(2 \pm \sqrt{4 + 24}\right)/6$, que corresponden a $c_1 \approx -0.55$ y $c_2 \approx 1.22$. Ambos números están en el intervalo $(-1, 2)$. ■

EJEMPLO 3 Sea $f(x) = x^{2/3}$ en $[-8, 27]$. Demuestre que no se cumple la conclusión del teorema del valor medio y explique por qué.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}, \qquad x \neq 0$$

y

$$\frac{f(27) - f(-8)}{27 - (-8)} = \frac{9 - 4}{35} = \frac{1}{7}$$

Debemos resolver

$$\frac{2}{3}c^{-1/3} = \frac{1}{7}$$

lo cual da

$$c = \left(\frac{14}{3}\right)^3 \approx 102$$

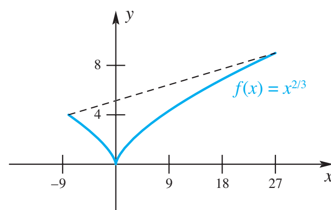


Figura 6

Pero $c = 102$ no pertenece al intervalo $(-8, 27)$ como se requiere. Y como lo sugiere la gráfica de $y = f(x)$ (véase la figura 6), $f'(0)$ no existe, de modo que el problema es que $f(x)$ no es derivable en todo el intervalo $(-8, 27)$. ■

Si la función $s(t)$ representa la posición de un objeto en el instante t, entonces el teorema del valor medio establece que en cualquier intervalo de tiempo existe algún instante para el que la velocidad instantánea es igual a la velocidad promedio.

EJEMPLO 4 Suponga que un objeto tiene una función de posición $s(t) = t^2 - t - 2$. Determine la velocidad promedio sobre el intervalo [3, 6] y encuentre el instante en que la velocidad instantánea es igual a la velocidad promedio.

SOLUCIÓN La velocidad promedio en el intervalo $[3, 6]$ es igual a $(s(6) - s(3))/(6 - 3) = 8$. La velocidad instantánea es $s'(t) = 2t - 1$. Para determinar el punto en donde la velocidad promedio es igual a la velocidad instantánea, igualamos $8 = 2t - 1$, y despejamos t para obtener $t = 9/2$. ■

Uso del teorema En la sección 3.2 prometimos una demostración rigurosa del teorema de monotonía (teorema 3.2A). Éste es el teorema que relaciona el signo de la derivada de una función con el hecho de que la función sea creciente o decreciente.

Demostración del teorema de monotonía Supongamos que f es continua en I y que $f'(x) > 0$ en cada punto x interior de I. Considere cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 de I, con $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio aplicado al intervalo $[x_1, x_2]$, existe un número c en (x_1, x_2) que satisface

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Como $f'(c) > 0$, vemos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$; es decir, $f(x_2) > f(x_1)$. Esto es lo que queremos decir cuando aseguramos que f es creciente en I.

El caso en el que $f'(x) < 0$ en I se maneja de manera análoga. ■

Nuestro siguiente teorema se usará de manera repetida en el capítulo siguiente. En palabras, dice que *dos funciones con la misma derivada difieren en una constante*, posiblemente la constante cero (véase la figura 7).

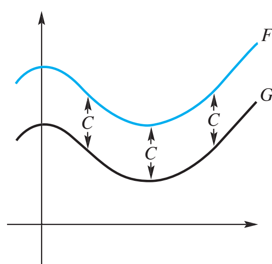


Figura 7

Teorema B

Si $F'(x) = G'(x)$ para toda x en (a, b), entonces existe una constante C, tal que

$$F(x) = G(x) + C$$

para toda x en (a, b).

Geometría y álgebra

Como en la mayoría de los temas de este texto, usted debe intentar ver las cosas desde un punto de vista algebraico y otro geométrico. De manera geométrica, el teorema B dice que si F y G tienen la misma derivada, entonces la gráfica de G es una traslación vertical de la gráfica de F.

Demostración Sea $H(x) = F(x) - G(x)$. Entonces

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$$

para toda x en (a, b). Selecciónese x_1 como algún punto (fijo) en (a, b) y sea x cualquier otro punto allí. La función H satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo cerrado con puntos fronterizos x_1 y x. Así que existe un número c entre x_1 y x, tal que

$$H(x) - H(x_1) = H'(c)(x - x_1)$$

Pero, por hipótesis $H'(c) = 0$. Por lo tanto, $H(x) - H(x_1) = 0$, o de manera equivalente $H(x) = H(x_1)$ para toda x en (a, b). Como $H(x) = F(x) - G(x)$, concluimos que $F(x) - G(x) = H(x_1)$. Ahora sea $C = H(x_1)$, y tenemos la conclusión $F(x) = G(x) + C$. ■

Revisión de conceptos

1. El teorema del valor medio para derivadas dice que si f es ________ en $[a, b]$ y derivable en ________ entonces existe un punto c en (a, b) tal que ________.

2. La función $f(x) = |\text{sen } x|$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 1]$, pero no en el intervalo $[-1, 1]$ porque ________.

3. Si dos funciones F y G tienen la misma derivada en el intervalo (a, b), entonces existe una constante C tal que ________.

4. Como $D_x(x^4) = 4x^3$, se sigue que toda función F que satisface $F'(x) = 4x^3$ tiene la forma $F(x) =$ ________.

Conjunto de problemas 3.6

En cada uno de los problemas del 1 al 21 se define una función y se da un intervalo cerrado. Decida si el teorema del valor medio se aplica a la función dada en el intervalo que se da. Si es así, encuentre todos los posibles valores de c; si no, establezca la razón. En cada problema bosqueje la gráfica de la función dada en el intervalo dado.

1. $f(x) = |x|; [1, 2]$ **2.** $g(x) = |x|; [-2, 2]$

3. $f(x) = x^2 + x; [-2, 2]$ **4.** $g(x) = (x + 1)^3; [-1, 1]$

5. $H(s) = s^2 + 3s - 1; [-3, 1]$

6. $F(x) = \frac{x^3}{3}; [-2, 2]$

7. $f(z) = \frac{1}{3}(z^3 + z - 4); [-1, 2]$

8. $F(t) = \frac{1}{t - 1}; [0, 2]$ **9.** $h(x) = \frac{x}{x - 3}; [0, 2]$

10. $f(x) = \frac{x - 4}{x - 3}; [0, 4]$ **11.** $h(t) = t^{2/3}; [0, 2]$

12. $h(t) = t^{2/3}; [-2, 2]$ **13.** $g(x) = x^{5/3}; [0, 1]$

14. $g(x) = x^{5/3}; [-1, 1]$ **15.** $S(\theta) = \operatorname{sen} \theta; [-\pi, \pi]$

16. $C(\theta) = \csc \theta; [-\pi, \pi]$ **17.** $T(\theta) = \tan \theta; [0, \pi]$

18. $f(x) = x + \frac{1}{x}; \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ **19.** $f(x) = x + \frac{1}{x}; [1, 2]$

20. $f(x) = [\![x]\!]; [1, 2]$ **21.** $f(x) = x + |x|; [-2, 1]$

22. **(Teorema de Rolle)** *Si f es continua en* $[a, b]$ *y derivable en* (a, b) *y si* $f(a) = f(b)$*, entonces existe al menos un número c en* (a, b)*, tal que* $f'(c) = 0$*.* Demuestre que el Teorema de Rolle, es sólo un caso especial del teorema del valor medio. [Michel Rolle (1652–1719) fue un matemático francés].

23. Para la función graficada en la figura 8 encuentre (de manera aproximada) todos los puntos c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo $[0, 8]$.

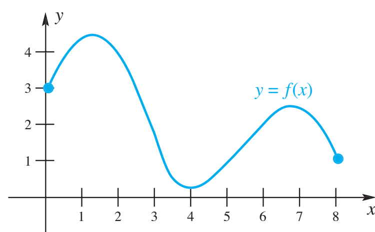


Figura 8

24. Demuestre que si f es la función cuadrática definida por $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$, entonces el número c del teorema del valor medio siempre es el punto medio del intervalo dado $[a, b]$

25. Demuestre que si f es continua en (a, b) y si $f'(x)$ existe y satisface $f'(x) > 0$, excepto en un punto x_0 en (a, b), entonces f es creciente en (a, b). *Sugerencia:* considere f, por separado, en cada uno de los intervalos $(a, x_0]$ y $[x_0, b)$.

26. Utilice el problema 25 para demostrar que cada una de las siguientes funciones son crecientes en $(-\infty, \infty)$.

(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = x^5$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

27. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que $s = 1/t$ decrece en cualquier intervalo donde esté definida.

28. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que $s = 1/t^2$ decrece en cualquier intervalo a la derecha del origen.

29. Demuestre que si $F'(x) = 0$ para toda x en (a, b), entonces existe una constante C tal que $F(x) = C$ para toda x en (a, b). *Sugerencia:* sea $G(x) = 0$ y aplique el teorema B.

30. Suponga que usted sabe que $\cos(0) = 1$, $\operatorname{sen}(0) = 0$, $D_x \cos x = -\operatorname{sen} x$ y $D_x \operatorname{sen} x = \cos x$, pero no sabe nada más acerca de las funciones seno y coseno. Demuestre que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. *Sugerencia:* sea $F(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$ y utilice el problema 29.

31. Demuestre que si $F'(x) = D$ para toda x en (a, b), entonces existe una constante C tal que $F(x) = Dx + C$ para toda x en (a, b). *Sugerencia:* sea $G(x) = Dx$ y aplique el teorema B.

32. Suponga que $F'(x) = 5$ y $F(0) = 4$. Encuentre una fórmula para $F(x)$. *Sugerencia:* véase el problema 31.

33. Demuestre: sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos y si $f'(x) \neq 0$ para toda x en (a, b), entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una y sólo una solución entre a y b. *Sugerencia:* use los teoremas del valor medio y de Rolle (véase el problema 22).

34. Demuestre que $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 1 = 0$ tiene exactamente una solución en cada uno de los intervalos $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(4, 5)$. *Sugerencia:* aplique el problema 33.

35. Suponga que f tiene derivada en el intervalo I. Demuestre que entre distintos ceros sucesivos de f' sólo puede haber a lo más un cero de f. *Sugerencia:* trate de demostrar por contradicción y utilice el Teorema de Rolle (problema 22).

36. Sea g continua en $[a, b]$ y suponga que $g''(x)$ existe para toda x en (a, b). Demuestre que si existen tres valores de x en $[a, b]$ para los cuales $g(x) = 0$, entonces existe al menos un valor de x en (a, b) tal que $g''(x) = 0$.

37. Sea $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$. Utilizando el problema 36, demuestre que existe a lo más un valor en el intervalo $[0, 4]$ donde $f''(x) = 0$ y dos valores en el mismo intervalo donde $f'(x) = 0$.

38. Demuestre que si $|f'(x)| \leq M$ para toda x en (a, b) y si x_1 y x_2 son cualesquiera dos puntos en (a, b) entonces

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$$

Nota: se dice que una función que satisface la desigualdad anterior satisface una *condición de Lipschitz* con constante M. [Rudolph Lipschitz (1832–1903) fue un matemático alemán].

39. Demuestre que $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ satisface una condición de Lipschitz con constante 2 en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Véase el problema 38.

40. Se dice que una función f es **no decreciente** en un intervalo I, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ para x_1 y x_2 en I. De manera análoga, f es **no creciente** en I, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ para x_1 y x_2 en I.

(a) Bosqueje la gráfica de una función no decreciente, pero no creciente.

(b) Haga la gráfica de una función no creciente, pero no decreciente.

41. Demuestre que si f es continua en I y si $f'(x)$ existe y satisface $f'(x) \geq 0$ en el interior de I, entonces f es no decreciente en I. De manera análoga, si $f'(x) \leq 0$, entonces f es no creciente en I.

42. Demuestre que $f(x) \geq 0$ y $f'(x) \geq 0$ en I, entonces f^2 es no decreciente en I.

43. Demuestre que si $g'(x) \leq h'(x)$ para toda x en (a, b) entonces

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_2) - g(x_1) \leq h(x_2) - h(x_1)$$

para toda x_1 y x_2 en (a, b). *Sugerencia:* aplique el problema 41 con $f(x) = h(x) - g(x)$.

44. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}\right) = 0$$

45. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que

$$|\text{sen } x - \text{sen } y| \leq |x - y|$$

46. Suponga que, en una carrera, el caballo A y el caballo B inician en el mismo punto y terminan empatados. Demuestre que sus velocidades fueron idénticas en algún instante de la carrera.

47. En el problema 46, suponga que los dos caballos cruzaron la meta juntos a la misma velocidad. Demuestre que tuvieron la misma aceleración en algún instante.

48. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que la gráfica de una función cóncava hacia arriba, f, siempre está por arriba de su recta tangente; esto es, demuestre que

$$f(x) > f(c) + f'(c)(x - c), \qquad x \neq c$$

49. Demuestre que si $|f(y) - f(x)| \leq M(y - x)^2$ para toda x y y, entonces f es una función constante.

50. Proporcione un ejemplo de una función f que sea continua en $[0, 1]$, derivable en $(0, 1)$ y *no* derivable en $[0, 1]$ y que tenga una recta tangente en cada punto de $[0, 1]$.

51. John recorre 112 millas en 2 horas y asegura que nunca excedió la velocidad de 55 millas por hora. Utilice el teorema del valor medio para refutar la afirmación de John. *Sugerencia*: sea $f(t)$ la distancia recorrida en el tiempo t.

52. Un automóvil está parado en una caseta de peaje. Dieciocho minutos después, en un punto a 20 millas más adelante, cronometra 60 millas por hora. Bosqueje una gráfica posible de v contra t. Trace una posible gráfica de la distancia recorrida s contra t. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que el automóvil excedió la velocidad límite de 60 millas por hora en algún momento luego que dejó la caseta de peaje, pero antes de que cronometrara 60 millas por hora.

53. Un automóvil está parado en una caseta de peaje. Veinte minutos después, en un punto a 20 millas de la caseta, dicho vehículo cronometró 60 millas por hora. Explique por qué el automóvil debe haber excedido 60 millas por hora en algún momento después de dejar la caseta, pero antes de que cronometrara 60 millas por hora.

54. Demuestre que si la función de posición de un objeto está dada por $s(t) = at^2 + bt + c$, entonces la velocidad promedio en el intervalo $[A, B]$ es igual a la velocidad instantánea en el punto medio de $[A, B]$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** continua; (a, b); $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ **2.** $f'(0)$ no existe **3.** $F(x) = G(x) + C$ **4.** $x^4 + C$

3.7 Solución numérica de ecuaciones

En matemáticas y ciencias, con frecuencia debemos hallar las raíces (o soluciones) de una ecuación $f(x) = 0$. Si $f(x)$ es un polinomio lineal o cuadrático, existen fórmulas bien conocidas para escribir las soluciones exactas. Pero para otras ecuaciones algebraicas y ciertamente para ecuaciones que incluyen funciones trascendentes, es raro contar con fórmulas para las soluciones exactas. En tales casos, ¿qué puede hacerse?

Existe un método general para resolver problemas, conocido por todas las personas ingeniosas. Dada una taza de té, agregamos azúcar un poco más cada vez hasta que sabe bien. Dado un tapón demasiado grande para un agujero, lo rebajamos hasta ajustarlo. Cambiamos la solución un poco cada vez, a fin de mejorar la precisión hasta que estamos satisfechos. A esto, los matemáticos le llaman *método de aproximaciones sucesivas* o *método de iteraciones*.

En esta sección presentamos tres de tales métodos para resolver ecuaciones: el de bisección, el de Newton y el de punto fijo. Los tres están diseñados para aproximar raíces reales de $f(x) = 0$ y requiere de muchos cálculos. Necesitará tener a la mano su calculadora.

El método de bisección En el ejemplo 7 de la sección 1.6 vimos cómo utilizar el teorema del valor intermedio para aproximar una solución de $f(x) = 0$, por medio de bisecar de manera sucesiva un intervalo que, se sabe, tiene una solución. Este método de bisección tiene dos grandes virtudes: simplicidad y confiabilidad. También tiene un vicio importante, la gran cantidad de pasos necesarios para alcanzar la precisión deseada (también conocido como lentitud de convergencia).

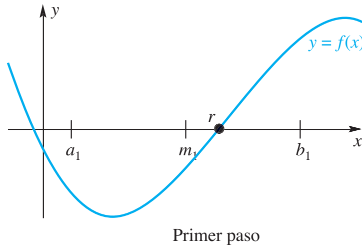


Figura 1

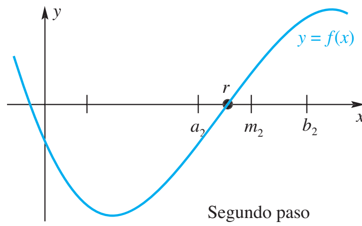


Figura 2

Ponga en marcha el proceso y bosqueje la gráfica de f, que se supone es una función continua (véase la figura 1). Una raíz real de $f(x) = 0$ es un punto (técnicamente, la abscisa de un punto) en donde la gráfica cruza el eje x. Como primer paso para localizar este punto, ubique dos puntos, $a_1 < b_1$, en los que esté seguro de que f tiene signos opuestos; si f tiene signos opuestos en a_1 y b_1, entonces el producto $f(a_1) \cdot f(b_1)$ será negativo. (Trate de elegir a_1 y b_1 en lados opuestos de su mejor estimación de r). El teorema del valor intermedio garantiza la existencia de una raíz entre a_1 y b_1. Ahora evalúe f en el punto medio $m_1 = (a_1 + b_1)/2$ de $[a_1, b_1]$. El número m_1 es nuestra primera aproximación para r.

Entonces $f(m_1) = 0$, en cuyo caso hemos terminado, o $f(m_1)$ difiere en signo de $f(a_1)$ o $f(b_1)$. Denote uno de los subintervalos $[a_1, m_1]$ o $[m_1, b_1]$ en el que cambia el signo por medio del símbolo $[a_2, b_2]$, y evalúe f en su punto medio $m_2 = (a_2 + b_2)/2$ (véase la figura 2). El número m_2 es nuestra segunda aproximación a r.

Repita el proceso y determine de este modo una sucesión de aproximaciones $m_1, m_2, m_3, \ldots$, y subintervalos $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \ldots$, de modo que cada subintervalo contenga a la raíz r y cada uno tenga la mitad de la longitud de su predecesor. Deténgase cuando r quede determinada en la precisión deseada; esto es, cuando $(b_n - a_n)/2$ sea menor que el error permitido, que denotaremos por E.

Algoritmo **Método de bisección**

Sea $f(x)$ una función continua, y sean a_1, b_1 números que satisfacen $a_1 < b_1$ y $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$. Suponga que E denota la cota deseada para el error $|r - m_n|$. Repita los pasos del 1 al 5 para $n = 1, 2, \ldots$ hasta que $h_n < E$:

1. Calcule $m_n = (a_n + b_n)/2$.
2. Calcule $f(m_n)$ y si $f(m_n) = 0$, entonces DETÉNGASE.
3. Calcule $h_n = (b_n - a_n)/2$
4. Si $f(a_n) \cdot f(m_n) < 0$, entonces haga $a_{n+1} = a_n$ y $b_{n+1} = m_n$.
5. Si $f(a_n) \cdot f(m_n) > 0$, entonces haga $a_{n+1} = m_n$ y $b_{n+1} = b_n$.

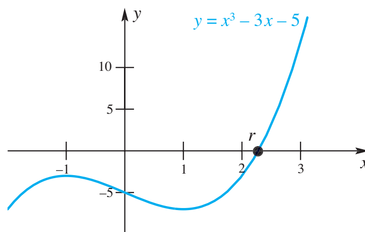


Figura 3

EJEMPLO 1 Determine la raíz real de $f(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$ con una precisión de 0.0000001.

SOLUCIÓN Primero bosquejamos la gráfica de $y = x^3 - 3x - 5$ (figura 3) y, observando que cruza el eje x entre 2 y 3, comenzamos con $a_1 = 2$ y $b_1 = 3$.

Paso 1: $m_1 = (a_1 + b_1)/2 = (2 + 3)/2 = 2.5$

Paso 2: $f(m_1) = f(2.5) = 2.5^3 - 3 \cdot 2.5 - 5 = 3.125$

Paso 3: $h_1 = (b_1 - a_1)/2 = (3 - 2)/2 = 0.5$

Paso 4: Como

$$f(a_1) \cdot f(m_1) = f(2)f(2.5) = (-3)(3.125) = -9.375 < 0$$

hacemos $a_2 = a_1 = 2$ y $b_2 = m_1 = 2.5$.

Paso 5: La condición $f(a_n) \cdot f(m_n) > 0$ es falsa.

Ahora incrementamos n de modo que tenga el valor 2 y repetimos estos pasos. Podemos continuar este proceso para obtener las entradas de la siguiente tabla:

n	h_n	m_n	$f(m_n)$
1	0.5	2.5	3.125
2	0.25	2.25	−0.359
3	0.125	2.375	1.271
4	0.0625	2.3125	0.429
5	0.03125	2.28125	0.02811
6	0.015625	2.265625	−0.16729
7	0.0078125	2.2734375	−0.07001
8	0.0039063	2.2773438	−0.02106
9	0.0019531	2.2792969	0.00350
10	0.0009766	2.2783203	−0.00878
11	0.0004883	2.2788086	−0.00264
12	0.0002441	2.2790528	0.00043
13	0.0001221	2.2789307	−0.00111
14	0.0000610	2.2789918	−0.00034
15	0.0000305	2.2790224	0.00005
16	0.0000153	2.2790071	−0.00015
17	0.0000076	2.2790148	−0.00005
18	0.0000038	2.2790187	−0.000001
19	0.0000019	2.2790207	0.000024
20	0.0000010	2.2790197	0.000011
21	0.0000005	2.2790192	0.000005
22	0.0000002	2.2790189	0.0000014
23	0.0000001	2.2790187	−0.0000011
24	0.0000001	2.2790188	0.0000001

Concluimos que $r = 2.2790188$ con un error de 0.0000001 cuando mucho. ■

El ejemplo 1 ilustra la desventaja del método de bisección. Las aproximaciones $m_1, m_2, m_3, \ldots$, convergen muy lentamente a la raíz r. Pero convergen; esto es, $\lim_{n\to\infty} m_n = r$. El método funciona, y tenemos en el paso n una buena cota para el error $E_n = r - m_n$, a saber, $|E_n| \le h_n$.

Método de Newton Sigamos considerando el problema de resolver la ecuación $f(x) = 0$ para una raíz r. Suponga que f es derivable, de modo que la gráfica de $y = f(x)$ tenga una recta tangente en cada punto. Si podemos encontrar una primera aproximación x_1 para r, ya sea a través de la gráfica o por cualquier otro medio (véase la figura 4), entonces una mejor aproximación x_2 tendría que estar en la intersección de la tangente en $(x_1, f(x_1))$ con el eje x. Entonces, utilizando x_2 como una aproximación, podemos determinar una mejor aproximación x_3, y así sucesivamente.

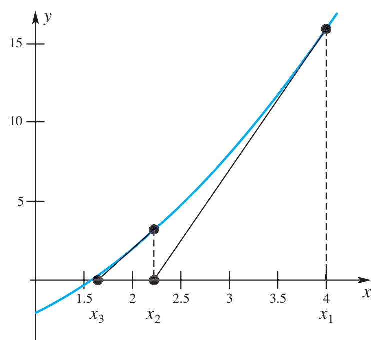


Figura 4

El proceso puede mecanizarse de modo que sea fácil hacerlo en una calculadora. La ecuación de la recta tangente en $(x_1, f(x_1))$ es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

y x_2, su intercepción con el eje x, se encuentra haciendo $y = 0$ y despejando a x. El resultado es

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Más en lo general, tenemos el algoritmo siguiente, también denominado *fórmula recursiva* o *esquema de iteración*.

Algoritmo **Método de Newton**

Sea $f(x)$ una función derivable y sea x_1 una aproximación inicial a la raíz r de $f(x)=0$. Sea E una cota para el error $|r-x_n|$.

Repita el paso siguiente para $n=1,2,\ldots$, hasta que $|x_{n+1}-x_n|<E$:

1. $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

EJEMPLO 2 Utilice el método de Newton para determinar la raíz real r de $f(x)=x^3-3x-5=0$ con siete decimales de precisión.

SOLUCIÓN Ésta es la misma ecuación que se consideró en el ejemplo 1. Utilicemos $x_1=2.5$ como la primera aproximación a r, como lo hicimos antes. Como $f(x)=x^3-3x-5$ y $f'(x)=3x^2-3$, el algoritmo es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3-3x_n-5}{3x_n^2-3} = \frac{2x_n^3+5}{3x_n^2-3}$$

Obtenemos la siguiente tabla.

n	x_n
1	2.5
2	2.30
3	2.2793
4	2.2790188
5	2.2790188

Después de sólo cuatro pasos obtenemos una repetición de los primeros 8 dígitos. Sentimos confianza en reportar que $r \approx 2.2790188$, con quizá un poco de duda acerca del último dígito. ■

Algoritmos

Los algoritmos han formado parte de las matemáticas desde que las personas aprendieron a hacer las divisiones; pero son las ciencias de la computación las que han dado al pensamiento algorítmico su popularidad actual. ¿Qué es un algoritmo? Donald Knuth, decano de los científicos de la computación, responde:

"Un algoritmo es una secuencia de reglas definidas con precisión, que indican la forma de producir una información de salida específica a partir de una información de entrada dada, en un número finito de pasos".

¿Y qué son las ciencias de la computación? De acuerdo con Knuth:

"Son el estudio de los algoritmos".

EJEMPLO 3 Utilice el método de Newton para determinar la raíz real positiva r de $f(x)=2-x+\operatorname{sen} x=0$.

SOLUCIÓN La gráfica de $y=2-x+\operatorname{sen} x$ se muestra en la figura 5. Utilizaremos el valor inicial $x_1=2$. Como $f'(x)=-1+\cos x$, la iteración se convierte en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2-x_n+\operatorname{sen} x_n}{-1+\cos x_n}$$

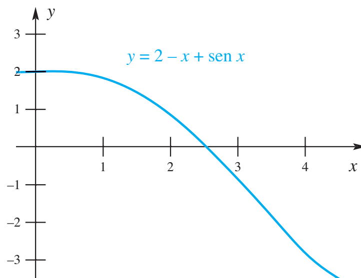


Figura 5

que conduce a la siguiente tabla:

n	x_n
1	2.0
2	2.6420926
3	2.5552335
4	2.5541961
5	2.5541960
6	2.5541960

Al cabo de sólo cinco pasos, obtenemos una repetición de los siete decimales. Concluimos que $r \approx 2.5541960$. ■

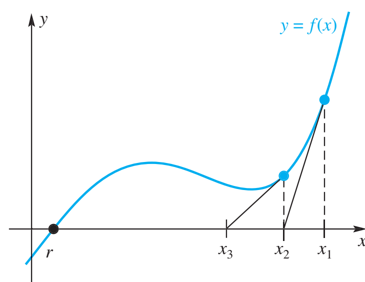


Figura 6

El método de Newton crea una *sucesión* aproximaciones sucesivas a la raíz. (En la sección 1.5 mencionamos brevemente las sucesiones). Con frecuencia, el método de Newton produce una sucesión $\{x_n]$ que converge a la raíz de $f(x) = 0$, esto es $\lim_{n\to\infty} x_n = r$. Sin embargo, éste no siempre es el caso. La figura 6 ilustra lo que puede ir mal (también véase el problema 22). Para la función de la figura 6, la dificultad es que x_1 no está lo suficientemente cerca de r como para iniciar un proceso convergente. Otras dificultades surgen si $f'(x)$ es cero o no está definida en o cerca de r. Cuando el método de Newton falla en producir aproximaciones que convergen a la solución, entonces usted puede reintentar dicho método con un punto inicial diferente o utilizar otro, como el método de bisección.

El algoritmo de punto fijo El algoritmo de punto fijo es sencillo y directo, pero con frecuencia funciona.

Suponga que una ecuación puede escribirse en la forma $x = g(x)$. Resolver esta ecuación es determinar un número r que no es alterado por la función g. A tal número lo denominamos un **punto fijo** de g. Para determinar este número, proponemos el siguiente algoritmo. Haga una primera estimación x_1. Luego haga $x_2 = g(x_1), x_3 = g(x_2)$, y así sucesivamente. Si tenemos suerte, x_n convergerá a la raíz r cuando $n \to \infty$.

Algoritmo **Algoritmo de punto fijo**

Sea $g(x)$ una función continua, y sea x_1 una aproximación inicial a la raíz r de $x = g(x)$. Denotemos con E una cota para el error $|r - x_n|$.

Repita el siguiente paso para $n = 1, 2, \ldots$, hasta que $|x_{n+1} - x_n| < E$.

1. $x_{n+1} = g(x_n)$

EJEMPLO 4 Utilice el algoritmo de punto fijo para aproximar la solución de $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x+1} = 0$.

SOLUCIÓN Escribimos $x^2 = 2\sqrt{x+1}$, que conduce a $x = \pm\left(2\sqrt{x+1}\right)^{1/2}$. Como sabemos que la solución es positiva, tomamos la raíz cuadrada positiva y escribimos la iteración como

$$x_{n+1} = \left(2\sqrt{x_n + 1}\right)^{1/2} = \sqrt{2}\,(x_n + 1)^{1/4}$$

La figura 7 sugiere que el punto de intersección de las curvas $y = x$ y $y = \sqrt{2}\left(x+1\right)^{1/4}$ ocurre entre 1 y 2, quizá más cerca de 2, por lo que tomamos $x_1 = 2$ como nuestro punto de inicio. Esto lleva a la siguiente tabla. La solución es aproximadamente 1.8350867.

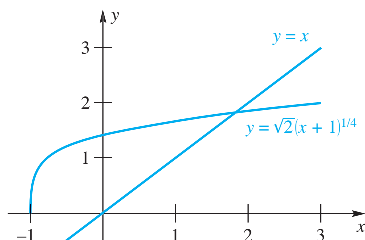


Figura 7

n	x_n	n	x_n
1	2.0	7	1.8350896
2	1.8612097	8	1.8350871
3	1.8392994	9	1.8350868
4	1.8357680	10	1.8350867
5	1.8351969	11	1.8350867
6	1.8351045	12	1.8350867

■

EJEMPLO 5 Resuelva $x = 2\cos x$ por medio del algoritmo de punto fijo.

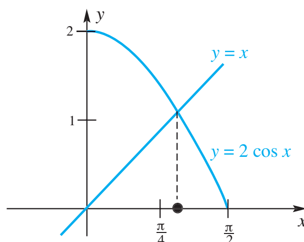


Figura 8

SOLUCIÓN Primero observe que al resolver esta ecuación es equivalente a resolver el par de ecuaciones $y = x$ y $y = 2\cos x$. Así, para obtener nuestro valor inicial graficamos estas dos ecuaciones (véase la figura 8) y observe que las dos curvas se cortan en aproximadamente $x = 1$. Al tomar $x_1 = 1$ y aplicar el algoritmo $x_{n+1} = 2\cos x_n$, obtenemos el resultado en la siguiente tabla.

n	x_n	n	x_n
1	1	6	1.4394614
2	1.0806046	7	0.2619155
3	0.9415902	8	1.9317916
4	1.1770062	9	−0.7064109
5	0.7673820	10	1.5213931

Es claro que el proceso es inestable, aunque nuestra estimación inicial está muy cerca de la raíz real.

Intentemos con otro enfoque. Reescribimos la ecuación $x = 2\cos x$ como $x = (x + 2\cos x)/2$ y utilizamos el algoritmo

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2\cos x_n}{2}$$

Este proceso produce una sucesión convergente que se muestra en la siguiente tabla. (La oscilación en el último dígito se debe probablemente a errores de redondeo).

n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	1	7	1.0298054	13	1.0298665
2	1.0403023	8	1.0298883	14	1.0298666
3	1.0261107	9	1.0298588	15	1.0298665
4	1.0312046	10	1.0298693	16	1.0298666
5	1.0293881	11	1.0298655		
6	1.0300374	12	1.0298668		

■

Ahora planteamos una pregunta obvia. ¿Por qué el segundo algoritmo condujo a una sucesión convergente, mientras que el primero no? Que funcione o no el algoritmo de punto fijo depende de dos factores. Uno es la formulación de la ecuación $x = g(x)$. El ejemplo 5 demuestra que una ecuación como $x = 2\cos x$ puede reescribirse en una forma que da una sucesión diferente de aproximaciones. En el ejemplo 5, la reformulación fue $x = (x + 2\cos x)/2$. En general, puede haber muchas formas de escribir la ecuación y el truco es encontrar una que funcione. Otro factor que afecta si el algoritmo de punto fijo converge es la cercanía del punto inicial x_1 a la raíz r. Como sugerimos para el método de Newton, si falla el algoritmo de punto fijo con un punto inicial, puede intentar con otro.

Revisión de conceptos

1. Las virtudes del método de bisección son su simplicidad y confiabilidad; su vicio es su _______.

2. Si f es continua en $[a, b]$, y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces hay una _______ de $f(x) = 0$ entre a y b. Esto se deduce del teorema _______.

3. El método de bisección, el método de Newton y el algoritmo de punto fijo son ejemplos de _______; esto es, proporcionan una sucesión finita de pasos que, si se siguen, producirán una raíz de una ecuación con una precisión deseada.

4. Un punto x que satisface $g(x) = x$ se denomina un _______ de g.

Conjunto de problemas 3.7

C *En los problemas del 1 al 4 utilice el método de bisección para aproximar la raíz real de la ecuación dada en el intervalo que se indica. Cada respuesta debe ser precisa a dos decimales.*

1. $x^3 + 2x - 6 = 0; [1, 2]$ **2.** $x^4 + 5x^3 + 1 = 0; [-1, 0]$

3. $2\cos x - \operatorname{sen} x = 0; [1, 2]$

4. $x - 2 + 2\cos x = 0; [1, 2]$

C *En los problemas del 5 al 14 utilice el método de Newton para aproximar la raíz indicada de la ecuación que se da, con una precisión de cinco decimales. Comience por bosquejar una gráfica.*

5. La mayor raíz de $x^3 + 6x^2 + 9x + 1 = 0$

6. La raíz real de $7x^3 + x - 5 = 0$

7. La raíz más grande de $x - 2 + 2\cos x = 0$ (véase el problema 4)

8. La raíz positiva más pequeña de $2\cos x - \operatorname{sen} x = 0$ (véase el problema 3)

9. La raíz de $\cos x = 2x$

10. La raíz de $2x - \operatorname{sen} x = 1$

11. Todas las raíces reales de $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 8 = 0$

12. Todas las raíces reales de $x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 24x - 8 = 0$

13. La raíz positiva de $2x^2 - \operatorname{sen} x = 0$

14. La raíz positiva más pequeña de $2\cot x = x$

C **15.** Utilice el método de Newton para calcular $\sqrt[3]{6}$ con cinco decimales de precisión. *Sugerencia*: resuelva $x^3 - 6 = 0$

C **16.** Utilice el método de Newton para calcular $\sqrt[4]{47}$ con cinco decimales de precisión.

GC *En los problemas del 17 al 20 aproxime los valores de x que proporcionan valores máximo y mínimo de la función en los intervalos que se indican.*

17. $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x; [-1, 1]$

18. $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^4 + 1}; [-4, 4]$

19. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}; [\pi, 3\pi]$

20. $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}; [0, 4\pi]$

C **21.** La ecuación de Kepler $x = m + E \operatorname{sen} x$ es importante en astronomía. Utilice el algoritmo de punto fijo para resolver esta ecuación para x cuando $m = 0.8$ y $E = 0.2$.

22. Bosqueje la gráfica de $y = x^{1/3}$. Es obvio que su única intercepción con el eje x es cero. Convénzase de que el método de Newton no converge. Explique por qué falla.

23. En las compras a plazos, a uno le gustaría encontrar la tasa real de interés (tasa efectiva), pero por desgracia esto incluye resolver una ecuación complicada. Si hoy uno compra un artículo cuyo valor es $\$P$ y acuerda pagarlo con pagos de $\$R$ al final de cada mes durante k meses, entonces

$$P = \frac{R}{i}\left[1 - \frac{1}{(1 + i)^k}\right]$$

donde i es la tasa de interés mensual. Tom compró un automóvil usado por $2000 y acordó pagarlo con abonos de $100 al final de cada uno de los siguientes 24 meses.

(a) Demuestre que i satisface la ecuación

$$20i(1 + i)^{24} - (1 + i)^{24} + 1 = 0$$

(b) Demuestre que el método de Newton para esta ecuación se reduce a

$$i_{n+1} = i_n - \left[\frac{20i_n^2 + 19i_n - 1 + (1 + i_n)^{-23}}{500i_n - 4}\right]$$

C (c) Determine i, con una precisión de cinco decimales, iniciando con $i = 0.012$ y luego proporcione la tasa anual como un porcentaje ($r = 1200i$).

24. Al aplicar el método de Newton para resolver $f(x) = 0$, por lo común, uno puede decir si la sucesión converge simplemente al observar los números $x_1, x_2, x_3,$... Pero, incluso cuando converge, digamos en $\bar{x}$, ¿podemos estar seguros de que $\bar{x}$ es una solución? Demuestre que la respuesta es sí, siempre que f y f' sean continuas en $\bar{x}$ y $f'(\bar{x}) \neq 0$.

C *En los problemas del 25 al 28 utilice el algoritmo de punto fijo con x_1, como se indica, para resolver las ecuaciones con cinco decimales de precisión.*

25. $x = \dfrac{3}{2}\cos x; x_1 = 1$

26. $x = 2 - \operatorname{sen} x; x_1 = 2$

27. $x = \sqrt{2.7 + x}; x_1 = 1$

28. $x = \sqrt{3.2 + x}; x_1 = 47$

GC **29.** Considere la ecuación $x = 2(x - x^2) = g(x)$.

(a) Bosqueje la gráfica de $y = x$ y $y = g(x)$; utilice el mismo sistema de coordenadas y con ello ubique de manera aproximada la raíz positiva de $x = g(x)$.

(b) Intente resolver la ecuación por medio del algoritmo de punto fijo iniciando con $x_1 = 0.7$.

(c) Resuelva la ecuación de forma algebraica.

GC **30.** Siga las instrucciones del problema 29 para $x = 5(x - x^2) = g(x)$.

C **31.** Considere $x = \sqrt{1 + x}$.

(a) Aplique el algoritmo de punto fijo iniciando con $x_1 = 0$ para determinar x_2, x_3, x_4 y x_5.

(b) Resuelva de forma algebraica para x en $x = \sqrt{1 + x}$.

(c) Evalúe $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$.

C **32.** Considere $x = \sqrt{5 + x}$.

(a) Aplique el algoritmo de punto fijo iniciando con $x_1 = 0$ para determinar x_2, x_3, x_4 y x_5.

(b) De forma algebraica resuelva para x en $x = \sqrt{5 + x}$.

(c) Evalúe $\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \cdots}}}$.

C **33.** Considere $x = 1 + \dfrac{1}{x}$.

(a) Aplique el algoritmo de punto fijo iniciando con $x_1 = 1$ para determinar x_2, x_3, x_4 y x_5.

(b) Resuelva de forma algebraica para x en $x = 1 + \dfrac{1}{x}$.

(c) Evalúe la expresión siguiente. (Una expresión como ésta se denomina **fracción continua**).

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

EXPL **34.** Considere la ecuación $x = x - f(x)/f'(x)$ y suponga que $f'(x) \neq 0$ en un intervalo $[a, b]$.

(a) Demuestre que si r está en $[a, b]$, entonces r es una raíz de la ecuación $x = x - f(x)/f'(x)$, si y sólo si $f(r) = 0$.

(b) Demuestre que el método de Newton es un caso especial del algoritmo de punto fijo, en el que $g'(r) = 0$.

35. Experimente con el algoritmo

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

utilizando diferentes valores de a.

(a) Establezca una conjetura acerca de lo que calcula este algoritmo.

(b) Pruebe su conjetura.

C *Después de derivar y hacer el resultado igual a cero, muchos problemas prácticos de máximos y mínimos conducen a una ecuación que no puede resolverse de manera exacta. Para los problemas siguientes, utilice un método numérico para aproximar la solución al problema.*

36. Un rectángulo tiene dos vértices en el eje x y los otros dos en la curva $y = \cos x$, con $-\pi/2 < x < \pi/2$. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de este tipo con área máxima? (Véase la figura 24 de la sección 3.4).

37. Dos pasillos convergen en ángulo recto, como se muestra en la figura 6 de la sección 3.4, excepto que los anchos de los pasillos son de 8.6 y 6.2 pies. ¿Cuál es la longitud de la varilla delgada más larga que puede transportarse alrededor de la esquina?

38. Un pasillo de 8 pies de ancho da vuelta como se muestra en la figura 9. ¿Cuál es la longitud de la varilla delgada más larga que puede transportarse alrededor de la esquina?

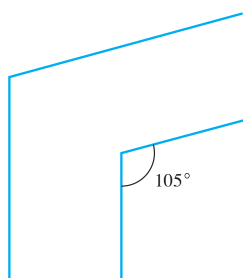


Figura 9

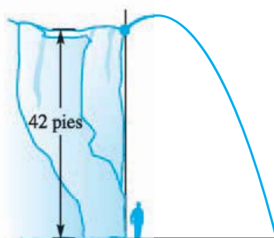


Figura 10

39. Un objeto lanzado desde el borde de un acantilado de 42 pies sigue una trayectoria dada por $y = -\frac{2x^2}{25} + x + 42$. (Véase la figura 10.) Un observador está parado a 3 pies de la base del acantilado.

(a) Determine la posición del objeto cuando está más cerca del observador.

(b) Determine la posición del objeto cuando está más alejado del observador.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** lentitud de convergencia **2.** raíz: del valor intermedio **3.** algoritmos **4.** punto fijo

3.8 Antiderivadas

La mayoría de las operaciones matemáticas con que trabajamos vienen en pares de inversas: suma y resta, multiplicación y división, y exponenciación y extracción de raíces. En cada caso, la segunda operación deshace la primera y viceversa. Una razón para nuestro interés en las operaciones inversas es su utilidad en la resolución de ecuaciones. Por ejemplo, la resolución de $x^3 = 8$ implica el uso de extraer raíces. En este capítulo y en el anterior hemos estudiado derivación. Si queremos resolver ecuaciones que incluyan derivadas necesitaremos su inversa, denominada *antiderivación* o *integración*.

Definición

Llamamos a F una **antiderivada** de f en el intervalo I si $D_xF(x) = f(x)$ en I; esto es, si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

En nuestra definición utilizamos *una* antiderivada, en lugar de *la* antiderivada. Pronto verá por qué.

EJEMPLO 1 Encuentre una antiderivada de la función $f(x) = 4x^3$ en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN Buscamos una función F que satisfaga $F'(x) = 4x^3$ para toda x real. De nuestra experiencia con derivación, sabemos que $F(x) = x^4$ es una de tales funciones. ■

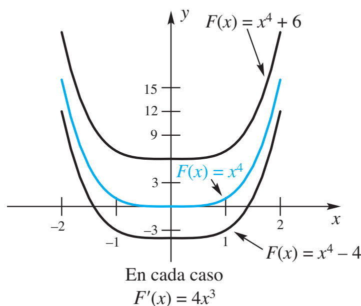


Figura 1

Un momento de reflexión sugerirá otras soluciones para el ejemplo 1. La función $F(x) = x^4 + 6$ también satisface $F'(x) = 4x^3$; también es una antiderivada de $f(x) = 4x^3$. De hecho, $F(x) = x^4 + C$, donde C es cualquier constante, es una antiderivada de $4x^3$ en $(-\infty, \infty)$ (véase la figura 1).

Ahora planteamos una pregunta importante. ¿Toda derivada de $f(x) = 4x^3$ es de la forma $F(x) = x^4 + C$? La respuesta es sí. Esto se deduce del teorema 3.6B, el cual establece que si dos funciones tienen la misma derivada, deben diferir en una constante.

Ésta es nuestra conclusión: si una función f tiene una antiderivada, tendrá una familia de ellas, y cada miembro de esta familia puede obtenerse de uno de ellos mediante la suma de una constante adecuada. A esta familia de funciones le llamamos la **antiderivada general** de f. Después de acostumbrarnos a esta noción, con frecuencia omitiremos el adjetivo *general*.

EJEMPLO 2 Encuentre la antiderivada general de $f(x) = x^2$ en $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN La función $F(x) = x^3$ no funcionará porque su derivada es $3x^2$. Pero esto sugiere $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, la cual satisface $F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$. Sin embargo, la antiderivada general es $\frac{1}{3}x^3 + C$. ■

Notación para las antiderivadas Como utilizamos el símbolo D_x para la operación de tomar la derivada, sería natural utilizar A_x para la operación de encontrar la antiderivada. Así,

$$A_x(x^2) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Ésta es la notación empleada por varios autores y, de hecho, fue usada en ediciones anteriores de este texto. No obstante, la notación original de Leibniz continúa gozando de una popularidad aplastante y, por lo tanto, decidimos seguirla. En lugar de A_x, Leibniz utilizó el símbolo $\int \ldots dx$. Él escribió

$$\int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

y

$$\int 4x^3\, dx = x^4 + C$$

Leibniz eligió utilizar la s alargada, $\int$, y la dx por razones que no serán evidentes sino hasta el capítulo siguiente. Por el momento, basta con considerar a $\int \ldots dx$ como indicación de la antiderivada con respecto a x, al igual que D_x indica la derivada con respecto a x. Observe que

$$D_x \int f(x)\, dx = f(x) \quad \text{y} \quad \int D_x f(x)\, dx = f(x) + C$$

Demostración de reglas para antiderivadas

Para establecer cualquier resultado de la forma

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

todo lo que tenemos que hacer es demostrar que

$$D_x[F(x) + C] = f(x)$$

Teorema A Regla para la potencia

Si r es cualquier número racional, excepto -1, entonces

$$\int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

Demostración La derivada del lado derecho es

$$D_x\left[\frac{x^{r+1}}{r+1} + C\right] = \frac{1}{r+1}(r+1)x^r = x^r$$ ■

Hacemos dos comentarios con relación al teorema A. Primero, el teorema incluye al caso $r = 0$; es decir,

$$\int 1\, dx = x + C$$

Segundo, puesto que no se especificó ningún intervalo, la conclusión se entiende que será válida sólo en intervalos en los que x^r esté definida. En particular, debemos excluir cualquier intervalo que contenga al origen si $r < 0$.

Siguiendo a Leibniz, a veces usaremos el término **integral indefinida** en lugar de antiderivada. Antiderivar también es **integrar.** En el símbolo $\int f(x)\,dx$, $\int$ se denomina **signo de integral** y $f(x)$ se llama **integrando**. Así, integramos el integrando y de este modo evaluamos la integral indefinida. Tal vez Leibniz utilizó el adjetivo *indefinida* para sugerir que la integral indefinida siempre incluye una constante arbitraria.

EJEMPLO 3 Encuentre la antiderivada general de $f(x) = x^{4/3}$.

SOLUCIÓN

$$\int x^{4/3}\,dx = \frac{x^{7/3}}{\frac{7}{3}} + C = \tfrac{3}{7}x^{7/3} + C$$ ■

Observe que *para integrar una potencia de x aumentamos el exponente en 1 y dividimos entre el nuevo exponente*.

Las fórmulas de antiderivadas para las funciones seno y coseno se deducen directamente de la derivada.

Teorema B

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \quad \text{y} \quad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

Demostración Simplemente observe que $D_x(-\cos x + C) = \operatorname{sen} x$ y $D_x(\operatorname{sen} x + C) = \cos x$. ■

La integral indefinida es lineal Recuerde del capítulo 2 que D_x es un operador lineal. Esto significa dos cosas.

1. $D_x[kf(x)] = kD_xf(x)$
2. $D_x[f(x) + g(x)] = D_xf(x) + D_xg(x)$

De estas dos propiedades se deduce una tercera, de manera automática.

3. $D_x[f(x) - g(x)] = D_xf(x) - D_xg(x)$

Resulta que $\int \ldots dx$ también tiene estas propiedades de un operador lineal.

Teorema C La integral indefinida es un operador lineal

Suponga que f y g tienen antiderivadas (integrales indefinidas) y sea k una constante. Entonces:

(i) $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$;

(ii) $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;

(iii) $\displaystyle\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$.

Demostración Para demostrar (i) y (ii) basta con derivar el lado derecho y observar que obtenemos el integrando del lado izquierdo.

$$D_x\left[k\int f(x)\,dx\right] = kD_x\int f(x)\,dx = kf(x)$$

$$D_x\left[\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right] = D_x\int f(x)\,dx + D_x\int g(x)\,dx$$

$$= f(x) + g(x)$$

La propiedad (iii) se deduce de (i) y (ii). ■

EJEMPLO 4 Mediante la linealidad de $\int$, evalúe

(a) $\int (3x^2 + 4x)\,dx$ (b) $\int (u^{3/2} - 3u + 14)\,du$ (c) $\int \left(1/t^2 + \sqrt{t}\right) dt$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned}\int (3x^2 + 4x)\,dx &= \int 3x^2\,dx + \int 4x\,dx \\ &= 3\int x^2\,dx + 4\int x\,dx \\ &= 3\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) + 4\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) \\ &= x^3 + 2x^2 + (3C_1 + 4C_2) \\ &= x^3 + 2x^2 + C\end{aligned}$$

Aparecieron dos constantes arbitrarias C_1 y C_2, pero se combinaron en una constante, C, una práctica que seguiremos de manera consistente.

(b) Observe el uso de la variable u en lugar de x. Esto está bien mientras que el correspondiente símbolo de la diferencial sea *du;* entonces, tenemos un cambio completo en la notación

$$\begin{aligned}\int (u^{3/2} - 3u + 14)\,du &= \int u^{3/2}\,du - 3\int u\,du + 14\int 1\,du \\ &= \tfrac{2}{5}u^{5/2} - \tfrac{3}{2}u^2 + 14u + C\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{t^2} + \sqrt{t}\right) dt &= \int (t^{-2} + t^{1/2})\,dt = \int t^{-2}\,dt + \int t^{1/2}\,dt \\ &= \frac{t^{-1}}{-1} + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{t} + \frac{2}{3}t^{3/2} + C\end{aligned}$$

■

Regla generalizada de la potencia Recuérdese la regla de la cadena como se aplicó a una potencia de una función. Si $u = g(x)$ es una función derivable y r es un número racional ($r \neq -1$), entonces

$$D_x\left[\frac{u^{r+1}}{r+1}\right] = u^r \cdot D_x u$$

o, en notación de funciones,

$$D_x\left(\frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1}\right) = [g(x)]^r \cdot g'(x)$$

De esto obtenemos una regla importante para integrales indefinidas.

Teorema D Regla generalizada de la potencia

Sean g una función derivable y r un número racional diferente de -1. Entonces

$$\int [g(x)]^r g'(x)\,dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

Para aplicar el teorema D, debemos ser capaces de reconocer las funciones g y g' en el integrando.

EJEMPLO 5 Evalúe

(a) $\int (x^4 + 3x)^{30}(4x^3 + 3)\,dx$ (b) $\int \text{sen}^{10} x \cos x\,dx$

SOLUCIÓN

(a) Sea $g(x) = x^4 + 3x$; entonces $g'(x) = 4x^3 + 3$. Así, por el teorema D

$$\int (x^4 + 3x)^{30}(4x^3 + 3)\,dx = \int [g(x)]^{30} g'(x)\,dx = \frac{[g(x)]^{31}}{31} + C$$

$$= \frac{(x^4 + 3x)^{31}}{31} + C$$

(b) Sea $g(x) = \text{sen}\,x$, entonces $g'(x) = \cos x$. Por lo tanto,

$$\int \text{sen}^{10} x \cos x\,dx = \int [g(x)]^{10} g'(x)\,dx = \frac{[g(x)]^{11}}{11} + C$$

$$= \frac{\text{sen}^{11} x}{11} + C$$

■

El ejemplo 5 muestra por qué Leibniz usó la diferencial dx en su notación $\int \ldots dx$. Si hacemos $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)dx$. Por consiguiente, la conclusión del teorema D es

$$\int u^r\,du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + C, \qquad r \neq -1$$

que es la regla común para la potencia con u como variable. Así, la regla generalizada para la potencia es sólo la regla común para la potencia aplicada a funciones. Pero, al aplicarla, siempre debemos estar seguros de que tenemos du para ir con u^r. Los siguientes ejemplos ilustran lo que queremos decir.

EJEMPLO 6 Evalúe

(a) $\int (x^3 + 6x)^5(6x^2 + 12)\,dx$ (b) $\int (x^2 + 4)^{10} x\,dx$

SOLUCIÓN

(a) Sea $u = x^3 + 6x$; entonces $du = (3x^2 + 6)dx$. Así, $(6x^2 + 12)dx = 2(3x^2 + 6)dx = 2du$, y en consecuencia

$$\int (x^3 + 6x)^5(6x^2 + 12)\,dx = \int u^5\,2\,du$$

$$= 2\int u^5\,du$$

$$= 2\left[\frac{u^6}{6} + C\right]$$

$$= \frac{u^6}{3} + 2C$$

$$= \frac{(x^3 + 6x)^6}{3} + K$$

Deben notarse dos cosas con respecto a nuestra solución. Primero, el hecho de que $(6x^2+12)dx$ es $2du$ en lugar de du no causa problema; por la linealidad de la integral, el factor 2 pudo colocarse al frente del signo de la integral. Segundo, terminamos con una constante arbitraria $2C$. También ésta es una constante arbitraria; llamémosle K.

(b) Sea $u = x^2 + 4$; entonces $du = 2x dx$. Así,

$$\begin{aligned}\int (x^2+4)^{10} x\,dx &= \int (x^2+4)^{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int u^{10}\,du \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{11}}{11} + C\right) \\ &= \frac{(x^2+4)^{11}}{22} + K\end{aligned}$$

■

Revisión de conceptos

1. La regla de la potencia para derivadas dice que $d(x^r)/dx =$ ________. La regla de la potencia para integrales dice que $\int x^r\,dx =$ ______.

2. La regla generalizada de la potencia para derivadas dice que $d[f(x)]^r/dx =$ ________. La regla generalizada de la potencia para integrales dice que $\int$ _____ $dx = [f(x)]^{r+1}/(r+1) + C, r \neq -1$.

3. $\int (x^4 + 3x^2 + 1)^8(4x^3 + 6x)\,dx =$ _____.

4. Con base en la linealidad, $\int [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\,dx =$ _____.

Conjunto de problemas 3.8

Encuentre la antiderivada general F(x) + C para cada una de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 5$

2. $f(x) = x - 4$

3. $f(x) = x^2 + \pi$

4. $f(x) = 3x^2 + \sqrt{3}$

5. $f(x) = x^{5/4}$

6. $f(x) = 3x^{2/3}$

7. $f(x) = 1/\sqrt[3]{x^2}$

8. $f(x) = 7x^{-3/4}$

9. $f(x) = x^2 - x$

10. $f(x) = 3x^2 - \pi x$

11. $f(x) = 4x^5 - x^3$

12. $f(x) = x^{100} + x^{99}$

13. $f(x) = 27x^7 + 3x^5 - 45x^3 + \sqrt{2}x$

14. $f(x) = x^2\left(x^3 + 5x^2 - 3x + \sqrt{3}\right)$

15. $f(x) = \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$

16. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x}}{x} + \dfrac{3}{x^5}$

17. $f(x) = \dfrac{4x^6 + 3x^4}{x^3}$

18. $f(x) = \dfrac{x^6 - x}{x^3}$

En los problemas del 19 al 26 evalúe las integrales indefinidas que se indican.

19. $\int (x^2 + x)\,dx$

20. $\int \left(x^3 + \sqrt{x}\right)dx$

21. $\int (x+1)^2\,dx$

22. $\int \left(z + \sqrt{2}z\right)^2 dz$

23. $\int \dfrac{(z^2+1)^2}{\sqrt{z}}\,dz$

24. $\int \dfrac{s(s+1)^2}{\sqrt{s}}\,ds$

25. $\int (\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)\,d\theta$

26. $\int (t^2 - 2\cos t)\,dt$

En los problemas del 27 al 36 utilice los métodos de los ejemplos 5 y 6 para evaluar las integrales indefinidas.

27. $\int \left(\sqrt{2}x + 1\right)^3 \sqrt{2}\,dx$

28. $\int (\pi x^3 + 1)^4\, 3\pi x^2\,dx$

29. $\int (5x^2+1)(5x^3+3x-8)^6\,dx$

30. $\int (5x^2+1)\sqrt{5x^3+3x-2}\,dx$

31. $\int 3t\sqrt[3]{2t^2-11}\,dt$

32. $\int \dfrac{3y}{\sqrt{2y^2+5}}\,dy$

33. $\int x^2\sqrt{x^3+4}\,dx$

34. $\int (x^3+x)\sqrt{x^4+2x^2}\,dx$

35. $\int \operatorname{sen} x\,(1+\cos x)^4\,dx$

36. $\int \operatorname{sen} x \cos x \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

En los problemas del 37 al 42 se da $f''(x)$. Encuentre $f(x)$ antiderivando dos veces. Observe que en este caso su respuesta debe incluir dos constantes arbitrarias, una proveniente de cada antiderivación. Por ejemplo, si $f''(x) = x$, entonces $f'(x) = x^2/2 + C_1$ y $f(x) = x^3/6 + C_1x + C_2$. Las constantes C_1 y C_2 no pueden combinarse porque C_1x no es una constante.

37. $f''(x) = 3x + 1$

38. $f''(x) = -2x + 3$

39. $f''(x) = \sqrt{x}$

40. $f''(x) = x^{4/3}$

41. $f''(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^3}$

42. $f''(x) = 2\sqrt[3]{x + 1}$

43. Demuestre la fórmula

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\, dx = f(x)g(x) + C$$

Sugerencia: véase el recuadro al margen junto al teorema A.

44. Demuestre la fórmula

$$\int \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\, dx = \frac{f(x)}{g(x)} + C$$

45. Utilice la fórmula del problema 43 para encontrar

$$\int \left[\frac{x^2}{2\sqrt{x - 1}} + 2x\sqrt{x - 1}\right] dx$$

46. Utilice la fórmula del problema 43 para encontrar

$$\int \left[\frac{-x^3}{(2x + 5)^{3/2}} + \frac{3x^2}{\sqrt{2x + 5}}\right] dx$$

47. Encuentre $\int f''(x)\, dx$ si $f(x) = x\sqrt{x^3 + 1}$.

48. Demuestre la fórmula

$$\int \frac{2g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{2[g(x)]^{3/2}} = \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} + C$$

49. Demuestre la fórmula

$$\int f^{m-1}(x)g^{n-1}(x)[nf(x)g'(x) + mg(x)f'(x)]\, dx = f^m(x)g^n(x) + C$$

50. Evalúe la integral indefinida

$$\int \operatorname{sen}^3[(x^2 + 1)^4] \cos[(x^2 + 1)^4](x^2 + 1)^3 x\, dx$$

Sugerencia: sea $u = \operatorname{sen}(x^2 + 1)^4$.

51. Evalúe $\int |x|\, dx$.

52. Evalúe $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

CAS **53.** Algunos paquetes de software pueden evaluar integrales indefinidas. Utilice su software en cada una de las siguientes integrales.

(a) $\int 6 \operatorname{sen}(3(x - 2))\, dx$

(b) $\int \operatorname{sen}^3(x/6)\, dx$

(c) $\int (x^2 \cos 2x + x \operatorname{sen} 2x)\, dx$

EXPL CAS **54.** Sea $F_0(x) = x \operatorname{sen} x$ y $F_{n+1}(x) = \int F_n(x)\, dx$.

(a) Determine $F_1(x), F_2(x), F_3(x)$, y $F_4(x)$.

(b) Con base en la parte (a) realice una conjetura sobre la forma de $F_{16}(x)$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** rx^{r-1}; $x^{r+1}/(r + 1) + C, r \neq -1$ **2.** $r[f(x)]^{r-1}f'(x); [f(x)]^r f'(x)$ **3.** $(x^4 + 3x^2 + 1)^9/9 + C$ **4.** $c_1\int f(x)\, dx + c_2\int g(x)\, dx$

3.9 Introducción a ecuaciones diferenciales

En la sección precedente, nuestra tarea fue antiderivar (integrar) una función f para obtener una nueva función F. Escribimos

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

y, por definición, esto fue correcto siempre y cuando $F'(x) = f(x)$. Ahora $F'(x) = f(x)$ en el lenguaje de derivadas es equivalente a $dF(x) = f(x)dx$ en el lenguaje de diferenciales (véase la sección 2.9). Por lo tanto, podemos interpretar la fórmula del recuadro como

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Desde esta perspectiva, integramos la diferencial de una función para obtener la función (más una constante). Éste fue el punto de vista de Leibniz; adoptarlo nos ayudará a resolver *ecuaciones diferenciales*.

¿Qué es una ecuación diferencial? Para motivar nuestra respuesta, empezamos con un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 1 Encuentre una ecuación, en x y y, de la curva que pasa por el punto $(-1, 2)$ y cuya pendiente en cualquier punto de la curva es igual a dos veces la abscisa (coordenada x) de ese punto.

SOLUCIÓN La condición que debe cumplirse en cada punto (x, y) de la curva es

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Estamos buscando una función $y = f(x)$ que satisfaga esta ecuación y con la condición adicional de que $y = 2$ cuando $x = -1$. Sugerimos dos formas de ver este problema.

Método 1 Cuando una ecuación tiene la forma $dy/dx = g(x)$ observamos que y debe ser una antiderivada de $g(x)$; esto es,

$$y = \int g(x)\,dx$$

En nuestro caso,

$$y = \int 2x\,dx = x^2 + C$$

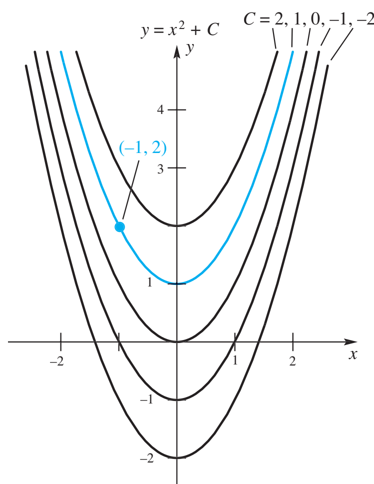


Figura 1

Método 2 Considere a dy/dx como un cociente de dos diferenciales. Cuando multiplicamos ambos lados de $dy/dx = 2x$ por dx, obtenemos

$$dy = 2x\,dx$$

Ahora, integramos las diferenciales de ambos lados, igualamos los resultados y simplificamos

$$\int dy = \int 2x\,dx$$

$$y + C_1 = x^2 + C_2$$

$$y = x^2 + C_2 - C_1$$

$$y = x^2 + C$$

El segundo método funciona en una gran variedad de problemas que no están en la forma sencilla $dy/dx = g(x)$, como veremos.

La solución $y = x^2 + C$ representa la familia de curvas ilustrada en la figura 1. De esta familia debemos seleccionar la curva para la que $y = 2$ cuando $x = -1$; por lo tanto, queremos que

$$2 = (-1)^2 + C$$

Concluimos que $C = 1$ y, por lo tanto, que $y = x^2 + 1$. ■

Las ecuaciones $dy/dx = 2x$ y $dy = 2x\,dx$ se denominan *ecuaciones diferenciales*. Otros ejemplos son

$$\frac{dy}{dx} = 2xy + \operatorname{sen} x$$

$$y\,dy = (x^3 + 1)\,dx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

Cualquier ecuación en la que la incógnita sea una función y que incluya derivadas (o diferenciales) de esta función desconocida se denomina **ecuación diferencial**. Una función que cuando se sustituye en la ecuación diferencial da una igualdad, se llama una **solución** de la ecuación diferencial. Por lo tanto, resolver una ecuación diferencial es encontrar una *función* desconocida. En general, ésta es una tarea difícil y sobre la que se han escrito muchos y extensos libros. Aquí sólo consideraremos el tipo más sencillo, las ecuaciones diferenciales **de primer orden con variables separables**. Éstas son ecuaciones que incluyen sólo a la primera derivada de la función desconocida y son tales que las variables pueden separarse, una en cada lado de la ecuación.

Separación de variables Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3x^2}{y^2}$$

Si multiplicamos ambos lados por $y^2 dx$, obtenemos

$$y^2\,dy = (x + 3x^2)\,dx$$

En esta forma, la ecuación diferencial tiene separadas sus variables; es decir, los términos que incluyen a y están en un lado de la ecuación y los de x en el otro. De manera separada, podemos resolver la ecuación diferencial utilizando el método 2 (integrar ambos lados, igualar los resultados y simplificar), como lo ilustramos ahora.

EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3x^2}{y^2}$$

Después encuentre aquella solución para la cual $y = 6$ cuando $x = 0$.

SOLUCIÓN Como se observó anteriormente, la ecuación dada es equivalente a

$$y^2\,dy = (x + 3x^2)\,dx$$

Así,

$$\int y^2\,dy = \int (x + 3x^2)\,dx$$

$$\frac{y^3}{3} + C_1 = \frac{x^2}{2} + x^3 + C_2$$

$$y^3 = \frac{3x^2}{2} + 3x^3 + (3C_2 - 3C_1)$$

$$= \frac{3x^2}{2} + 3x^3 + C$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + 3x^3 + C}$$

Para encontrar la constante C utilizamos la condición $y = 6$ cuando $x = 0$. Esto da

$$6 = \sqrt[3]{C}$$

$$216 = C$$

Por lo tanto,

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + 3x^3 + 216}$$

Para verificar nuestro trabajo podemos sustituir este resultado en ambos lados de la ecuación diferencial original para ver que dé una igualdad. También debemos confirmar que $y = 6$ cuando $x = 0$.

Al sustituir en el lado izquierdo obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{3x^2}{2} + 3x^3 + 216\right)^{-2/3}(3x + 9x^2)$$

$$= \frac{x + 3x^2}{\left(\frac{3}{2}x^2 + 3x^3 + 216\right)^{2/3}}$$

En el lado derecho obtenemos

$$\frac{x + 3x^2}{y^2} = \frac{x + 3x^2}{\left(\frac{3}{2}x^2 + 3x^3 + 216\right)^{2/3}}$$

Como se esperaba, las dos expresiones son iguales. Cuando $x = 0$ tenemos

$$y = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0^2}{2} + 3 \cdot 0^3 + 216} = \sqrt[3]{216} = 6$$

Así, $y = 6$ cuando $x = 0$, como esperábamos. ■

Problemas sobre movimiento Recuerde que si $s(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ representan la posición, velocidad y aceleración, respectivamente, en el instante t de un objeto que se mueve a lo largo de un eje coordenado, entonces

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

En algún trabajo previo (véase la sección 2.6) supusimos que $s(t)$ era conocida, y a partir de esto calculamos $v(t)$ y $a(t)$. Ahora queremos considerar el proceso inverso; dada la aceleración $a(t)$, encontrar la velocidad $v(t)$ y la posición $s(t)$.

EJEMPLO 3 **Problema de un cuerpo que cae**

Cerca de la superficie de la Tierra, la aceleración a la que cae un objeto, debido a la gravedad, es de 32 pies por segundo por segundo, siempre y cuando la resistencia al aire se pueda despreciar. Si un objeto se lanza directamente hacia arriba desde una altura inicial de 1000 pies (véase la figura 2) a una velocidad de 50 pies por segundo, encuentre su velocidad y altura 4 segundos después.

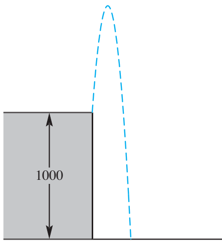


Figura 2

SOLUCIÓN Supongamos que la altura s se considera positiva hacia arriba. Entonces $v = ds/dt$ inicialmente es positiva (s está aumentando), pero $a = dv/dt$ es negativa. (La fuerza debida a la gravedad es descendente, por lo que v disminuye.) De aquí que iniciamos nuestro análisis con la ecuación diferencial $dv/dt = -32$, con las condiciones adicionales de que $v = 50$ y $s = 1000$ cuando $t = 0$. El método 1 (antiderivación directa) y el método 2 (separación de variables) funcionan bien.

$$\frac{dv}{dt} = -32$$

$$v = \int -32\, dt = -32t + C$$

Como $v = 50$ en $t = 0$, encontramos que $C = 50$, y así

$$\boxed{v = -32t + 50}$$

Ahora, $v = ds/dt$, por lo que tenemos otra ecuación diferencial

$$\frac{ds}{dt} = -32t + 50$$

Cuando integramos obtenemos

$$s = \int (-32t + 50)\, dt$$
$$= -16t^2 + 50t + K$$

Ya que $s = 1000$ en $t = 0$, $K = 1000$ y

$$\boxed{s = -16t^2 + 50t + 1000}$$

Por último, en $t = 4$,

$$v = -32(4) + 50 = -78 \text{ pies por segundo}$$
$$s = -16(4)^2 + 50(4) + 1000 = 944 \text{ pies}$$ ■

Hacemos notar que si $v = v_0$ y $s = s_0$ en $t = 0$, el procedimiento del ejemplo 3 lleva a las conocidas fórmulas de caída de un cuerpo.

$$a = -32$$
$$v = -32t + v_0$$
$$s = -16t^2 + v_0 t + s_0$$

EJEMPLO 4 La aceleración de un objeto que se mueve a lo largo de un eje coordenado está dada por $a(t) = (2t + 3)^{-3}$ en metros por segundo por segundo. Si la velocidad en $t = 0$ es 4 metros por segundo, encuentre la velocidad 2 segundos más tarde.

SOLUCIÓN Empezamos con la ecuación diferencial de la primera línea, de las ecuaciones que se muestran a continuación. Para realizar la integración en la segunda línea, multiplicamos y dividimos entre 2, así preparamos la integral para la regla generalizada para la potencia.

$$\frac{dv}{dt} = (2t + 3)^{-3}$$
$$v = \int (2t + 3)^{-3}\,dt = \frac{1}{2}\int (2t + 3)^{-3}\,2\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\frac{(2t + 3)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4(2t + 3)^2} + C$$

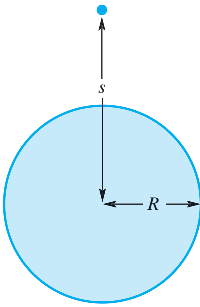


Figura 3

Como $v = 4$ en $t = 0$,

$$4 = -\frac{1}{4(3)^2} + C$$

que da $C = \frac{145}{36}$. Así,

$$v = -\frac{1}{4(2t + 3)^2} + \frac{145}{36}$$

En $t = 2$,

$$v = -\frac{1}{4(49)} + \frac{145}{36} \approx 4.023 \text{ metros por segundo}$$



EJEMPLO 5 **Velocidad de escape (opcional)**

La atracción gravitacional F ejercida por la Tierra sobre un objeto de masa m a una distancia s del centro de la Tierra está dado por $F = -mgR^2/s^2$, donde $-g$ ($g \approx 32$ pies por segundo por segundo) es la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Tierra y R ($R \approx 3960$ millas) es el radio de la Tierra (véase la figura 3). Demuestre que un objeto lanzado hacia arriba desde la Tierra, con una velocidad inicial $v_0 \geq \sqrt{2gR} \approx 6.93$ millas por segundo no regresará a la Tierra. En estos cálculos no tome en cuenta la resistencia del aire.

SOLUCIÓN De acuerdo con la segunda Ley de Newton, $F = ma$; es decir,

$$F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = m\frac{dv}{ds}v$$

Así,

$$mv\frac{dv}{ds} = -mg\frac{R^2}{s^2}$$

Al separar variables se obtiene

$$v\,dv = -gR^2 s^{-2}\,ds$$
$$\int v\,dv = -gR^2 \int s^{-2}\,ds$$
$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{s} + C$$

Ahora $v = v_0$ cuando $s = R$, y de este modo $C = \frac{1}{2}v_0^2 - gR$. En consecuencia,

$$v^2 = \frac{2gR^2}{s} + v_0^2 - 2gR$$

Por último, ya que $2gR^2/s$ se reduce conforme s aumenta, vemos que v permanece positiva si y sólo si $v_0 \geq \sqrt{2gR}$. ■

Revisión de conceptos

1. $dy/dx = 3x^2 + 1$ y $dy/dx = x/y^2$ son ejemplos de lo que se llama una ________.

2. Para resolver la ecuación diferencial $dy/dx = g(x, y)$ hay que encontrar la ________ que, cuando se sustituya por y proporcione una igualdad.

3. Para resolver la ecuación diferencial $dy/dx = x^2y^3$, el primer paso sería ________.

4. Para resolver el problema de un cuerpo que cae cerca de la superficie de la Tierra, iniciamos con el hecho experimental de que la aceleración debida a la gravedad es de −32 pies por segundo por segundo; es decir, $a = dv/dt = -32$. Al resolver esta ecuación diferencial se obtiene $v = ds/dt =$ ________, y al resolver la ecuación diferencial resultante se obtiene $s =$ ________.

Conjunto de problemas 3.9

En los problemas del 1 al 4 demuestre que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial que se da; es decir, sustituya la función que se indica por y para ver que produzca una igualdad.

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0;\ y = \sqrt{1 - x^2}$

2. $-x\frac{dy}{dx} + y = 0;\ y = Cx$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0;\ y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$

4. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1;\ y = \operatorname{sen}(x + C)$ y $y = \pm 1$

En los problemas del 5 al 14 encuentre primero la solución general (que incluya una constante C) para la ecuación diferencial dada. Después encuentre la solución particular que satisfaga la condición que se indica. (Véase el ejemplo 2.)

5. $\frac{dy}{dx} = x^2 + 1;\ y = 1$ en $x = 1$

6. $\frac{dy}{dx} = x^{-3} + 2;\ y = 3$ en $x = 1$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y};\ y = 1$ en $x = 1$

8. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{y}};\ y = 4$ en $x = 1$

9. $\frac{dz}{dt} = t^2z^2;\ z = 1/3$ en $t = 1$

10. $\frac{dy}{dt} = y^4;\ y = 1$ en $t = 0$

11. $\frac{ds}{dt} = 16t^2 + 4t - 1;\ s = 100$ en $t = 0$

12. $\frac{du}{dt} = u^3(t^3 - t);\ u = 4$ en $t = 0$

13. $\frac{dy}{dx} = (2x + 1)^4;\ y = 6$ at $x = 0$

14. $\frac{dy}{dx} = -y^2x(x^2 + 2)^4;\ y = 1$ at $x = 0$

15. Encuentre la ecuación, en x y y, de la curva que pasa por (1, 2) cuya pendiente en cualquier punto es tres veces su abscisa (véase el ejemplo 1).

16. Encuentre la ecuación, en x y y, de la curva que pasa por (1, 2) cuya pendiente en cualquier punto es el triple del cuadrado de su ordenada (coordenada y).

En los problemas del 17 al 20, un objeto se mueve a lo largo de una recta, sujeto a la aceleración a (en centímetros por segundo por segundo), que se indica, con la velocidad inicial v_0 (en centímetros por segundo) y la distancia dirigida s_0 (en centímetros). Encuentre la velocidad v y la distancia dirigida s después de 2 segundos (véase el ejemplo 4).

17. $a = t;\ v_0 = 3,\ s_0 = 0$

18. $a = (1 + t)^{-4};\ v_0 = 0,\ s_0 = 10$

C **19.** $a = \sqrt[3]{2t + 1};\ v_0 = 0,\ s_0 = 10$

C **20.** $a = (3t + 1)^{-3};\ v_0 = 4,\ s_0 = 0$

21. Se lanza una pelota hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 96 pies por segundo. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? (Véase el ejemplo 3.)

22. Se lanza una pelota hacia arriba desde la superficie de un planeta en donde la aceleración debida a la gravedad es k (una constante negativa) pies por segundo por segundo. Si la velocidad inicial es v_0, demuestre que la altura máxima es $-v_0^2/2k$.

C **23.** En la superficie de la Luna, la aceleración debida a la gravedad es −5.28 pies por segundo por segundo. Si un objeto se lanza hacia arriba desde una altura inicial de 1000 pies, a una velocidad de 56 pies por segundo, encuentre su velocidad y su altura 4.5 segundos más tarde.

C **24.** ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el objeto del problema 23?

25. La tasa de cambio del volumen V de una bola de nieve que se derrite es proporcional al área de su superficie S; es decir, $dV/dt = -kS$,

donde k es una constante positiva. Si el radio de la bola en $t = 0$ es $r = 2$, y en $t = 10$ es $r = 0.5$, demuestre que $r = -\frac{3}{20}t + 2$.

26. ¿Desde qué altura, por arriba de la Tierra, debe dejarse caer una pelota para que llegue al suelo a una velocidad de −136 pies por segundo?

C **27.** Determine la *velocidad de escape* para un objeto lanzado desde cada uno de los siguientes cuerpos celestes (véase el ejemplo 5). Aquí, $g \approx 32$ pies por segundo por segundo.

	Aceleración debida a la gravedad	Radio (millas)
Luna	$-0.165g$	1,080
Venus	$-0.85g$	3,800
Júpiter	$-2.6g$	43,000
Sol	$-28g$	432,000

28. Si los frenos de un automóvil, cuando se aplican por completo, producen una desaceleración constante de 11 pies por segundo por segundo, ¿cuál es la distancia más corta en la que pueden aplicarse los frenos hasta detenerse, cuando lleva una velocidad de 60 millas por hora?

29. ¿Qué aceleración constante causará que un automóvil aumente su velocidad de 45 a 60 millas por hora en 10 segundos?

30. Un bloque se desliza hacia abajo en un plano inclinado con una aceleración de 8 pies por segundo por segundo. Si el plano inclinado tiene una longitud de 75 pies y el bloque llega a la parte baja en 3.75 segundos, ¿cuál fue la velocidad inicial del bloque?

31. Cierto cohete, inicialmente en reposo, que es disparado directamente hacia arriba tiene una aceleración de $6t$ metros por segundo por segundo durante los primeros 10 segundos después del despegue, a partir de los cuales el motor se detiene y el cohete sólo está sujeto a la aceleración debida a la gravedad de −10 metros por segundo por segundo. ¿A qué altura llegará el cohete?

32. Al ponerse en marcha en la estación A, un tren acelera a 3 metros por segundo por segundo durante 8 segundos, después viaja a velocidad constante v_m durante 100 segundos, y finalmente frena (desacelera) a 4 metros por segundo por segundo, para hacer una parada en la estación B. Encuentre (a) v_m y (b) la distancia entre A y B.

33. A partir del reposo, un autobús aumenta su velocidad con una aceleración constante a_1, después viaja a velocidad constante v_m, y finalmente frena para detenerse a una aceleración constante a_2 ($a_2 < 0$). Le toma 4 minutos recorrer las 2 millas entre las paradas C y D, y luego 3 minutos para recorrer 1.4 millas entre las paradas D y E.

(a) Bosqueje la gráfica de la velocidad v como una función del tiempo t, $0 \le t \le 7$.

(b) Encuentre la velocidad máxima v_m.

(c) Si $a_1 = -a_2 = a$, evalúe a.

34. Un globo de aire caliente abandona el piso elevándose a 4 pies por segundo. Dieciséis segundos después, Victoria arroja una pelota directamente hacia arriba a su amigo Colleen, que está en el globo. ¿A qué velocidad lanzó la pelota si llegó a Colleen?

35. De acuerdo con la Ley de Torricelli, la razón de cambio del volumen, V, de agua con respecto al tiempo en un tanque que se está vaciando es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad del agua. Un tanque cilíndrico de radio $10/\sqrt{\pi}$ centímetros y 16 centímetros de altura, inicialmente lleno, tarda 40 segundos en vaciarse.

(a) Escriba una ecuación diferencial para V en el instante t y las condiciones correspondientes.

(b) Resuelva la ecuación diferencial.

(c) Encuentre el volumen del agua después de 10 segundos.

C **36.** En cierto estado, la población de lobos P ha crecido a una tasa proporcional a la raíz cúbica del tamaño de la población. En 1980, la población se estimó en 1000 y en 1990 en 1700.

(a) Escriba la ecuación diferencial para P en el instante t con las dos condiciones correspondientes.

(b) Resuelva la ecuación diferencial.

(c) ¿Cuándo llegará a 4000 la población de lobos?

37. En $t = 0$, una pelota se deja caer desde una altura de 16 pies. Si pega con el piso y rebota a una altura de 9 pies (véase la figura 4):

(a) Encuentre una fórmula de dos partes para la velocidad $v(t)$ que sea válida hasta que la pelota choque con el piso por segunda ocasión.

(b) ¿Cuáles son los dos instantes en que la pelota estuvo a una altura de 9 pies?

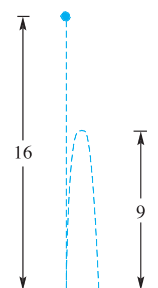


Figura 4

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** ecuación diferencial **2.** función **3.** separar las variables **4.** $-32t + v_0$; $-16t^2 + v_0t + s_0$

3.10 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

1. Una función continua definida en un intervalo cerrado debe alcanzar un valor máximo en ese intervalo.

2. Si una función derivable f alcanza un valor máximo en un punto interior c de su dominio, entonces $f'(c) = 0$.

3. Para una función es posible tener un número infinito de puntos críticos.

4. Una función continua que es creciente en $(-\infty, \infty)$ debe ser diferenciable en todas partes.

5. Si $f(x) = 3x^6 + 4x^4 + 2x^2$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en toda la recta real.

6. Si f es una función creciente y derivable en un intervalo I, entonces $f'(x) > 0$ para toda x en I.

7. Si $f'(x) > 0$, para toda x en I, entonces f es creciente en I.

8. Si $f''(c) = 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en $(c, f(c))$.

9. Una función cuadrática no tiene puntos de inflexión.

10. Si $f'(x) > 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces f alcanza su valor máximo sobre $[a, b]$ en b.

11. La función $y = \tan^2 x$ no tiene valor mínimo.

12. La función $y = 2x^3 + x$ no tiene valor máximo ni valor mínimo.

13. La función $y = 2x^3 + x + \tan x$ no tiene valor máximo ni valor mínimo.

14. La gráfica de $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \dfrac{(x + 2)(x - 3)}{x - 3}$ tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

15. La gráfica de $y = \dfrac{x^2 + 1}{1 - x^2}$ tiene un asíntota horizontal en $y = -1$.

16. La gráfica de $y = \dfrac{3x^2 + 2x + \text{sen } x}{x}$ tiene una asíntota oblicua en $y = 3x + 2$.

17. La función $f(x) = \sqrt{x}$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio en $[0, 2]$.

18. La función $f(x) = |x|$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio en $[-1, 1]$.

19. En el intervalo $[-1, 1]$, sólo existe un punto en donde la recta tangente a $y = x^3$ es paralela a la recta secante.

20. Si $f'(x) = 0$ para toda x en (a, b), entonces f es constante en este intervalo.

21. Si $f'(c) = f''(c) = 0$, entonces $f(c)$ no es valor máximo ni valor mínimo.

22. La gráfica de $y = \text{sen } x$ tiene un número infinito de puntos de inflexión.

23. Entre todos los rectángulos con área fija K, aquel con perímetro máximo es un cuadrado.

24. Si la gráfica de una función derivable tiene tres intersecciones con el eje x, entonces debe tener al menos dos puntos en donde la recta tangente es horizontal.

25. La suma de dos funciones crecientes es una función creciente.

26. El producto de dos funciones crecientes es una función creciente.

27. Si $f'(0) = 0$ y $f''(x) > 0$ para $x \geq 0$, entonces f es creciente en $[0, \infty)$.

28. Si $f'(x) \leq 2$ para toda x en el intervalo $[0, 3]$ y $f(0) = 1$, entonces $f(3) < 4$.

29. Si f es una función derivable, entonces f es no decreciente en (a, b), si y sólo si $f'(x) \geq 0$ en (a, b).

30. Dos funciones derivables tienen la misma derivada en (a, b) si y sólo si difieren por una constante en (a, b).

31. Si $f''(x) > 0$ para toda x, entonces la gráfica de $y = f(x)$ no puede tener una asíntota horizontal.

32. Un valor máximo global siempre es un valor máximo local.

33. Una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, puede tener, a lo más, un valor máximo local en cualquier intervalo abierto.

34. La función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, no tiene valor mínimo en ningún intervalo abierto.

35. Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces $f(x) = 0$ tiene una raíz entre a y b.

36. Una de las virtudes del método de bisección es su rápida convergencia.

37. El método de Newton producirá una sucesión convergente para la función $f(x) = x^{1/3}$.

38. Si el método de Newton no converge para un valor inicial, entonces no convergerá para todo valor inicial.

39. Si g es continua en $[a, b]$ y si $a < g(a) < g(b) < b$, entonces g tiene un punto fijo entre a y b.

40. Una de las virtudes del método de bisección es que siempre converge.

41. La integral indefinida es un operador lineal.

42. $\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\, dx = f(x)g(x) + C$.

43. $y = \cos x$ es una solución para la ecuación diferencial $(dy/dx)^2 = 1 - y^2$.

44. Todas las funciones que son antiderivadas deben tener derivadas.

45. Si la segunda derivada de dos funciones son iguales, entonces las funciones difieren a lo más por una constante.

46. $\int f'(x)\, dx = f(x)$ para cada función derivable f.

47. Si $s = -16t^2 + v_0 t$ proporciona la altura en el instante t de una pelota lanzada directamente hacia arriba, desde la superficie de la Tierra; entonces, la pelota chocará con el suelo con velocidad $-v_0$.

Problemas de examen

En los problemas del 1 al 12 se dan una función f y su dominio. Determine los puntos críticos, evalúe f en estos puntos y encuentre los valores máximo y mínimo (globales).

1. $f(x) = x^2 - 2x$; $[0, 4]$

2. $f(t) = \dfrac{1}{t}$; $[1, 4]$

3. $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$; $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $[-2, 0)$

5. $f(x) = |x|$; $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

6. $f(s) = s + |s|; [-1, 1]$

7. $f(x) = 3x^4 - 4x^3; [-2, 3]$

8. $f(u) = u^2(u - 2)^{1/3}; [-1, 3]$

9. $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 7; [-1, 3]$

10. $f(x) = (x - 1)^3(x + 2)^2; [-2, 2]$

11. $f(\theta) = \text{sen}\,\theta; [\pi/4, 4\pi/3]$

12. $f(\theta) = \text{sen}^2\,\theta - \text{sen}\,\theta; [0, \pi]$

En los problemas del 13 al 19 se da una función f con dominio $(-\infty, \infty)$. Indique en dónde f es creciente y en dónde es cóncava hacia abajo.

13. $f(x) = 3x - x^2$

14. $f(x) = x^9$

15. $f(x) = x^3 - 3x + 3$

16. $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 1$

17. $f(x) = x^4 - 4x^5$

18. $f(x) = x^3 - \frac{6}{5}x^5$

19. $f(x) = x^3 - x^4$

20. Encuentre en dónde es creciente y en dónde es decreciente la función g, definida mediante $g(t) = t^3 + 1/t$. Encuentre los valores extremos locales de g. Asimismo, encuentre el punto de inflexión. Haga un bosquejo de la gráfica.

21. Encuentre en dónde es creciente y en dónde es decreciente la función f, definida por $f(x) = x^2(x - 4)$. Encuentre los valores extremos locales de f. También encuentre el punto de inflexión. Dibuje la gráfica.

22. Encuentre los valores máximo y mínimo, si existen, de la función definida por

$$f(x) = \frac{4}{x^2 + 1} + 2$$

En los problemas del 23 al 30 bosqueje la gráfica de la función f dada, marque todos los extremos (locales y globales) y los puntos de inflexión y muestre las asíntotas, si las hay. Asegúrese de utilizar f' y f''.

23. $f(x) = x^4 - 2x$

24. $f(x) = (x^2 - 1)^2$

25. $f(x) = x\sqrt{x - 3}$

26. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 3}$

27. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

29. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x}$

30. $f(x) = \dfrac{2}{(x + 1)^2}$

En los problemas del 31 al 36 haga la gráfica de la función f en la región $(-\pi, \pi)$, a menos que se indique lo contrario, etiquete todos los extremos (locales y globales) y los puntos de inflexión; también muestre las asíntotas, si existen. Asegúrese de utilizar f' y f''.

31. $f(x) = \cos x - \text{sen}\,x$

32. $f(x) = \text{sen}\,x - \tan x$

33. $f(x) = x \tan x; (-\pi/2, \pi/2)$

34. $f(x) = 2x - \cot x; (0, \pi)$

35. $f(x) = \text{sen}\,x - \text{sen}^2\,x$

36. $f(x) = 2\cos x - 2\,\text{sen}\,x$

37. Dibuje la gráfica de una función F que tenga todas las propiedades siguientes:

(a) F es continua en todas partes;

(b) $F(-2) = 3, F(2) = -1$;

(c) $F'(x) = 0$ para $x > 2$;

(d) $F''(x) < 0$ para $x < 2$.

38. Dibuje la gráfica de una función F que tenga todas las propiedades siguientes:

(a) F es continua en todas partes;

(b) $F(-1) = 6, F(3) = -2$;

(c) $F'(x) < 0$ para $x < -1, F'(-1) = F'(3) = -2, F'(7) = 0$;

(d) $F''(x) < 0$ para $x < -1, F''(x) = 0$ para $-1 < x < 3$, $F''(x) > 0$ para $x > 3$.

39. Dibuje la gráfica de una función F que tenga todas las propiedades siguientes:

(a) F es continua en todas partes;

(b) F tiene periodo π;

(c) $0 \le F(x) \le 2, F(0) = 0, F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$;

(d) $F'(x) > 0$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}, F'(x) < 0$ para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$;

(e) $F''(x) < 0$ para $0 < x < \pi$.

40. Una larga hoja de metal, de 16 pulgadas de ancho, se dobla hacia arriba en ambos lados para formar un canalón horizontal con lados verticales. ¿Cuántas pulgadas de cada lado deben doblarse hacia arriba para maximizar la capacidad de carga?

41. Una barda, de 8 pies de altura, es paralela a un muro de un edificio y a un pie de éste. ¿Cuál es el tablón más corto que puede pasar por encima de la barda, desde el nivel del piso, para apuntalar el muro?

42. Una página de un libro contiene 27 pulgadas cuadradas de impresión. Si los márgenes superior, inferior y de uno de los lados son de 2 pulgadas y el margen del otro lado es de 1 pulgada, ¿qué tamaño de página utilizaría la menor cantidad de papel?

43. Un abrevadero metálico con extremos semicirculares iguales, sin cubierta superior, debe tener una capacidad de 128π pies cúbicos (véase la figura 1). Determine su radio r y longitud h, si el abrevadero debe requerir la menor cantidad de material para su construcción.

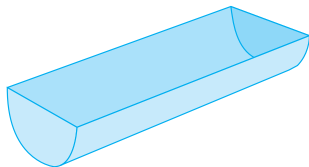


Figura 1

44. Encuentre el máximo y el mínimo de la función definida en el intervalo cerrado $[-2, 2]$ por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x^2 + 6x + 8), & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ -\frac{1}{6}(x^2 + 4x - 12), & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Determine en dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo. Haga un bosquejo de la gráfica.

45. Para cada una de las siguientes funciones decida si se puede aplicar el teorema del valor medio en el intervalo I que se indica. Si es así, encuentre todos los valores posibles de c, si no, diga por qué. Haga un bosquejo.

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3}; I = [-3, 3]$

(b) $F(x) = x^{3/5} + 1; I = [-1, 1]$

(c) $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}; I = [2, 3]$

46. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos de inflexión de la gráfica de

$$y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 3x + 1$$

47. Sea f una función continua con $f(1) = -1/4, f(2) = 0$ y $f(3) = -1/4$. Si la gráfica de $y = f'(x)$ es como la que se muestra en la figura 2, haga un bosquejo de una posible gráfica de $y = f(x)$.

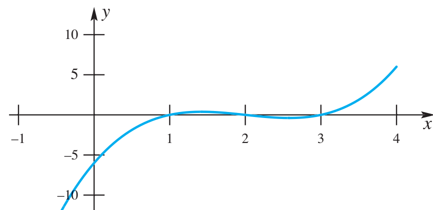


Figura 2

48. Bosqueje la gráfica de una función G con todas las propiedades siguientes:

(a) $G(x)$ es continua y $G''(x) > 0$ para toda x en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;

(b) $G(-2) = G(2) = 3$;

(c) $\lim_{x \to -\infty} G(x) = 2, \lim_{x \to \infty} [G(x) - x] = 0$;

(d) $\lim_{x \to 0^+} G(x) = \lim_{x \to 0^-} G(x) = \infty$.

C **49.** Utilice el método de bisección para resolver $3x - \cos 2x = 0$, con una precisión de seis decimales. Utilice $a_1 = 0$ y $b_1 = 1$.

C **50.** Utilice el método de Newton para resolver $3x - \cos 2x = 0$, con una precisión de seis decimales. Utilice $x_1 = 0.5$.

C **51.** Utilice el algoritmo de punto fijo para resolver $3x - \cos 2x = 0$; inicie con $x_1 = 0.5$.

C **52.** Utilice el método de Newton para resolver $x - \tan x = 0$ en el intervalo $(\pi, 2\pi)$ con una precisión de cuatro decimales. *Sugerencia:* Bosqueje las gráficas de $y = x$ y $y = \tan x$, usando los mismos ejes para obtener una buena aproximación inicial para x_1.

En los problemas del 53 al 67 evalúe las integrales que se indican.

53. $\int \left(x^3 - 3x^2 + 3\sqrt{x}\right) dx$

54. $\int \dfrac{2x^4 - 3x^2 + 1}{x^2}\, dx$

55. $\int \dfrac{y^3 - 9y \operatorname{sen} y + 26y^{-1}}{y}\, dy$

56. $\int y\sqrt{y^2 - 4}\, dy$

57. $\int z(2z^2 - 3)^{1/3}\, dz$

58. $\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx$

59. $\int (x + 1) \tan^2(3x^2 + 6x) \sec^2(3x^2 + 6x)\, dx$

60. $\int \dfrac{t^3}{\sqrt{t^4 + 9}}\, dt$

61. $\int t^4(t^5 + 5)^{2/3}\, dt$

62. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\, dx$

63. $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3 + 9}}\, dx$

64. $\int \dfrac{1}{(y + 1)^2}\, dy$

65. $\int \dfrac{2}{(2y - 1)^3}\, dy$

66. $\int \dfrac{y^2 - 1}{(y^3 - 3y)^2}\, dy$

67. $\int \dfrac{(y^2 + y + 1)}{\sqrt[5]{2y^3 + 3y^2 + 6y}}\, dy$

En los problemas del 68 al 74 resuelva la ecuación diferencial sujeta a la condición que se indica.

68. $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x$; $y = 2$ en $x = 0$

69. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$; $y = 18$ en $x = 3$

70. $\frac{dy}{dx} = \csc y$; $y = \pi$ en $x = 0$

71. $\frac{dy}{dt} = \sqrt{2t - 1}$; $y = -1$ en $t = \frac{1}{2}$

72. $\frac{dy}{dt} = t^2 y^4$; $y = 1$ en $t = 1$

73. $\frac{dy}{dx} = \frac{6x - x^3}{2y}$; $y = 3$ en $x = 0$

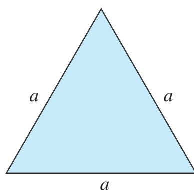
74. $\frac{dy}{dx} = x \sec y$; $y = \pi$ en $x = 0$

75. Se lanza una pelota directamente hacia arriba desde una torre de 448 pies de altura, a una velocidad inicial de 48 pies por segundo. ¿En cuántos segundos chocará con el piso y a qué velocidad? Suponga que $g = 32$ pies por segundo por segundo y no tome en cuenta la resistencia del aire.

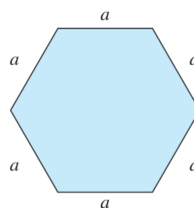
PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

En los problemas del 1 al 12 determine el área de la región sombreada.

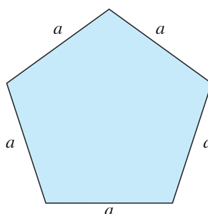
1.



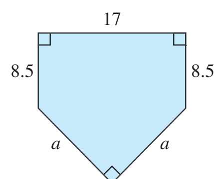
2.



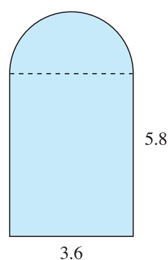
3.



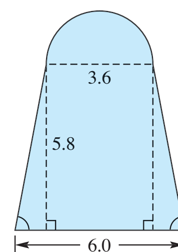
4.



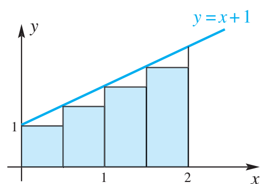
5.



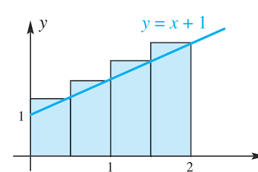
6.



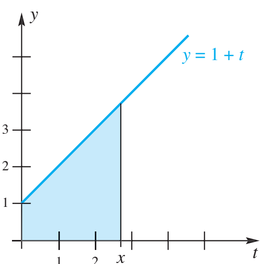
7.



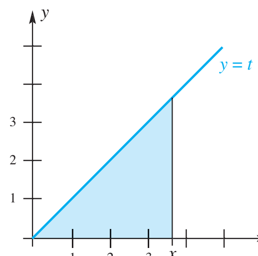
8.



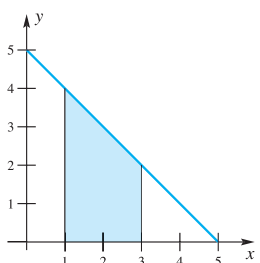
9.



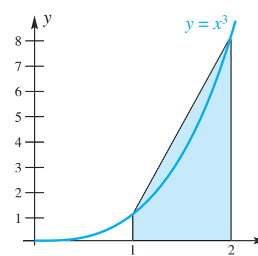
10.



11.



12.



CAPÍTULO 4
La integral definida

4.1 Introducción al área

Dos problemas, ambos de geometría, motivan las dos ideas más importantes en cálculo. El problema de encontrar la recta tangente nos llevó a la *derivada*. El problema de encontrar el área nos conducirá a la *integral definida*.

Para polígonos (regiones planas cerradas acotadas por segmentos de recta), el problema de encontrar el área apenas es un problema. Comenzamos con la definición del área de un rectángulo como la conocida fórmula de largo por ancho y, a partir de esto, de manera sucesiva deducimos las fórmulas para el área de un paralelogramo, un triángulo y cualquier polígono. La sucesión de figuras en la figura 1 sugiere cómo se hace esto.

Incluso, en esta sencilla configuración es claro que el área debe satisfacer cinco propiedades.

1. El área de una región plana es un número (real) no negativo.
2. El área de un rectángulo es el producto de su largo por ancho (ambos medidos en las mismas unidades). El resultado está en unidades cuadradas; por ejemplo, pies cuadrados o centímetros cuadrados.
3. Regiones congruentes tienen áreas iguales.
4. El área de la unión de dos regiones que se traslapan sólo en un segmento de recta es la suma de las áreas de las dos regiones.
5. Si una región está contenida en una segunda región, entonces el área de la primera es menor o igual que el de la segunda.

Cuando consideramos una región con frontera curva, el problema de asignar un área es significativamente más difícil. Sin embargo, hace más de 2000 años, Arquímedes proporcionó la clave de la solución. Considérese una sucesión de polígonos inscritos que aproximen a la región curva con una precisión cada vez mayor. Por ejemplo, para

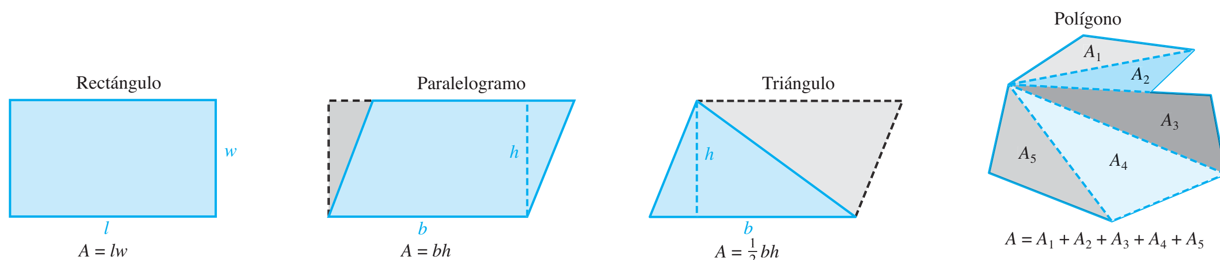


Figura 1

el círculo de radio 1, considérense los polígonos regulares *inscritos* $P_1, P_2, P_3, \ldots$ con 4 lados, 8 lados, 16 lados, . . . , como se muestra en la figura 2. El área del círculo es el límite cuando $n \to \infty$ de las áreas de P_n. De esta manera, si $A(F)$ denota el área de una región F, entonces

$$A(\text{círculo}) = \lim_{n\to\infty} A(P_n)$$

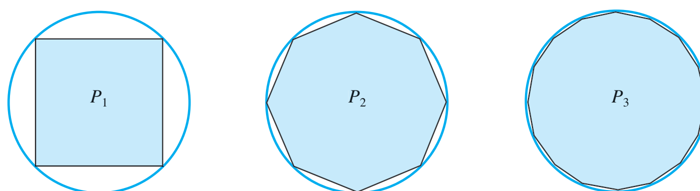


Figura 2

Uso y abuso del lenguaje

Siguiendo con el uso común, nos permitimos un cierto abuso del lenguaje. Las palabras *triángulo*, *rectángulo*, *polígono* y *círculo* serán utilizadas para denotar tanto a las regiones de dos dimensiones de la forma indicada como a sus fronteras unidimensionales. Observe que las regiones tienen áreas, mientras que las curvas tienen longitudes. Cuando decimos que un círculo tiene área πr^2 y circunferencia $2\pi r$, el contexto debe ser claro si *círculo* significa la región o la frontera.

Arquímedes fue más allá, al considerar también polígonos *circunscritos* $T_1, T_2, T_3, \ldots$ (Véase la figura 3.) Demostró que se obtiene el mismo valor para el área del círculo de radio 1 (a la que llamó π), si se inscriben o circunscriben polígonos. Sólo es un pequeño paso entre lo que él hizo y nuestro tratamiento moderno del área.

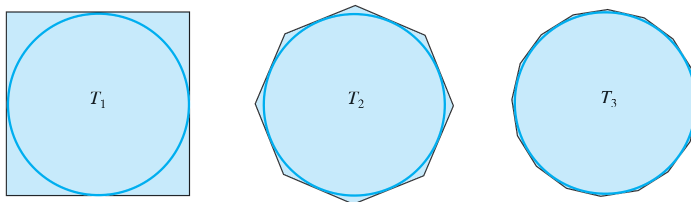


Figura 3

Notación sigma Nuestro enfoque para determinar el área de una región curva, R, implicará los siguientes pasos:

1. Aproximar la región R por medio de n rectángulos, en donde los n rectángulos tomados juntos contengan a R y produzcan un **polígono circunscrito**, o bien, que estén contenidos en R y produzcan un **polígono inscrito**.
2. Determinar el área de cada rectángulo.
3. Sumar las áreas de los n rectángulos.
4. Tomar el límite cuando $n \to \infty$.

Si el límite de las áreas de los polígonos inscritos y circunscritos es el mismo, a este límite le llamamos área de la región R.

El paso 3 incluye la suma de las áreas de los rectángulos, por lo que necesitamos tener una notación para sumas, así como algunas de sus propiedades. Por ejemplo, considere las sumas siguientes:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 100^2$$

y

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

Para indicar estas sumas de una manera compacta, las escribimos como

$$\sum_{i=1}^{100} i^2 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i$$

respectivamente. Aquí Σ (sigma mayúscula griega), que corresponde a la Σ en español, significa que estamos sumando todos los números de la forma indicada cuando el *índice i* recorre todos los enteros positivos, lo cual comienza con el entero que aparece debajo de Σ y finaliza con el entero arriba de Σ. Así,

$$\sum_{i=2}^{4} a_i b_i = a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{k}{k^2 + 1} = \frac{1}{1^2 + 1} + \frac{2}{2^2 + 1} + \frac{3}{3^2 + 1} + \frac{4}{4^2 + 1}$$

Si todas las c_i en $\sum_{i=1}^{n} c_i$ tienen el mismo valor, digamos c, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{n \text{ términos}}$$

Como resultado,

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

En particular,

$$\sum_{i=1}^{5} 2 = 5(2) = 10 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{100} (-4) = 100(-4) = -400$$

Propiedades de $\sum$ Considerado como un operador, Σ opera sobre sucesiones y lo hace de una manera lineal.

Teorema A Linealidad de $\sum$

Si c es una constante, entonces

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$;

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$;

(iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$.

Demostración Las demostraciones son sencillas, sólo consideramos (i).

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 1 Suponga que $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} a_i = 60$ y $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} b_i = 11$. Calcule

$$\sum_{i=1}^{100} (2a_i - 3b_i + 4)$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{100} (2a_i - 3b_i + 4) &= \sum_{i=1}^{100} 2a_i - \sum_{i=1}^{100} 3b_i + \sum_{i=1}^{100} 4 \\ &= 2\sum_{i=1}^{100} a_i - 3\sum_{i=1}^{100} b_i + \sum_{i=1}^{100} 4 \\ &= 2(60) - 3(11) + 100(4) = 487\end{aligned} \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Sumas telescópicas

Demuestre que:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} [(i + 1)^2 - i^2] = (n + 1)^2 - 1$

SOLUCIÓN

(a) Aquí debemos resistir nuestra inclinación por aplicar la linealidad y, en lugar de eso, escribimos la suma y esperamos algunas cancelaciones convenientes.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)\\ &= -a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + a_4 - \cdots - a_n + a_{n+1}\\ &= -a_1 + a_{n+1} = a_{n+1} - a_1\end{aligned}$$

(b) Esto se deduce, de manera inmediata, de la parte (a). ■

El símbolo utilizado para el índice no importa. Así,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

y todos éstas son iguales a $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Por esta razón, con frecuencia al índice se le llama **índice mudo**.

Fórmulas para algunas sumas especiales Al determinar áreas de regiones, con frecuencia necesitaremos considerar la suma de los primeros n enteros positivos, así como las sumas de sus cuadrados, cubos, etcétera. Hay fórmulas útiles para éstas; las demostraciones se estudian después del ejemplo 4.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

EJEMPLO 3 Encuentre una fórmula para $\sum_{j=1}^{n}(j+2)(j-5)$.

SOLUCIÓN Hacemos uso de la linealidad y de las fórmulas 1 y 2 anteriores.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(j+2)(j-5) &= \sum_{j=1}^{n}(j^2 - 3j - 10) = \sum_{j=1}^{n} j^2 - 3\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} 10\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\frac{n(n+1)}{2} - 10n\\ &= \frac{n}{6}[2n^2 + 3n + 1 - 9n - 9 - 60]\\ &= \frac{n(n^2 - 3n - 34)}{3}\end{aligned}$$
■

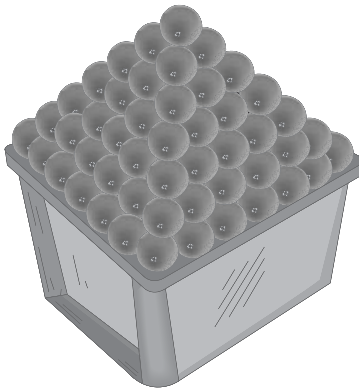


Figura 4

EJEMPLO 4 ¿Cuántas naranjas hay en la pirámide que se muestra en la figura 4?

SOLUCIÓN $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 7^2 = \sum_{i=1}^{7} i^2 = \frac{7(8)(15)}{6} = 140$ ■

Demostraciones de las fórmulas para las sumas especiales Para demostrar la fórmula de la suma especial 1, iniciamos con la identidad $(i+1)^2 - i^2 = 2i + 1$; sumamos ambos lados, aplicamos el ejemplo 2 en el lado izquierdo y utilizamos la linealidad en el derecho.

$$(i+1)^2 - i^2 = 2i + 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^2 - i^2] = \sum_{i=1}^{n}(2i+1)$$

$$(n+1)^2 - 1^2 = 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$n^2 + 2n = 2\sum_{i=1}^{n} i + n$$

$$\frac{n^2+n}{2} = \sum_{i=1}^{n} i$$

Casi la misma técnica funciona para establecer las fórmulas 2, 3 y 4 (véanse los problemas del 29 al 31).

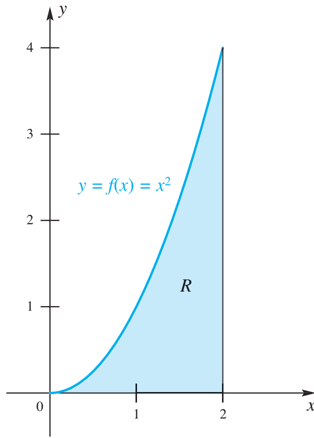


Figura 5



Figura 6

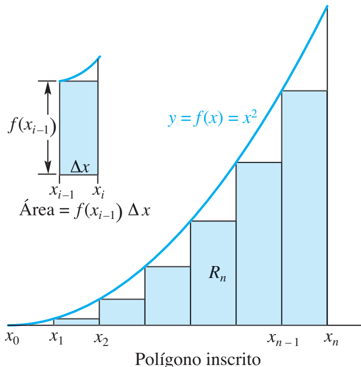


Figura 7

Área por medio de polígonos inscritos Considere la región R acotada por la parábola $y = f(x) = x^2$, el eje x y la recta vertical $x = 2$ (figura 5). Nos referiremos a R como la región acotada bajo la curva $y = x^2$, entre $x = 0$ y $x = 2$. Nuestra meta es calcular su área $A(R)$.

Divida el intervalo $[0, 2]$, como en la figura 6, en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = 2/n$, por medio de los $n + 1$ puntos

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 2$$

Así,

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \Delta x = \frac{2}{n}$$

$$x_2 = 2\cdot\Delta x = \frac{4}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_i = i\cdot\Delta x = \frac{2i}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = (n-1)\cdot\Delta x = \frac{(n-1)2}{n}$$

$$x_n = n\cdot\Delta x = n\left(\frac{2}{n}\right) = 2$$

Considérese el rectángulo representativo con base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(x_{i-1}) = x_{i-1}^2$. Su área es $f(x_{i-1})\Delta x$ (véase la parte superior izquierda de la figura 7). La unión R_n de todos esos rectángulos forma el polígono inscrito en la parte inferior derecha de la figura 7.

El área $A(R_n)$ puede calcularse al sumar las áreas de estos rectángulos.

$$A(R_n) = f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x$$

Ahora,

$$f(x_i)\,\Delta x = x_i^2\,\Delta x = \left(\frac{2i}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{n} = \left(\frac{8}{n^3}\right)i^2$$

Por lo tanto,

$$A(R_n) = \left[\frac{8}{n^3}(0^2) + \frac{8}{n^3}(1^2) + \frac{8}{n^3}(2^2) + \cdots + \frac{8}{n^3}(n-1)^2\right]$$

$$= \frac{8}{n^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2]$$

$$= \frac{8}{n^3}\left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]$$ (Fórmula para la suma especial 2, con $n-1$ en lugar de n)

$$= \frac{8}{6}\left(\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

Concluimos que

$$A(R) = \lim_{n\to\infty} A(R_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3}$$

Los diagramas de la figura 8 deben ayudarnos a visualizar lo que está sucediendo cuando n se hace cada vez más grande.

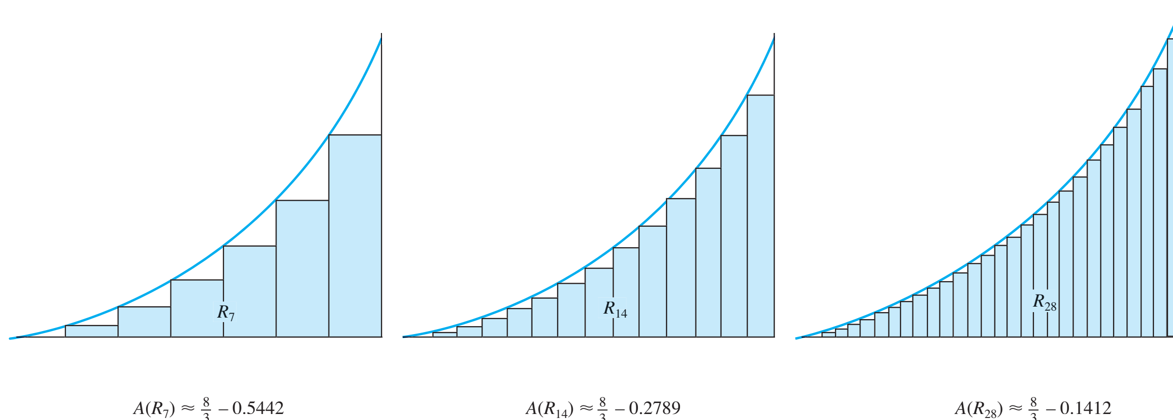


Figura 8

Área por medio de polígonos circunscritos Quizá usted aún no esté convencido de que $A(R) = \frac{8}{3}$. Podemos dar más evidencia. Considérese el rectángulo con base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(x_i) = x_i^2$ (se muestra en la esquina superior izquierda en la figura 9). Su área es $f(x_i)\Delta x$. La unión S_n de todos esos rectángulos forma un polígono circunscrito para la región R, como se muestra en la parte inferior derecha de la figura 9.

El área $A(S_n)$ se calcula en analogía con el cálculo de $A(R_n)$.

$$A(S_n) = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

Como antes, $f(x_i)\,\Delta x = x_i^2\,\Delta x = (8/n^3)i^2$, y así

$$A(S_n) = \left[\frac{8}{n^3}(1^2) + \frac{8}{n^3}(2^2) + \cdots + \frac{8}{n^3}(n^2)\right]$$

$$= \frac{8}{n^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2]$$

$$= \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$ (Fórmula para la suma especial 2)

$$= \frac{8}{6}\left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3}\right]$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

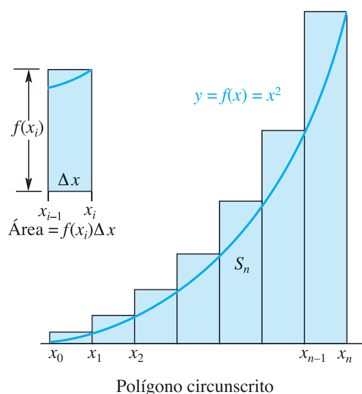


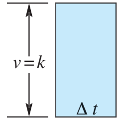
Figura 9

Otra vez, concluimos que

$$A(R) = \lim_{n\to\infty} A(S_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3}$$

Otro problema con el mismo tema Suponga que un objeto está viajando a lo largo del eje x, de tal manera que su velocidad en el instante t está dada por $v = f(t) = \frac{1}{4}t^3 + 1$ pies por segundo. ¿Cuánto avanzará entre $t = 0$ y $t = 3$? Este problema puede resolverse por el método de ecuaciones diferenciales (sección 3.9), pero tenemos algo distinto en mente.

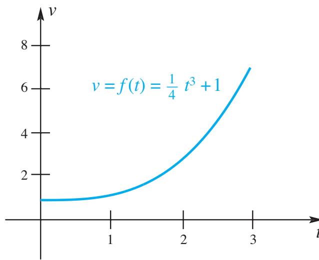
Nuestro punto de partida es el hecho familiar que, si un objeto viaja a velocidad constante k durante un intervalo de tiempo de longitud Δt, entonces la distancia recorrida es $k\,\Delta t$. Pero esto es exactamente el área de un rectángulo, el cual se muestra en la figura 10.



Distancia = $k\,\Delta t$

Figura 10

Ahora considérese el problema dado, en donde $v = f(t) = \frac{1}{4}t^3 + 1$. La gráfica se muestra en la parte superior de la figura 11. Divídase el intervalo $[0, 3]$ en n subintervalos de longitud $\Delta t = 3/n$ por medio de los puntos $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 3$. Después considérense los correspondientes polígonos circunscritos S_n que se muestran en la parte inferior de la figura 11 (también podríamos haber considerado los polígonos inscritos). Su área, $A(S_n)$, debe ser una buena aproximación de la distancia recorrida, en especial si Δt es pequeña, ya que en cada subintervalo la velocidad real es casi igual a una constante (el valor de v al final del subintervalo). Además, esta aproximación debe ser cada vez mejor conforme n se hace más grande. Llegamos a la conclusión de que la distancia exacta recorrida es $\lim_{n\to\infty} A(S_n)$; es decir, es el área de la región debajo de la curva de la velocidad entre $t = 0$ y $t = 3$.



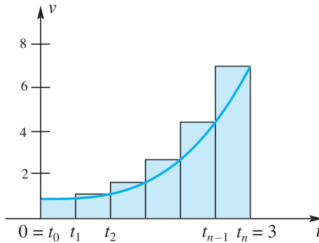


Figura 11

Para calcular $A(S_n)$, observe que $t_i = 3i/n$, y por lo tanto el área del i-ésimo rectángulo es

$$f(t_i)\,\Delta t = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{3i}{n}\right)^3 + 1\right]\frac{3}{n} = \frac{81}{4n^4}\,i^3 + \frac{3}{n}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}
A(S_n) &= f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + \cdots + f(t_n)\,\Delta t \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{81}{4n^4}\,i^3 + \frac{3}{n}\right) \\
&= \frac{81}{4n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n} \\
&= \frac{81}{4n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + \frac{3}{n}\cdot n \qquad \text{(Fórmula para la suma especial 3)} \\
&= \frac{81}{16}\left[n^2\frac{(n^2 + 2n + 1)}{n^4}\right] + 3 \\
&= \frac{81}{16}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + 3
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} A(S_n) = \frac{81}{16} + 3 = \frac{129}{16} \approx 8.06$$

El objeto recorrió alrededor de 8.06 pies, entre $t = 0$ y $t = 3$.

Lo que fue cierto en este ejemplo es verdadero para cualquier objeto en movimiento con velocidad positiva. *La distancia recorrida es el área de la región bajo la curva de la velocidad.*

Revisión de conceptos

1. El valor de $\sum_{i=1}^{5} 2i$ es ________ y el valor de $\sum_{i=1}^{5} 2$ es ________.

2. Si $\sum_{i=1}^{10} a_i = 9$ y $\sum_{i=1}^{10} b_i = 7$, entonces el valor de $\sum_{i=1}^{10} (3a_i - 2b_i) =$ _____ y el valor de $\sum_{i=1}^{10} (a_i + 4) =$ _____.

3. El área de un polígono ________ subestima (estima por defecto) el área de la región, mientras que el área de un polígono _______ sobreestima (estima por exceso) esta área.

4. El valor exacto de la región bajo la curva $y = [\![x]\!]$ entre 0 y 4 es ________.

Conjunto de problemas 4.1

En los problemas del 1 al 8 encuentre los valores de la suma indicada.

1. $\sum_{k=1}^{6} (k - 1)$

2. $\sum_{i=1}^{6} i^2$

3. $\sum_{k=1}^{7} \frac{1}{k + 1}$

4. $\sum_{l=3}^{8} (l + 1)^2$

5. $\sum_{m=1}^{8} (-1)^m 2^{m-2}$

6. $\sum_{k=3}^{7} \frac{(-1)^k 2^k}{(k + 1)}$

7. $\sum_{n=1}^{6} n \cos(n\pi)$

8. $\sum_{k=-1}^{6} k \operatorname{sen}(k\pi/2)$

En los problemas del 9 al 14 escriba la suma que se indica en la notación sigma.

9. $1 + 2 + 3 + \cdots + 41$

10. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 50$

11. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100}$

12. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{100}$

13. $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{99}$

14. $f(w_1)\,\Delta x + f(w_2)\,\Delta x + \cdots + f(w_n)\,\Delta x$

En los problemas del 15 al 18 suponga que $\sum_{i=1}^{10} a_i = 40$ *y* $\sum_{i=1}^{10} b_i = 50$. *Calcule cada una de las sumas siguientes (véase el ejemplo 1).*

15. $\sum_{i=1}^{10} (a_i + b_i)$

16. $\sum_{n=1}^{10} (3a_n + 2b_n)$

17. $\sum_{p=0}^{9} (a_{p+1} - b_{p+1})$

18. $\sum_{q=1}^{10} (a_q - b_q - q)$

En los problemas del 19 al 24 utilice las fórmulas para las sumas especiales de la 1 a la 4 para encontrar cada una de las sumas.

19. $\sum_{i=1}^{100} (3i - 2)$

20. $\sum_{i=1}^{10} [(i - 1)(4i + 3)]$

21. $\sum_{k=1}^{10} (k^3 - k^2)$

22. $\sum_{k=1}^{10} 5k^2(k + 4)$

23. $\sum_{i=1}^{n} (2i^2 - 3i + 1)$

24. $\sum_{i=1}^{n} (2i - 3)^2$

25. Sume ambos lados de las dos igualdades que siguen, despeje S y de aquí proporcione otra demostración de la fórmula 1.

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 2) + (n - 1) + n$$
$$S = n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 3 + 2 + 1$$

26. Demuestre la siguiente fórmula para una **suma geométrica**:

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a - ar^{n+1}}{1 - r} (r \neq 1)$$

Sugerencia: sea $S = a + ar + \cdots + ar^n$. Simplifique $S - rS$ y despeje S.

27. Utilice el problema 26 para calcular cada suma.

(a) $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ (b) $\sum_{k=1}^{10} 2^k$

28. Utilice una deducción como la del problema 25 para obtener una fórmula para la **suma aritmética**:

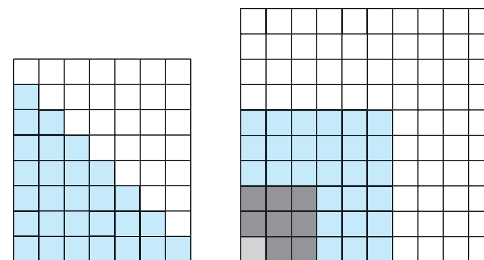
$$\sum_{k=0}^{n} (a + kd) = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + nd)$$

29. Utilice la identidad $(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$ para demostrar la fórmula de la suma especial 2.

30. Utilice la identidad $(i+1)^4 - i^4 = 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1$ para demostrar la fórmula de la suma especial 3.

31. Utilice la identidad $(i + 1)^5 - i^5 = 5i^4 + 10i^3 + 10i^2 + 5i + 1$ para demostrar la fórmula de la suma especial 4.

32. Utilice los diagramas de la figura 12 para establecer las fórmulas 1 y 3.



$1 + 2 + \cdots + n =$ $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 =$

Figura 12

C **33.** En estadística definimos la *media* $\bar{x}$ y la *varianza* s^2 de una sucesión de números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Encuentre $\bar{x}$ y s^2 para la sucesión de números 2, 5, 7, 8, 9, 10, 14.

34. Mediante las definiciones del problema 33 encuentre $\bar{x}$ y s^2 para cada sucesión de números.

(a) 1, 1, 1, 1, 1 (b) 1001, 1001, 1001, 1001, 1001

(c) 1, 2, 3 (d) 1,000,001; 1,000,002; 1,000,003

35. Utilice las definiciones del problema 33 para demostrar que cada igualdad es verdadera.

(a) $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$ (b) $s^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \bar{x}^2$

36. Con base en su respuesta a las partes (a) y (b) del problema 34, haga una conjetura acerca de la varianza de n números idénticos. Demuestre su conjetura.

37. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cualesquiera números reales. Encuentre el valor de c que minimiza $\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2$.

38. En la canción *Los doce días de Navidad*, mi verdadero amor me dio 1 regalo el primer día, 1 + 2 regalos el segundo día, 1 + 2 + 3 regalos el tercer día, y así sucesivamente durante 12 días.

(a) Encuentre el número total de regalos otorgados en 12 días.

(b) Encuentre una fórmula para T_n, el número de regalos dados durante una Navidad de n días.

39. Un tendero colocó naranjas en una pila piramidal. Si la capa inferior es rectangular con 10 hileras de 16 naranjas y en la capa superior tiene una sola hilera de naranjas, ¿cuántas naranjas hay en la pila?

40. Responda la misma pregunta del problema 39, si la capa inferior tiene 50 hileras de 60 naranjas.

41. Generalice el resultado de los problemas 39 y 40 al caso de m hileras de n naranjas.

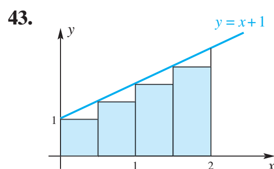
42. Determine una fórmula sencilla para la suma

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

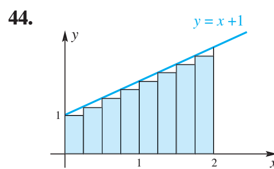
Sugerencia: $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$.

En los problemas del 43 al 48 encuentre el área del polígono inscrito o circunscrito que se indica.

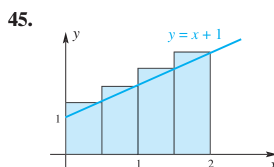
43.



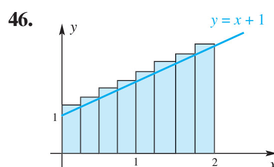
44.



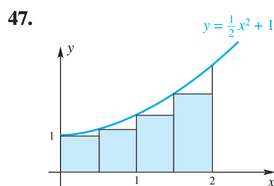
45.



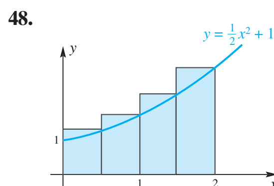
46.



47.



48.



En los problemas del 49 al 52 haga un bosquejo de la gráfica de la función que se da en el intervalo [a, b]; después divida [a, b] en n subintervalos iguales. Por último, calcule el área del correspondiente polígono circunscrito.

49. $f(x) = x + 1; a = -1, b = 2, n = 3$

50. $f(x) = 3x - 1; a = 1, b = 3, n = 4$

C **51.** $f(x) = x^2 - 1; a = 2, b = 3, n = 6$

C **52.** $f(x) = 3x^2 + x + 1; a = -1, b = 1, n = 10$

En los problemas del 53 al 58 encuentre el área de la región bajo la curva y = f(x) en el intervalo [a, b]. Para hacer esto, divida el intervalo [a, b] en n subintervalos iguales, calcule el área del correspondiente polígono circunscrito y después haga n → ∞. (Véase el ejemplo para y = x² en el texto.)

53. $y = x + 2; a = 0, b = 1$

54. $y = \frac{1}{2}x^2 + 1; a = 0, b = 1$

55. $y = 2x + 2; a = -1, b = 1$. *Sugerencia:* $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$

56. $y = x^2; a = -2, b = 2$

≈ **57.** $y = x^3; a = 0, b = 1$

≈ **58.** $y = x^3 + x; a = 0, b = 1$

59. Suponga que un objeto está viajando a lo largo del eje x, de tal manera que su velocidad a los t segundos es $v = t + 2$ pies por segundo. ¿Qué distancia recorrió entre $t = 0$ y $t = 1$? *Sugerencia:* véase el análisis del problema de la velocidad al final de esta sección y utilice el resultado del problema 53.

60. Siga las instrucciones del problema 59 dado que $v = \frac{1}{2}t^2 + 2$. Puede utilizar el resultado del problema 54.

61. Denótese con A_a^b el área bajo la curva $y = x^2$ en el intervalo $[a, b]$.

(a) Demuestre que $A_0^b = b^3/3$. *Sugerencia:* $\Delta x = b/n$, de modo que $x_i = ib/n$; utilice polígonos circunscritos.

(b) Demuestre que $A_a^b = b^3/3 - a^3/3$. Suponga que $a \geq 0$.

62. Suponga que un objeto, que se mueve a lo largo del eje x, tiene velocidad $v = t^2$ metros por segundo a los t segundos. ¿Qué distancia viajó entre $t = 3$ y $t = 5$? Véase el problema 61.

63. Utilice los resultados del problema 61 para calcular el área bajo la curva $y = x^2$ en cada uno de los siguientes intervalos.

(a) $[0, 5]$ (b) $[1, 4]$ (c) $[2, 5]$

64. Con base en las fórmulas especiales para la suma de la 1 a la 4, podría suponer que

$$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + C_n$$

donde C_n es un polinomio en n de grado m. Suponga que esto es cierto (que lo es) y, para $a \geq 0$, sea $A_a^b(x^m)$ el área bajo la curva $y = x^m$ en el intervalo $[a, b]$.

(a) Demuestre que $A_0^b(x^m) = \frac{b^{m+1}}{(m+1)}$.

(b) Demuestre que $A_a^b(x^m) = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}$.

65. Utilice los resultados del problema 64 para calcular cada una de las siguientes áreas.

(a) $A_0^2(x^3)$ (b) $A_1^2(x^3)$ (c) $A_1^2(x^5)$ (d) $A_0^2(x^9)$

66. Deduzca las fórmulas $A_n = \frac{1}{2}nr^2 \operatorname{sen}(2\pi/n)$ y $B_n = nr^2 \tan(\pi/n)$ para las áreas de los polígonos regulares de n lados inscritos

y circunscritos en un círculo de radio r. Después demuestre que $\lim_{n\to\infty} A_n$ y $\lim_{n\to\infty} B_n$ ambos son πr^2.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** 30; 10 **2.** 13; 49 **3.** inscrito; circunscrito **4.** 6

4.2 La integral definida

Todos los preparativos están hechos; estamos listos para definir la integral definida. Newton y Leibniz introdujeron las primeras versiones de este concepto. Sin embargo, fue Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) quien nos dio la definición moderna. En la formulación de esta definición nos guían las ideas analizadas en la sección precedente. La primera noción es la de una suma de Riemann.

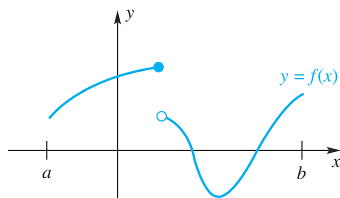


Figura 1

Sumas de Riemann Considere una función f definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Puede haber valores tanto positivos como negativos en el intervalo; incluso, no necesita ser continua. Su gráfica podría parecerse a la de la figura 1.

Suponga una partición P del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos (no necesariamente de la misma longitud) por medio de los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ y sea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ selecciónese un punto $\overline{x}_i$ (que puede ser un punto frontera); le llamamos *punto muestra* para el i-ésimo subintervalo. Un ejemplo se estas construcciones se muestra en la figura 2 para $n = 6$.

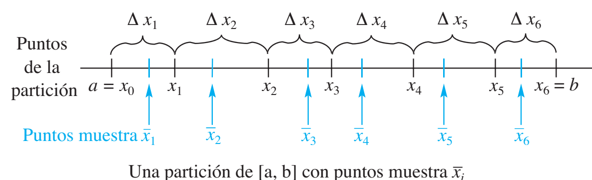


Figura 2

A la suma

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i$$

le llamamos una **suma de Riemann** para f correspondiente a la partición P. Su interpretación geométrica se muestra en la figura 3.

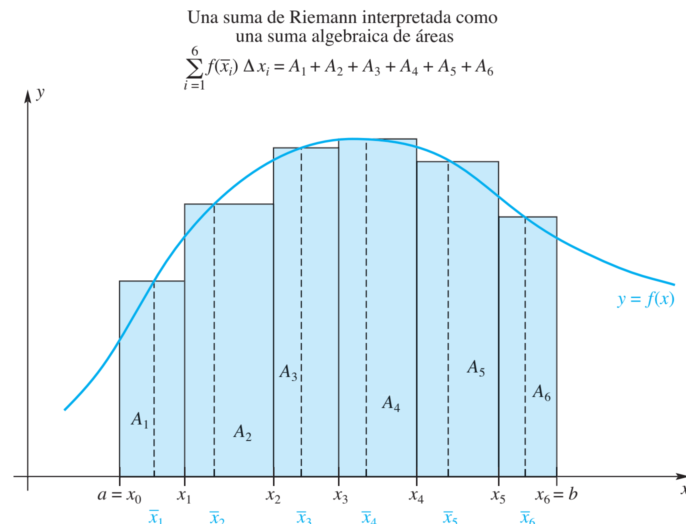


Figura 3

EJEMPLO 1 Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = x^2 + 1$, en el intervalo $[-1, 2]$; utilice la partición de puntos igualmente espaciados $-1 < -0.5 < 0 < 0.5 < 1 < 1.5 < 2$ y tome como punto muestral $\overline{x}_i$ al punto medio del i-ésimo subintervalo.

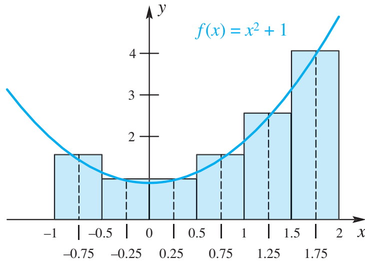


Figura 4

SOLUCIÓN Observe la gráfica en la figura 4.

$$\begin{aligned} R_P &= \sum_{i=1}^{6} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i \\ &= \left[f(-0.75) + f(-0.25) + f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75)\right](0.5) \\ &= [1.5625 + 1.0625 + 1.0625 + 1.5625 + 2.5625 + 4.0625](0.5) \\ &= 5.9375 \end{aligned}$$

■

Las funciones en las figuras 3 y 4 fueron positivas. A consecuencia de esto, la suma de Riemann es simplemente la suma de las áreas de los rectángulos. Pero, ¿qué pasa si f es negativa? En este caso, un punto muestra, $\overline{x}_i$ con la propiedad de que $f(\overline{x}_i) < 0$ llevará a un rectángulo que está completamente por debajo del eje x, y el producto $f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i$ será negativo. Esto significa que la contribución de tal rectángulo a la suma de Riemann es negativa. La figura 5 ilustra esto.

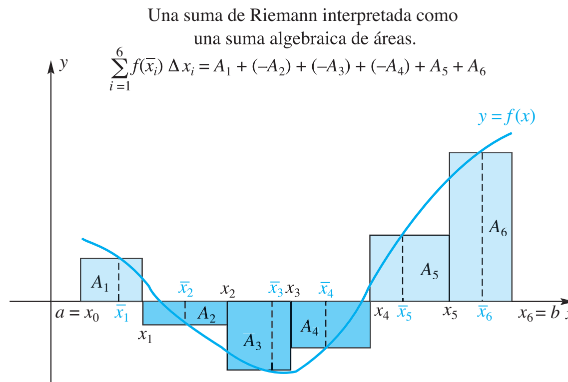


Figura 5

EJEMPLO 2 Evalúe la suma de Riemann R_p para

$$f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

en el intervalo $[0, 5]$; utilice la partición P con puntos de la partición $0 < 1.1 < 2 < 3.2 < 4 < 5$ y los correspondientes puntos muestra $\overline{x}_1 = 0.5$, $\overline{x}_2 = 1.5$, $\overline{x}_3 = 2.5$, $\overline{x}_4 = 3.6$, y $\overline{x}_5 = 5$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} R_P &= \sum_{i=1}^{5} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i \\ &= f(\overline{x}_1)\,\Delta x_1 + f(\overline{x}_2)\,\Delta x_2 + f(\overline{x}_3)\,\Delta x_3 + f(\overline{x}_4)\,\Delta x_4 + f(\overline{x}_5)\,\Delta x_5 \\ &= f(0.5)(1.1 - 0) + f(1.5)(2 - 1.1) + f(2.5)(3.2 - 2) \\ &\quad + f(3.6)(4 - 3.2) + f(5)(5 - 4) \\ &= (7.875)(1.1) + (3.125)(0.9) + (-2.625)(1.2) + (-2.944)(0.8) + 18(1) \\ &= 23.9698 \end{aligned}$$

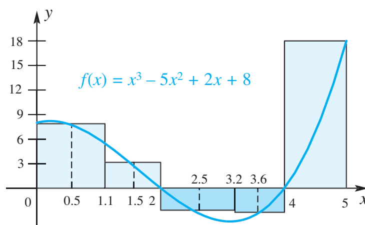


Figura 6

La correspondiente representación gráfica aparece en la figura 6. ■

Definición de la integral definida Ahora supóngase que P, Δx_i y $\bar{x}_i$ tienen los significados dados anteriormente. Además, sea $\|P\|$, llamada la **norma** de P, y que denota la longitud del subintervalo más largo de la partición P. Así, en el ejemplo 1, $\|P\| = 0.5$; en el ejemplo 2, $\|P\| = 3.2 - 2 = 1.2$.

> **Notación para integrales**
>
> Hemos elegido como nuestro símbolo para la integral definida la misma "S" alargada, como lo hicimos para la antiderivada en el capítulo anterior. La "S", por supuesto, se establece por "suma", ya que la integral definida es el límite de un tipo particular de suma, la suma de Riemann.
>
> La conexión entre la antiderivada del capítulo 3 y la integral definida en esta sección se aclarará en la sección 4.4, cuando presentemos el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

> **Definición** Integral definida
>
> Sea f una función que está definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si
>
> $$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$
>
> existe, decimos que f es integrable en $[a, b]$. Además, $\int_a^b f(x)\,dx$, denominada **integral definida** (o integral de Riemann) de f de a hacia b, entonces está dada por
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$

El corazón de la definición es la última línea. El concepto capturado en esa ecuación surge de nuestro análisis del área en la sección anterior. Sin embargo, hemos modificado de forma considerable la noción presentada aquí. Por ejemplo, ahora permitimos que f sea negativa en parte o en todo $[a, b]$; también utilizamos particiones con subintervalos que pueden tener longitudes diferentes y permitimos que $\bar{x}_i$ sea *cualquier* punto del i-ésimo subintervalo. Debido a que hemos realizado estos cambios, es importante establecer de manera precisa cómo se relaciona la integral definida con el área. En general, $\int_a^b f(x)\,dx$ proporciona el *área con signo* de la región encerrada entre la curva $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a, b]$, queriendo decir que se asocia un signo positivo a las áreas de partes que están por arriba del eje x y se asocia un signo negativo a las áreas de partes que están abajo del eje x. En símbolos,

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_{\text{arriba}} - A_{\text{abajo}}$$

donde A_{arriba} y A_{abajo} son como se muestran en la figura 7.

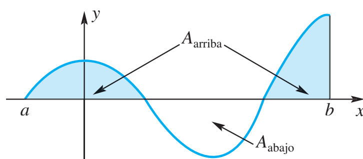


Figura 7

El significado de la palabra *límite* en la definición de integral definida es más general que en el uso que se ha dado antes y debe explicarse. La igualdad

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i = L$$

significa que, en correspondencia a cada $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i - L \right| < \varepsilon$$

para todas las sumas de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$ para f en $[a, b]$, para las cuales la norma $\|P\|$ de la partición asociada es menor que δ. En este caso, decimos que el límite dado existe y tiene el valor L.

Esto fue un bocado y no lo digeriremos en un momento ahora. Simplemente afirmamos que los teoremas usuales sobre límites también se cumplen para esta clase de límite.

En cuanto al símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$, podríamos llamar a a extremo inferior y a b extremo superior de la integral. No obstante, la mayoría de los autores utilizan la terminología **límite inferior** de integración y **límite superior** de integración, que está bien

a condición de que nos demos cuenta de que este uso de la palabra *límite* no tiene nada que ver con su significado más técnico.

En nuestra definición de $\int_a^b f(x)\,dx$, de manera implícita supusimos que $a < b$. Con las definiciones siguientes, eliminamos esa restricción.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \quad a > b$$

Por lo tanto,

$$\int_2^2 x^3\,dx = 0, \qquad \int_6^2 x^3\,dx = -\int_2^6 x^3\,dx$$

Por último, señalamos que x es una **variable muda** en el símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$. Con esto queremos decir que x puede reemplazarse por cualquier otra letra (con tal que, por supuesto, ésta se sustituya en cada lugar que se presente). Por lo tanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$$

¿Cuáles funciones son integrables? No toda función es integrable en un intervalo cerrado $[a, b]$. Por ejemplo, la función no acotada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

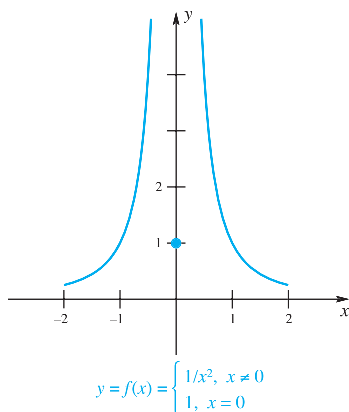


Figura 8

la cual se grafica en la figura 8, no es integrable en $[-2, 2]$. Puede demostrarse que para esta función no acotada, la suma de Riemann puede hacerse arbitrariamente grande. Por lo tanto, el límite de la suma de Riemann en $[-2, 2]$ no existe.

Incluso, algunas funciones acotadas pueden no ser integrables, pero tienen que ser muy complicadas (para un ejemplo, véase el problema 39). El teorema A (a continuación) es el más importante respecto a la integrabilidad. Desafortunadamente, es demasiado difícil demostrarlo aquí, lo dejamos para libros de cálculo avanzado.

Teorema A **Teorema de integrabilidad**

Si f es acotada en $[a, b]$ y si f es continua, excepto en un número finito de puntos, entonces f es integrable en $[a, b]$. En particular, si f es continua en todo el intervalo $[a, b]$, es integrable en $[a, b]$.

Como una consecuencia de este teorema, las funciones que están a continuación son integrables en todo intervalo cerrado $[a, b]$.

1. Funciones polinomiales.
2. Funciones seno y coseno.
3. Funciones racionales, con tal que el intervalo $[a, b]$ no contenga puntos en donde el denominador sea cero.

Cálculo de integrales definidas El saber que una función es integrable nos permite calcular su integral mediante una **partición regular** (es decir, una partición con

subintervalos de igual longitud) y la elección de los puntos muestra $\bar{x}_i$ de cualquier forma conveniente para nosotros. Los ejemplos 3 y 4 incluyen polinomios que, lo acabamos de aprender, son integrables.

EJEMPLO 3 Evalúe $\int_{-2}^{3} (x + 3)\, dx$.

SOLUCIÓN Divídase el intervalo $[-2, 3]$ en n subintervalos iguales, cada uno de longitud $\Delta x = 5/n$. En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ utilícese $\bar{x}_i = x_i$ como el punto muestra. Entonces

$$\begin{aligned}
x_0 &= -2 \\
x_1 &= -2 + \Delta x = -2 + \frac{5}{n} \\
x_2 &= -2 + 2\,\Delta x = -2 + 2\left(\frac{5}{n}\right) \\
&\vdots \\
x_i &= -2 + i\,\Delta x = -2 + i\left(\frac{5}{n}\right) \\
&\vdots \\
x_n &= -2 + n\,\Delta x = -2 + n\left(\frac{5}{n}\right) = 3
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x_i) = x_i + 3 = 1 + i(5/n)$, de modo que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[1 + i\left(\frac{5}{n}\right)\right]\frac{5}{n} \\
&= \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{5}{n}(n) + \frac{25}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \qquad \text{(Fórmula para la suma especial 1)} \\
&= 5 + \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Como P es una partición regular, $\|P\| \to 0$ es equivalente a $n \to \infty$. Concluimos que

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{3} (x + 3)\, dx &= \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \\
&= \lim_{n \to \infty}\left[5 + \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \frac{35}{2}
\end{aligned}$$

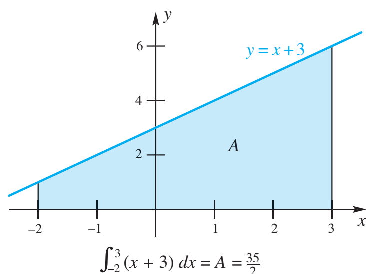


Figura 9

Con facilidad podemos verificar nuestra respuesta, ya que la integral pedida da el área del trapecio de la figura 9. La conocida fórmula para el área de un trapecio $A = \frac{1}{2}(a + b)h$ da $\frac{1}{2}(1 + 6)5 = 35/2$. ■

EJEMPLO 4 Evalúe $\int_{-1}^{3} (2x^2 - 8)\, dx$.

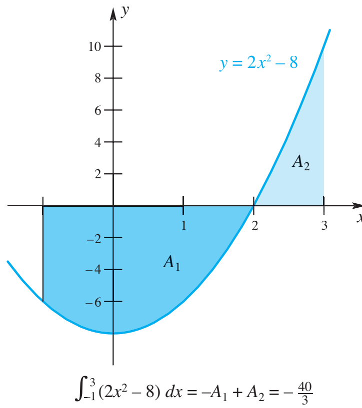


Figura 10

Sentido común

Dada la gráfica de una función, siempre podemos hacer una estimación para el valor de una integral definida utilizando el hecho de que es el área con signo

$$A_{\text{arriba}} - A_{\text{abajo}}$$

Por lo tanto, en el ejemplo 4 podríamos estimar el valor de la integral haciendo de cuenta que la parte por arriba del eje x es un triángulo y la parte por abajo del eje x es un rectángulo. Nuestra estimación es

$$\tfrac{1}{2}(1)(10) - (3)(6) = -13$$

SOLUCIÓN Aquí no hay fórmula de geometría elemental que nos ayude. La figura 10 sugiere que la integral es $-A_1 + A_2$, en donde A_1 y A_2 son las áreas de las regiones por abajo y por encima del eje x, respectivamente.

Sea P una partición regular de $[-1, 3]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = 4/n$, En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, elíjase $\overline{x}_i$, como el punto frontera del lado derecho, de modo que $\overline{x}_i = x_i$. Entonces,

$$x_i = -1 + i\,\Delta x = -1 + i\left(\frac{4}{n}\right)$$

y

$$f(x_i) = 2x_i^2 - 8 = 2\left[-1 + i\left(\frac{4}{n}\right)\right]^2 - 8$$
$$= -6 - \frac{16i}{n} + \frac{32i^2}{n^2}$$

En consecuencia,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left[-6 - \frac{16}{n}\,i + \frac{32}{n^2}\,i^2\right]\frac{4}{n}$$
$$= -\frac{24}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{64}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{128}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$
$$= -\frac{24}{n}(n) - \frac{64}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{128}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= -24 - 32\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{128}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

Concluimos que

$$\int_{-1}^{3}(2x^2 - 8)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[-24 - 32\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{128}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]$$
$$= -24 - 32 + \frac{128}{3} = -\frac{40}{3}$$

No es de sorprender que la respuesta sea negativa, ya que la región por debajo del eje x parece ser mayor que aquella que está por encima del eje x (véase la figura 10). Nuestra respuesta es cercana a la estimación dada en la nota al margen SENTIDO COMÚN; esto nos reafirma que nuestra respuesta probablemente sea correcta. ■

Propiedad aditiva para intervalos Nuestra definición de integral definida fue motivada por el problema de áreas para regiones curvas. Considérense las dos regiones curvas R_1 y R_2 de la figura 11 y sea $R = R_1 \cup R_2$. Es claro que

$$A(R) = A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + A(R_2)$$

lo cual sugiere que

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

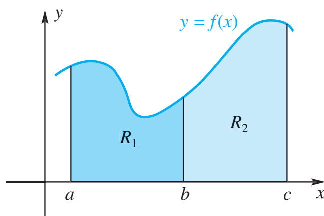


Figura 11

Rápidamente señalamos que esto no constituye una demostración de este hecho acerca de integrales, ya que, antes que nada, nuestro análisis de área en la sección 4.1 fue un

poco informal y, segundo, nuestro diagrama supone que f es positiva, lo cual no necesariamente es cierto. Sin embargo, las integrales definidas satisfacen esta propiedad aditiva para intervalos y no importa cómo estén acomodados los tres puntos a, b y c. Dejamos la demostración rigurosa para trabajos más avanzados.

Teorema B Propiedad aditiva para intervalos

Si f es integrable en un intervalo que contenga a los puntos a, b y c, entonces

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

no importa el orden de a, b y c.

Por ejemplo,

$$\int_0^2 x^2\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 x^2\,dx$$

lo cual, de buena gana, la mayoría de las personas cree. Pero también es cierto que

$$\int_0^2 x^2\,dx = \int_0^3 x^2\,dx + \int_3^2 x^2\,dx$$

lo cual parece sorprendente. Si usted desconfía del teorema, podría evaluar realmente cada una de las integrales anteriores para ver que se cumple la igualdad.

Velocidad y posición Casi al final de la sección 4.1 explicamos cómo el área debajo de la curva de la velocidad es igual a la distancia recorrida, siempre que la función velocidad $v(t)$ sea positiva. En general, la posición (que podría ser positiva o negativa) es igual a la integral definida de la función velocidad (que podría ser positiva o negativa). Para ser más específicos, si $v(t)$ es la velocidad de un objeto en el instante t, donde $t \geq 0$, y si el objeto está en la posición 0 en el instante 0, entonces la posición del objeto en el instante a es $\int_0^a v(t)\,dt$.

EJEMPLO 5 Un objeto en el origen en el instante $t = 0$ tiene velocidad, medida en metros por segundo,

$$v(t) = \begin{cases} t/20, & \text{si } 0 \leq t \leq 40 \\ 2, & \text{si } 40 < t \leq 60 \\ 5 - t/20 & \text{si } t > 60 \end{cases}$$

Haga un bosquejo de la curva velocidad. Exprese la posición del objeto en $t = 140$ como una integral definida y evalúela mediante fórmulas de la geometría plana.

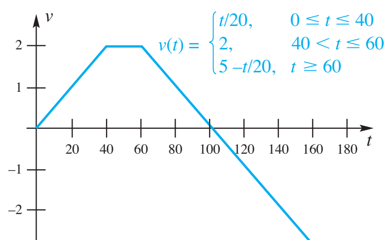


Figura 12

SOLUCIÓN La figura 12 muestra la curva solución. La posición en el instante 140 es igual a la integral definida $\int_0^{140} v(t)\,dt$, que puede evaluarse por medio de las fórmulas para el área de un triángulo y de un rectángulo; asimismo, con el uso de la propiedad aditiva para intervalos (teorema B):

$$\int_0^{140} v(t)\,dt = \int_0^{40} \frac{t}{20}dt + \int_{40}^{60} 2\,dt + \int_{60}^{140}\left(5 - \frac{t}{20}\right)dt$$

$$= 40 + 40 + 40 - 40 = 80$$

■

Revisión de conceptos

1. Una suma de la forma $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i$ se denomina _____.

2. El límite de la suma anterior para f definida en $[a, b]$ se llama una ______ y se simboliza por medio de ______.

3. Geométricamente, la integral definida corresponde a un área con signo. En términos de A_{arriba} y A_{abajo}, $\int_a^b f(x)\,dx = =$ _______.

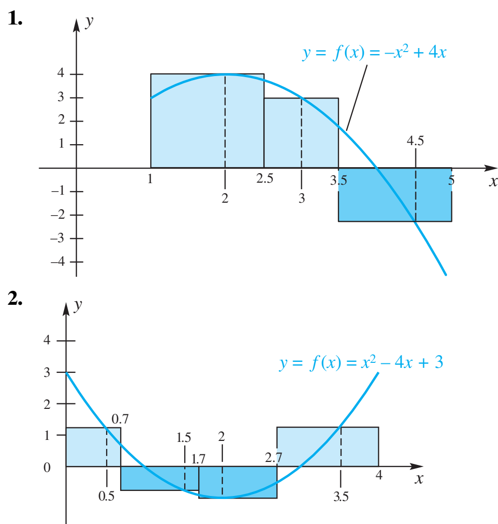
4. Por lo tanto, el valor de $\int_{-1}^{4} x\,dx$ es _______.

Conjunto de problemas 4.2

En los problemas 1 y 2 calcule la suma de Riemann que se sugiere para cada figura.

1.

2.



En los problemas del 3 al 6 calcule la suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$ *para los datos que se dan.*

3. $f(x) = x - 1$; $P: 3 < 3.75 < 4.25 < 5.5 < 6 < 7$; $\bar{x}_1 = 3, \bar{x}_2 = 4, \bar{x}_3 = 4.75, \bar{x}_4 = 6, \bar{x}_5 = 6.5$

4. $f(x) = -x/2 + 3$; $P: -3 < -1.3 < 0 < 0.9 < 2$; $\bar{x}_1 = -2, \bar{x}_2 = -0.5, \bar{x}_3 = 0, \bar{x}_4 = 2$

C **5.** $f(x) = x^2/2 + x$; $[-2, 2]$ se dividió en ocho subintervalos iguales, $\bar{x}_i$ es el punto medio.

C **6.** $f(x) = 4x^3 + 1$; $[0, 3]$ se dividió en seis subintervalos iguales, $\bar{x}_i$ es el punto del extremo derecho.

En los problemas del 7 al 10 utilice los valores que se dan de a y b y exprese el límite dado como una integral definida.

7. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar{x}_i)^3\,\Delta x_i$; $a = 1, b = 3$

8. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar{x}_i + 1)^3\,\Delta x_i$; $a = 0, b = 2$

9. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\bar{x}_i^2}{1 + \bar{x}_i}\,\Delta x_i$; $a = -1, b = 1$

10. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{sen} \bar{x}_i)^2\,\Delta x_i$; $a = 0, b = \pi$

≈ *En los problemas del 11 al 16 evalúe las integrales definidas con el uso de la definición, como en los ejemplos 3 y 4.*

11. $\int_0^2 (x + 1)\,dx$ **12.** $\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx$

Sugerencia: utilice $\bar{x}_i = 2i/n$.

13. $\int_{-2}^{1} (2x + \pi)\,dx$ **14.** $\int_{-2}^{1} (3x^2 + 2)\,dx$

Sugerencia: utilice $\bar{x}_i = -2 + 3i/n$.

15. $\int_0^5 (x + 1)\,dx$ **16.** $\int_{-10}^{10} (x^2 + x)\,dx$

En los problemas del 17 al 22, por medio de la propiedad aditiva para intervalos y las fórmulas adecuadas para áreas de la geometría plana, calcule $\int_a^b f(x)\,dx$, *donde a y b son los extremos izquierdo y derecho para los cuales f está definida. Comience por elaborar una gráfica de la función que se da.*

17. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \le 2 \\ x & \text{si } 2 < x \le 5 \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2(x - 1) + 2 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$

19. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{4 - x^2} & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ -2x - 2 & \text{si } 0 < x \le 2 \end{cases}$

21. $f(x) = \sqrt{A^2 - x^2}$; $-A \le x \le A$

22. $f(x) = 4 - |x|$, $-4 \le x \le 4$

En los problemas del 23 al 26 se da la función velocidad para un objeto. Suponiendo que el objeto está en el origen en el instante t = 0, determine la posición en el instante t = 4.

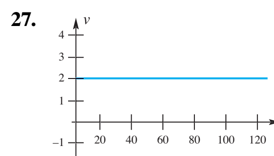
23. $v(t) = t/60$ **24.** $v(t) = 1 + 2t$

25. $v(t) = \begin{cases} t/2 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ 1 & \text{si } 2 < t \le 4 \end{cases}$

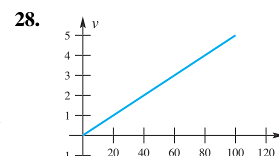
26. $v(t) = \begin{cases} \sqrt{4 - t^2} & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{si } 2 < t \le 4 \end{cases}$

En los problemas del 27 al 30 se graficó la función velocidad de un objeto. Utilice esta gráfica para determinar la posición del objeto en los instantes t = 20, 40, 60, 80, 100 y 120, suponiendo que el objeto está en el origen en el instante t = 0.

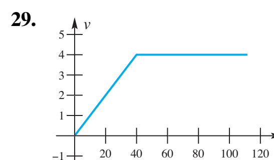
27.



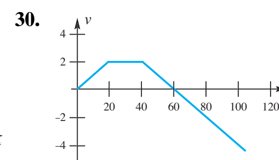
28.



29.



30.



31. Recuerde que $[\![x]\!]$ denota el mayor entero que es menor o igual a x. Calcule cada una de las integrales que están a continuación. Puede utilizar razonamiento geométrico y el hecho de que $\int_0^b x^2\,dx = b^3/3$. (Esto último se demuestra en el problema 34.)

(a) $\int_{-3}^{3} [\![x]\!]\,dx$ (b) $\int_{-3}^{3} [\![x]\!]^2\,dx$

(c) $\int_{-3}^{3} (x - [\![x]\!])\,dx$ (d) $\int_{-3}^{3} (x - [\![x]\!])^2\,dx$

(e) $\int_{-3}^{3} |x|\,dx$ (f) $\int_{-3}^{3} x|x|\,dx$

(g) $\int_{-1}^{2} |x|[\![x]\!]\,dx$ (h) $\int_{-1}^{2} x^2[\![x]\!]\,dx$

32. Sea f una función impar y g una función par, y suponga que $\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = 3$. Utilice un razonamiento geométrico para calcular cada una de las siguientes integrales:

(a) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ (b) $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$

(c) $\int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx$ (d) $\int_{-1}^{1} [-g(x)]\,dx$

(e) $\int_{-1}^{1} xg(x)\,dx$ (f) $\int_{-1}^{1} f^3(x)g(x)\,dx$

33. Demuestre que $\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ al completar el siguiente argumento. Para la partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, elíjase $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$. Entonces, $R_P = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i\,\Delta x_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$. Ahora simplifíquese R_P (suma telescópica) y tómese el límite.

34. Demuestre que $\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$ por medio de un argumento parecido al del problema 33, pero utilizando $\bar{x}_i = \left[\frac{1}{3}(x_{i-1}^2 + x_{i-1}x_i + x_i^2)\right]^{1/2}$. Suponga que $0 \le a < b$.

CAS *Muchos sistemas de álgebra computacional (CAS, del inglés computer algebra sistem) permiten la evaluación de sumas de Riemann para la evaluación de los puntos frontera izquierdo, frontera derecho o medio. Mediante tal sistema, en los problemas del 35 al 38 evalúe las sumas de Riemann con 10 subintervalos utilizando evaluaciones de los puntos izquierdo, derecho y medio.*

35. $\int_0^2 (x^3 + 1)\,dx$ **36.** $\int_0^1 \tan x\,dx$

37. $\int_0^1 \cos x\,dx$ **38.** $\int_1^3 (1/x)\,dx$

39. Demuestre que la función f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

no es integrable en $[0, 1]$. *Sugerencia:* demuestre que no importa qué tan pequeña sea la norma de la partición $\|P\|$,la suma de Riemann puede hacerse que tenga el valor 0 o 1.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** suma de Riemann **2.** integral definida; $\int_a^b f(x)\,dx$ **3.** $A_{\text{arriba}} - A_{\text{abajo}}$ **4.** $\frac{15}{2}$.

4.3 El Primer Teorema Fundamental del Cálculo

El cálculo es el estudio de límites y, hasta ahora, la derivada y la integral definida son los dos límites más importantes que hemos estudiado. La derivada de una función f es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

y la integral definida es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$

Parece que estas dos clases de límites no tienen relación entre sí. Sin embargo, hay una conexión muy estrecha, como lo veremos en esta sección.

Es habitual que a Newton y Leibniz se les atribuya el descubrimiento del cálculo de manera simultánea, aunque independiente. No obstante, los conceptos de la pendiente de una recta tangente (que condujo a la derivada) se conocían desde un tiempo anterior a ellos, pues fue estudiado por Blaise Pascal e Isaac Barrow años antes que Newton y Leibniz. Y Arquímedes había estudiado áreas de regiones curvas 1800 años antes, en el siglo III a. C. Entonces, ¿por qué se les adjudica el crédito a Newton y Leibniz? Ellos entendieron y explotaron la íntima relación entre antiderivadas e integrales definidas. Esta importante relación se denomina *Primer Teorema Fundamental del Cálculo.*

Primer Teorema Fundamental del Cálculo En su carrera de matemático ha encontrado varios "teoremas fundamentales". El *Primer Teorema Fundamental de la Aritmética* dice que un número entero se factoriza de manera única como un producto de primos. El *Teorema Fundamental del Álgebra* dice que un polinomio de grado n tiene n raíces, contando las raíces complejas y las multiplicidades. Cualquier "teorema fundamental" debe estudiarse con cuidado y luego consignarlo de manera permanente en la memoria.

Casi al final de la sección 4.1 estudiamos un problema en el que la velocidad de un objeto en el instante t está dada por $v = f(t) = \frac{1}{4}t^3 + 1$. Encontramos que la distancia recorrida desde el instante $t = 0$ y el instante $t = 3$ es igual a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\ \Delta t = \frac{129}{16}$$

Al usar la terminología de la sección 4.2, ahora vemos que la distancia recorrida desde el instante $t = 0$ y el instante $t = 3$ es igual a la integral definida

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\ \Delta t = \int_0^3 f(t)\,dt$$

(Como la velocidad es positiva para toda $t \geq 0$, la distancia recorrida a lo largo del tiempo t es igual a la posición del objeto en el instante t. Si la velocidad fuese negativa para algún valor de t, entonces, en el instante t el objeto viajaría hacia atrás; en tal caso, la distancia recorrida no sería igual a la posición). Podemos utilizar el mismo razonamiento para encontrar que la distancia s recorrida desde el instante $t = 0$ hasta el instante $t = x$ es

$$s(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

La pregunta que ahora planteamos es ésta: ¿cuál es la derivada de s?

Como la derivada de la distancia recorrida (siempre y cuando la velocidad siempre sea positiva) es la velocidad, tenemos

$$s'(x) = v = f(x)$$

En otras palabras,

$$\frac{d}{dx}s(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x)$$

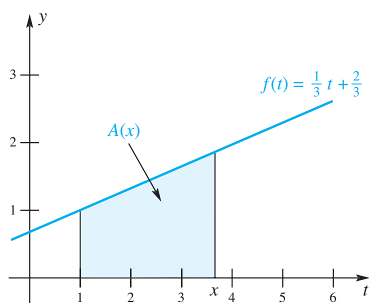


Figura 1

Ahora definimos $A(x)$ como el área bajo la curva de la gráfica de $y = \frac{1}{3}t + \frac{2}{3}$, por arriba del eje t y entre las rectas verticales $t = 1$ y $t = x$, donde $x \geq 1$ (véase la figura 1). Una función como ésta se denomina **función de acumulación,** ya que acumula el área bajo una curva desde un valor fijo ($t = 1$, en este caso) a un valor variable ($t = x$, en este caso). ¿Cuál es la derivada de A?

El área $A(x)$ es igual a la integral definida

$$A(x) = \int_1^x \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t\right) dt$$

En este caso podemos evaluar esta integral definida mediante un argumento geométrico; $A(x)$ es el área de un trapecio, de modo que

$$A(x) = (x - 1)\frac{1 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x\right)}{2} = \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$$

Hecho esto, vemos que la derivada de A es

$$A'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

En otras palabras,

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t\right) dt = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x$$

Defina otra función de acumulación B como el área debajo de la curva $y = t^2$, por arriba del eje t, a la derecha del origen y a la izquierda de la recta $t = x$, en donde $x \geq 0$

Terminología

- La integral indefinida $\int f(x)\,dx$ es una *familia de funciones* de x.
- La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un *número*, siempre que a y b estén fijas.
- Si el límite superior en una integral definida es una variable x, entonces la integral definida [por ejemplo, $\int_a^x f(t)\,dt$] es una *función de x*.
- Una función de la forma $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ se denomina *función de acumulación*.

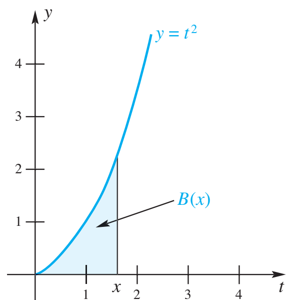


Figura 2

(véase la figura 2). Esta área está dada por la integral definida $\int_0^x t^2\,dt$. Para encontrar esta área, primero construimos una suma de Riemann. Utilizamos una partición regular de $[0, x]$ y evaluamos la función en el extremo de la derecha de cada subintervalo. Entonces $\Delta t = x/n$ y el extremo derecho del i-ésimo subintervalo es $t_i = 0 + i\Delta t = ix/n$. Por lo tanto, la suma de Riemann es

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t &= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{ix}{n}\right)\frac{x}{n} \\ &= \frac{x}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ix}{n}\right)^2 \\ &= \frac{x^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{x^3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

La integral definida es el límite de estas sumas de Riemann.

$$\begin{aligned}\int_0^x t^2\,dt &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{x^3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{x^3}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{n^3} \\ &= \frac{x^3}{6}\cdot 2 = \frac{x^3}{3}\end{aligned}$$

Así, $B(x) = x^3/3$, de modo que la derivada de B es

$$B'(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^3}{3} = x^2$$

En otras palabras,

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_0^x t^2\,dt = x^2}$$

Los resultados de las ecuaciones dentro de los últimos tres recuadros sugieren que la derivada de una función de acumulación es igual a la función que se está acumulando. Pero, ¿*siempre* es éste el caso? Y, ¿*por qué* esto es así?

Suponga que estamos utilizando una brocha "retráctil" para pintar la región debajo de la curva. (Por retráctil queremos decir que la brocha se hace más ancha o más angosta conforme se mueve hacia la derecha, de modo que siempre cubra justamente la altura que se pinta. La brocha es ancha cuando los valores del integrando son grandes y es angosta cuando los valores del integrando son pequeños. Véase la figura 3). Con esta analogía, el área acumulada es el área pintada y la tasa de acumulación es la tasa (velocidad) a la cual la pintura se está aplicando. Pero la velocidad a la que se está aplicando es igual al ancho de la brocha, en realidad, la altura de la función. Podemos establecer este resultado como sigue.

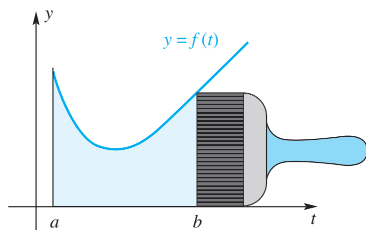


Figura 3

> *La tasa de acumulación en $t = x$ es igual al valor de la función que se está acumulando en $t = x$.*

Esto, en pocas palabras, es el *Primer Teorema Fundamental del Cálculo*. Es *fundamental* porque relaciona la derivada y la integral definida, las dos clases más importantes de límites que hemos estudiado hasta ahora.

Teorema A **Primer Teorema Fundamental del Cálculo.**

Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea x un punto (variable) en (a, b). Entonces,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Bosquejo de la demostración Por ahora presentamos un bosquejo de la demostración, el cual muestra las características importantes de la demostración, pero una demostración completa debe esperar hasta después que hayamos establecido otros resultados. Para x en $[a, b]$, definimos $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Entonces para x en (a, b)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt &= F'(x)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\end{aligned}$$

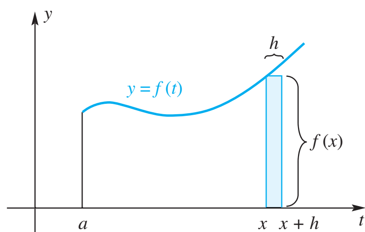


Figura 4

La última línea se deduce de la propiedad aditiva para intervalos (teorema 4.2B). Ahora, cuando h es pequeña, f no cambia mucho en el intervalo $[x, x + h]$. En este intervalo, f es aproximadamente igual a $f(x)$, el valor de f se evalúa en el extremo izquierdo del intervalo (véase la figura 4). El área bajo la curva $y = f(t)$ de x a $x + h$ es aproximadamente igual al área del rectángulo con ancho h y altura $f(x)$, esto es, $\int_x^{x+h} f(t)\,dt \approx hf(x)$. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt \approx \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[hf(x)] = f(x) \qquad \blacksquare$$

Por supuesto, el error en este argumento es que h nunca es cero, así que no podemos asegurar que f no cambia en el intervalo $[x, x + h]$. Daremos una demostración formal al final de esta sección.

Propiedades de comparación

La consideración de las áreas de las regiones R_1 y R_2, en la figura 5, sugiere otra propiedad de las integrales definidas.

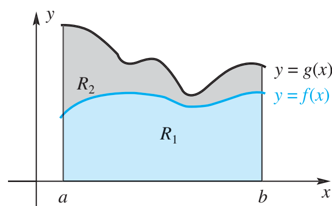


Figura 5

Teorema B **Propiedad de Comparación**

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y si $f(x) \le g(x)$ para toda x en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

En lenguaje informal, pero descriptivo, decimos que la integral definida preserva desigualdades.

Demostración Sea P: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ una partición arbitraria de $[a, b]$ y para cada i sea $\overline{x}_i$ cualquier punto muestra en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. De manera sucesiva podemos concluir que

$$f(\bar{x}_i) \leq g(\bar{x}_i)$$
$$f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \leq g(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$
$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \leq \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$
■

Teorema C Propiedad de Acotamiento

Si f es integrable en $[a, b]$ y $m \leq f(x) \leq M$ para toda x en $[a, b]$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Demostración La gráfica en la figura 6 nos ayuda a entender el teorema. Observe que $m(b-a)$ es el área del pequeño rectángulo inferior, $M(b-a)$ es el área del rectángulo mayor y $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área debajo de la curva.

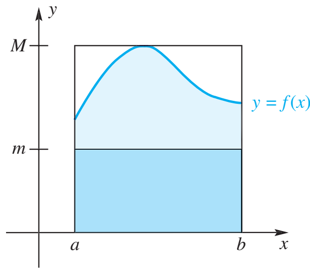


Figura 6

Para demostrar la desigualdad del lado derecho, sea $g(x) = M$ para toda x en $[a, b]$. Entonces, por el teorema B,

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Sin embargo, $\int_a^b g(x)\,dx$ es igual al área del rectángulo con ancho $b-a$ y altura M. Así,

$$\int_a^b g(x)\,dx = M(b-a)$$

La desigualdad del lado izquierdo se maneja de manera análoga. ■

La integral definida es un operador lineal Anteriormente aprendimos que D_x, $\int \cdots dx$, y Σ son operadores lineales. Puede agregar $\int_a^b \cdots dx$ a la lista.

Teorema D Linealidad de la integral definida

Suponga que f y g son integrables en $[a, b]$ y que k es una constante. Entonces kf y $f+g$ son integrables y:

(i) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$;

(ii) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$; y

(iii) $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$.

Demostración Las demostraciones de (i) y (ii) dependen de la linealidad de Σ y las propiedades de límites. Demostramos (ii).

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\overline{x}_i) + g(\overline{x}_i)]\Delta x_i$$

$$= \lim_{\|P\|\to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\overline{x}_i)\,\Delta x_i \right]$$

$$= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i + \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\overline{x}_i)\,\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

La parte (iii) se deduce de (i) y (ii) si se escribe $f(x) - g(x)$ como $f(x) + (-1)g(x)$. ■

Demostración del Primer Teorema Fundamental del Cálculo. Con estos resultados a la mano, ahora estamos preparados para demostrar el *Primer Teorema Fundamental del Cálculo.*

Demostración En el bosquejo de la demostración que se presentó antes, definimos $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, y establecimos el hecho de que

$$F(x + h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

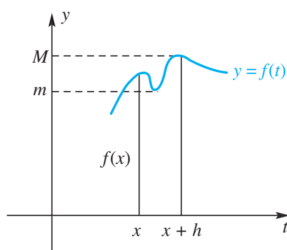


Figura 7

Suponga por el momento que $h > 0$ y sean m y M los valores mínimo y máximo, respectivamente, de f en el intervalo $[x, x + h]$ (véase la figura 7). Por el teorema C,

$$mh \le \int_x^{x+h} f(t)\,dt \le Mh$$

o

$$mh \le F(x + h) - F(x) \le Mh$$

Al dividir entre h, obtenemos

$$m \le \frac{F(x + h) - F(x)}{h} \le M$$

Ahora m y M en realidad dependen de h. Además, ya que f es continua, tanto m como M deben aproximarse a $f(x)$ cuando $h \to 0$. Así, por el Teorema del Emparedado,

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(x)$$

El caso en donde $h < 0$ se maneja de manera análoga. ■

Una consecuencia teórica de este teorema es que toda función continua f tiene una antiderivada F dada por la función de acumulación

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

No obstante, este hecho no es útil para obtener una fórmula sencilla para cualquier antiderivada particular. La sección 7.6 proporciona varios ejemplos de funciones importantes que están definidas como funciones de acumulación. En el capítulo 6 definiremos la función logaritmo natural como una función de acumulación.

EJEMPLO 1 Encuentre $\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\,dt\right]$.

SOLUCIÓN Por el *Primer Teorema Fundamental del Cálculo*,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\,dt\right] = x^3$$

■

EJEMPLO 2 Determine $\frac{d}{dx}\left[\int_2^x \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}\,dt\right]$.

SOLUCIÓN Retamos a cualquiera a que resuelva este ejemplo, evaluando primero la integral. Sin embargo, por medio del *Primer Teorema Fundamental del Cálculo,* es un problema trivial.

$$\frac{d}{dx}\left[\int_2^x \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}\,dt\right] = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^2+17}}$$

■

EJEMPLO 3 Encuentre $\frac{d}{dx}\left[\int_x^4 \tan^2 u \cos u\,du\right], \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

SOLUCIÓN Utilizar la variable muda u en lugar de t no debe preocupar a nadie. No obstante, el hecho de que x sea el límite inferior, en lugar del límite superior, es molesto. He aquí cómo manejar esta dificultad.

$$\frac{d}{dx}\left[\int_x^4 \tan^2 u \cos u\,du\right] = \frac{d}{dx}\left[-\int_4^x \tan^2 u \cos u\,du\right]$$
$$= -\frac{d}{dx}\left[\int_4^x \tan^2 u \cos u\,du\right] = -\tan^2 x \cos x$$

El intercambio de los límites superior e inferior está permitido si anteponemos un signo negativo.

(Recuérdese que por definición $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.) ■

EJEMPLO 4 Encuentre $D_x\left[\int_1^{x^2} (3t-1)\,dt\right]$ de dos formas.

SOLUCIÓN Una manera de encontrar esta derivada es mediante la aplicación del *Primer Teorema Fundamental del Cálculo*, aunque ahora tenemos una nueva complicación; el límite superior es x^2 en lugar de x. Este problema puede manejarse por medio de la regla de la cadena. Podemos considerar la expresión entre paréntesis como

$$\int_1^u (3t-1)\,dt \qquad \text{donde } u = x^2$$

Por medio de la regla de la cadena, la derivada con respecto a x de esta función compuesta es

$$D_u\left[\int_1^u (3t-1)\,dt\right]\cdot D_x u = (3u-1)(2x) = (3x^2-1)(2x) = 6x^3 - 2x$$

Otra manera de encontrar esta derivada es evaluar primero la integral definida y después utilizar nuestras reglas para derivadas. La integral definida $\int_1^{x^2}(3t-1)\,dt$ es el área debajo de la recta $y = 3t - 1$ entre $t = 1$ y $t = x^2$ (véase la figura 8). Como el área de este trapecio es $\frac{x^2-1}{2}[2 + (3x^2-1)] = \frac{3}{2}x^4 - x^2 - \frac{1}{2}$,

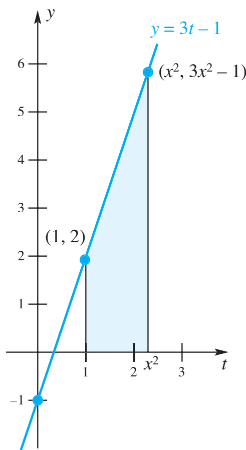


Figura 8

$$\int_1^{x^2} (3t - 1)\, dt = \frac{3}{2}x^4 - x^2 - \frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$D_x \int_1^{x^2} (3t - 1)\, dt = D_x\left(\frac{3}{2}x^4 - x^2 - \frac{1}{2}\right) = 6x^3 - 2x \qquad ■$$

La posición como velocidad acumulada En la sección anterior vimos cómo la posición de un objeto, que inicialmente está en el origen, es igual a la integral definida de la función velocidad. Con frecuencia, esto conduce a funciones de acumulación, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Un objeto en el origen, en el instante $t = 0$, tiene velocidad, medida en metros por segundo,

$$v(t) = \begin{cases} t/20 & \text{si } 0 \le t \le 40 \\ 2 & \text{si } 40 < t \le 60 \\ 5 - t/20 & \text{si } t > 60 \end{cases}$$

¿Cuándo, si sucede, el objeto regresa al origen?

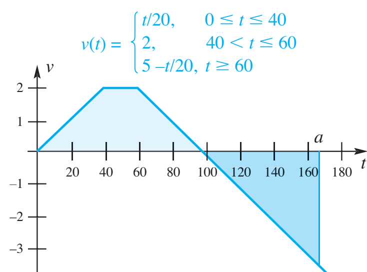


Figura 9

SOLUCIÓN Denótese con $F(a) = \int_0^a v(t)\, dt$ a la posición del objeto en el instante a. La acumulación se ilustra en la figura 9. Si el objeto regresa al origen en algún tiempo a, entonces a debe satisfacer $F(a) = 0$. El valor que se requiere de a seguramente es mayor que 100, ya que el área debajo de la curva entre 0 y 100 debe ser exactamente igual al área por arriba de la curva y por debajo del eje t, entre 100 y a. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_0^a v(t)\, dt = \int_0^{100} v(t)\, dt + \int_{100}^a v(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2}40 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + \frac{1}{2}40 \cdot 2 + \int_{100}^a (5 - t/20)\, dt \\ &= 120 + \frac{1}{2}(a - 100)(5 - a/20) \\ &= -130 + 5a - \frac{1}{40}a^2 \end{aligned}$$

Entonces debemos hacer $F(a) = 0$. Las dos soluciones para esta ecuación cuadrática son $a = 100 \pm 40\sqrt{3}$. Tomando el signo de menos da un valor menor que 100, que no puede ser la solución, por lo que se descarta. La otra solución es $100 + 40\sqrt{3} \approx 169.3$. Comprobemos esta solución:

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_0^{100+40\sqrt{3}} v(t)\, dt \\ &= \int_0^{100} v(t)\, dt + \int_{100}^{100+40\sqrt{3}} v(t)\, dt \\ &= 120 + \frac{1}{2}\left(100 + 40\sqrt{3} - 100\right)\left(5 - \left(100 + 40\sqrt{3}\right)/20\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el objeto regresa al origen en el instante $t = 100 + 40\sqrt{3} \approx 169.3$ segundos. ■

Una forma de evaluar integrales definidas El siguiente ejemplo muestra la forma (es cierto que de una manera difícil) para evaluar una integral definida. Si este método parece largo y engorroso, sea paciente. La sección próxima trata con formas eficientes para evaluar integrales definidas.

EJEMPLO 6 Sea $A(x) = \int_1^x t^3\,dt$.

(a) Si $y = A(x)$, encuentre $dy/dx = x^3$.
(b) Encuentre la solución de la ecuación diferencial $dy/dx = x^3$ que satisface $y = 0$ cuando $x = 1$.
(c) Encuentre $\int_1^4 t^3\,dt$.

SOLUCIÓN

(a) Por el *Primer Teorema Fundamental del Cálculo*,

$$\frac{dy}{dx} = A'(x) = x^3$$

(b) Como la ecuación diferencial $dy/dx = x^3$ es separable, podemos escribir

$$dy = x^3\,dx$$

Al integrar ambos lados se obtiene

$$y = \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$$

Cuando $x = 1$ debemos tener $y = A(1) = \int_1^1 t^3\,dt = 0$. Así, elegimos C, de modo que

$$0 = A(1) = \frac{1^4}{4} + C$$

Por lo tanto, $C = -1/4$. Así que la solución de la ecuación diferencial es $y = x^4/4 - 1/4$.

(c) Como $y = A(x) = x^4/4 - 1/4$, tenemos

$$\int_1^4 t^3\,dt = A(4) = \frac{4^4}{4} - \frac{1}{4} = 64 - \frac{1}{4} = \frac{255}{4}$$ ■

Revisión de conceptos

1. Como $4 \le x^2 \le 16$ para toda x en $[2, 4]$, la propiedad de acotamiento de la integral definida nos permite decir ________ $\le \int_2^4 x^2\,dx \le$ ________.

2. $\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \operatorname{sen}^3 t\,dt\right] =$ ________.

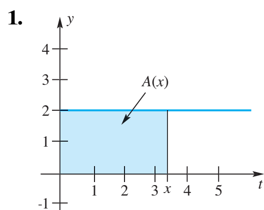
3. Por la linealidad, $\int_1^4 cf(x)\,dx = c \cdot$ ________ y $\int_2^5 \left(x + \sqrt{x}\right) dx = \int_2^5 x\,dx +$ ________.

4. Si $\int_1^4 f(x)\,dx = 5$ y si $g(x) \le f(x)$ para toda x en $[1, 4]$, entonces la propiedad de comparación nos permite decir que $\int_1^4 g(x)\,dx \le$ ________.

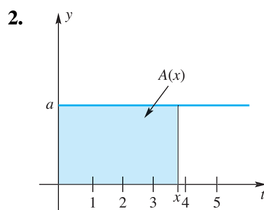
Conjunto de problemas 4.3

En los problemas del 1 al 8 determine una fórmula y haga la gráfica de la función de acumulación $A(x)$ que es igual al área indicada.

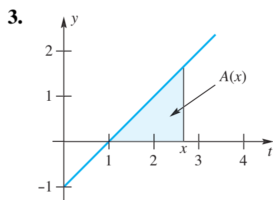
1.



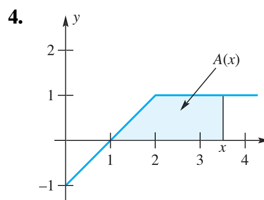
2.



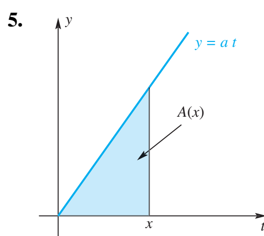
3.



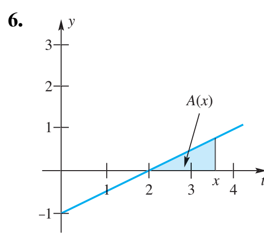
4.



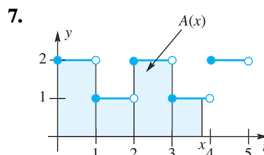
5.



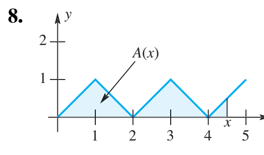
6.



7.



8.



Suponga que $\int_0^1 f(x)\,dx = 2$, $\int_1^2 f(x)\,dx = 3$, $\int_0^1 g(x)\,dx = -1$, *y* $\int_0^2 g(x)\,dx = 4$. *Utilice las propiedades de las integrales definidas (linealidad, aditividad para intervalos, etcétera). Para calcular cada una de las integrales en los problemas del 9 al 16.*

9. $\int_1^2 2f(x)\,dx$

10. $\int_0^2 2f(x)\,dx$

11. $\int_0^2 [2f(x) + g(x)]\,dx$

12. $\int_0^1 [2f(s) + g(s)]\,ds$

13. $\int_2^1 [2f(s) + 5g(s)]\,ds$

14. $\int_1^1 [3f(x) + 2g(x)]\,dx$

15. $\int_0^2 [3f(t) + 2g(t)]\,dt$

16. $\int_0^2 \left[\sqrt{3}f(t) + \sqrt{2}g(t) + \pi\right] dt$

En los problemas del 17 al 26, encuentre $G'(x)$.

17. $G(x) = \int_1^x 2t\,dt$

18. $G(x) = \int_x^1 2t\,dt$

19. $G(x) = \int_0^x \left(2t^2 + \sqrt{t}\right) dt$

20. $G(x) = \int_1^x \cos^3 2t \tan t\,dt; -\pi/2 < x < \pi/2$

21. $G(x) = \int_x^{\pi/4} (s - 2) \cot 2s\,ds; 0 < x < \pi/2$

22. $G(x) = \int_1^x xt\,dt$ (Téngase cuidado).

23. $G(x) = \int_1^{x^2} \operatorname{sen} t\,dt$

24. $G(x) = \int_1^{x^2+x} \sqrt{2z + \operatorname{sen} z}\,dz$

25. $G(x) = \int_{-x^2}^{x} \frac{t^2}{1 + t^2}\,dt$ *Sugerencia:* $\int_{-x^2}^{x} = \int_{-x^2}^{0} + \int_0^x$

26. $G(x) = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} t^5\,dt$

En los problemas del 27 al 32 determine el o los intervalos en los que la gráfica de $y = f(x)$, $x \geq 0$, es (a) creciente, (b) cóncava hacia arriba.

27. $f(x) = \int_0^x \frac{s}{\sqrt{1 + s^2}}\,ds$

28. $f(x) = \int_0^x \frac{1 + t}{1 + t^2}\,dt$

29. $f(x) = \int_0^x \cos u\,du$

30. $f(x) = \int_0^x (t + \operatorname{sen} t)\,dt$

31. $f(x) = \int_1^x \frac{1}{\theta}\,d\theta$

32. $f(x)$ es la función de acumulación $A(x)$ del problema 8.

En los problemas del 33 al 36 utilice la propiedad aditiva para intervalos y la linealidad para evaluar $\int_0^4 f(x)\,dx$. *Comience por dibujar una gráfica de f.*

33. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 4 - x & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

35. $f(x) = |x - 2|$

36. $f(x) = 3 + |x - 3|$

37. Considere la función $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde $f(t)$ oscila alrededor de la recta $y = 2$ sobre la región $[0, 10]$ del eje x y está dada por la figura 10.

(a) ¿En qué valores de esta región aparecen los máximos y mínimos locales de $G(x)$?

(b) ¿En dónde alcanza $G(x)$ su máximo y su mínimo absolutos?

(c) ¿En qué intervalos $G(x)$ es cóncava hacia abajo?

(d) Bosqueje la gráfica de $G(x)$.

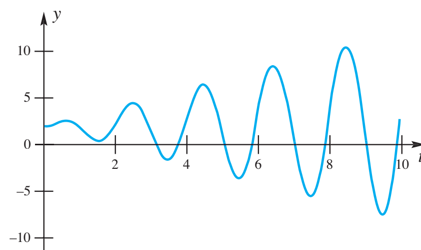


Figura 10

38. Realice el mismo análisis que hizo en el problema 37 para la función $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ dada por la figura 11, en donde $f(t)$ oscila alrededor de la recta $y = 2$ para el intervalo $[0, 10]$.

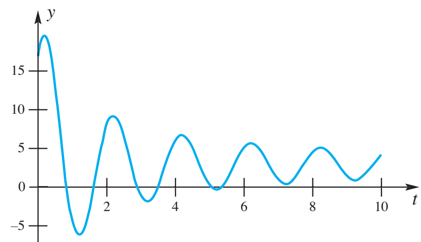


Figura 11

39. Sea $F(x) = \int_0^x (t^4 + 1)\,dt$.

(a) Encuentre $F(0)$.

(b) Sea $y = F(x)$. Aplique el *Primer Teorema Fundamental del Cálculo* para obtener $dy/dx = F'(x) = x^4 + 1$. Resuelva la ecuación diferencial $dy/dx = x^4 + 1$.

(c) Encuentre la solución de esta ecuación diferencial que satisface $y = F(0)$ cuando $x = 0$.

(d) Demuestre que $\int_0^1 (x^4 + 1)\,dx = \frac{6}{5}$.

40. Sea $G(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t\,dt$.

(a) Encuentre $G(0)$ y $G(2\pi)$.

(b) Sea $y = G(x)$. Aplique el Primer Teorema Fundamental del Cálculo para obtener $dy/dx = G'(x) = \operatorname{sen} x$. Resuelva la ecuación diferencial $dy/dx = \operatorname{sen} x$.

(c) Encuentre la solución a esta ecuación diferencial que satisface $y = G(0)$ cuando $x = 0$.

(d) Demuestre que $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = 2$.

(e) Encuentre todos los puntos extremos relativos y de inflexión de G en el intervalo $[0, 4\pi]$.

(f) Haga la gráfica de $y = G(x)$ en el intervalo $[0, 4\pi]$.

41. Demuestre que $1 \le \int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\,dx \le \frac{6}{5}$. *Sugerencia:* explique por qué $1 \le \sqrt{1 + x^4} \le 1 + x^4$ para x en el intervalo cerrado $[0, 1]$; después utilice la propiedad de comparación (teorema B) y el resultado del problema 39d.

42. Demuestre que $2 \le \int_0^1 \sqrt{4 + x^4} \le \frac{21}{5}$. (Véase la sugerencia para el problema 41).

GC *En los problemas del 43 al 48 utilice una calculadora gráfica (GC, del inglés graphic calculator) para graficar cada integrando. Después utilice la propiedad de acotamiento (teorema C) para encontrar una cota inferior y una cota superior para cada integral definida.*

43. $\int_0^4 (5 + x^3)\,dx$

44. $\int_2^4 (x + 6)^5\,dx$

45. $\int_1^5 \left(3 + \frac{2}{x}\right) dx$

46. $\int_{10}^{20} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^5 dx$

47. $\int_{4\pi}^{8\pi} \left(5 + \frac{1}{20}\operatorname{sen}^2 x\right) dx$,

48. $\int_{0.2}^{0.4} (0.002 + 0.0001\cos^2 x)\,dx$

49. Encuentre $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1 + t}{2 + t}\,dt$.

50. Encuentre $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x - 1}\int_1^x \frac{1 + t}{2 + t}\,dt$.

51. Encuentre $f(x)$ si $\int_1^x f(t)\,dt = 2x - 2$.

52. Encuentre $f(x)$ si $\int_0^x f(t)\,dt = x^2$.

53. Encuentre $f(x)$ si $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = \frac{1}{3}x^3$.

54. ¿Existe alguna función f tal que $\int_0^x f(t)\,dt = x + 1$? Explique.

En los problemas del 55 al 60 decida si la afirmación dada es verdadera o falsa. Después justifique su respuesta.

55. Si f es continua y $f(x) \ge 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

56. Si $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$, entonces $f(x) \ge 0$ para toda x en $[a, b]$.

57. Si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$.

58. Si $f(x) \ge 0$ y $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$.

59. Si $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$, entonces

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx > 0$$

60. Si f y g son continuas y $f(x) > g(x)$ para toda x en $[a, b]$, entonces $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| > \left|\int_a^b g(x)\,dx\right|$.

61. La velocidad de un objeto es $v(t) = 2 - |t - 2|$. Suponiendo que el objeto está en el origen en el instante $t = 0$, determine una fórmula para su posición en el instante t. (*Sugerencia:* tendrá que considerar de forma separada los intervalos $0 \le t \le 2$ y $t > 2$.) ¿Cuándo, si esto sucede, el objeto regresará al origen?

62. La velocidad de un objeto es

$$v(t) = \begin{cases} 5 & \text{si } 0 \le t \le 100 \\ 6 - t/100 & \text{si } 100 < t \le 700 \\ -1 & \text{si } t > 700 \end{cases}$$

(a) Suponiendo que el objeto está en el origen en el instante 0, determine una fórmula para su posición en el instante t ($t \ge 0$).

(b) ¿Cuál es la distancia más a la derecha del origen que alcanza este objeto?

(c) ¿Cuándo, si esto sucede, el objeto regresará al origen?

63. Sea f continua en $[a, b]$ y, por lo tanto, integrable allí. Demuestre que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Sugerencia: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$; utilice el teorema B.

64. Suponga que f' es integrable y $|f'(x)| \le M$ para toda x. Demuestre que $|f(x)| \le |f(a)| + M|x - a|$ para toda a.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** 8; 32 **2.** $\operatorname{sen}^3 x$ **3.** $\int_1^4 f(x)\,dx$; $\int_2^5 \sqrt{x}\,dx$ **4.** 5

4.4 El Segundo Teorema Fundamental del Cálculo y el método de sustitución

El Primer Teorema Fundamental del Cálculo, dado en la sección anterior, proporciona la relación inversa entre las integrales definidas y las derivadas. Aunque aún no es aparente, esta relación nos proporciona una herramienta poderosa para evaluar integrales definidas. Esta herramienta se denomina el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo y lo aplicaremos con mucho mayor frecuencia que el Primer Teorema Fundamental del Cálculo.

Teorema A **Segundo Teorema Fundamental del Cálculo**

Sea f continua (y de aquí integrable) en $[a, b]$, y sea F cualquier antiderivada de f en $[a, b]$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

¿Es fundamental?

El Segundo Teorema Fundamental del Cálculo es importante al proporcionar una herramienta poderosa para la evaluación de integrales definidas. Pero su significado más profundo subyace en la relación que establece entre la derivación y la integración; entre derivadas e integrales. Esta relación es sorprendentemente clara cuando volvemos a escribir la conclusión del teorema con $f(x)$ reemplazada por $g'(x)$.

$$\int_a^b g'(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

Demostración Para x en el intervalo $[a, b]$, defínase $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Entonces, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, $G'(x) = f(x)$ para toda x en (a, b). De esta manera, G es una antiderivada de f; pero F también es una antiderivada de f. Del teorema 3.6B, concluimos que como $F'(x) = G'(x)$ las funciones F y G difieren por una constante. Así, para toda x en (a, b)

$$F(x) = G(x) + C$$

Como las funciones F y G son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ (véase el problema 77), tenemos $F(a) = G(a) + C$ y $F(b) = G(b) + C$. Así que $F(x) = G(x) + C$ en el intervalo *cerrado* $[a, b]$.

Como $G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$, tenemos

$$F(a) = G(a) + C = 0 + C = C$$

Por lo tanto,

$$F(b) - F(a) = [G(b) + C] - C = G(b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

■

En la sección 3.8 definimos la integral *indefinida* como una antiderivada. En la sección 4.2 definimos la integral *definida* como el límite de una suma de Riemann. Usamos la misma palabra (integral) en ambos casos, aunque por el momento parece que tienen poco en común. El teorema A es fundamental porque muestra cómo la integración indefinida (antiderivación) y la integración definida (área con signo) están relacionadas. Antes de ir a los ejemplos, pregúntese por qué puede utilizar la palabra *cualquier* en el enunciado del teorema.

EJEMPLO 1 Demuestre que $\int_a^b k\,dx = k(b - a)$,, donde k es una constante.

SOLUCIÓN $F(x) = kx$ es una antiderivada de $f(x) = k$. De esta manera, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_a^b k\,dx = F(b) - F(a) = kb - ka = k(b - a)$$ ■

EJEMPLO 2 Demuestre que $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$.

SOLUCIÓN $F(x) = x^2/2$ es una antiderivada de $f(x) = x$. Por lo tanto,

$$\int_a^b x\,dx = F(b) - F(a) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$ ■

EJEMPLO 3 Demuestre que si r es un número racional diferente de -1, entonces

$$\int_a^b x^r\,dx = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

SOLUCIÓN $F(x) = x^{r+1}/(r + 1)$ es una antiderivada de $f(x) = x^r$. Así que, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_a^b x^r\,dx = F(b) - F(a) = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

Si $r < 0$, requerimos que 0 no esté en $[a, b]$. ¿Por qué? ■

Es conveniente introducir un símbolo especial para $F(b) - F(a)$. Escribimos

$$F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

Con esta notación,

$$\int_2^5 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5 = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = \frac{117}{3} = 39$$

EJEMPLO 4 Evalúe $\int_{-1}^2 (4x - 6x^2)\,dx$

(a) Mediante el uso del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo de manera directa y
(b) primero, aplicando la linealidad (teorema 4.3D).

SOLUCIÓN

(a) $$\int_{-1}^2 (4x - 6x^2)\,dx = \left[2x^2 - 2x^3\right]_{-1}^2$$

$$= (8 - 16) - (2 + 2) = -12$$

(b) Al aplicar primero la linealidad, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(4x - 6x^2)\,dx &= 4\int_{-1}^{2}x\,dx - 6\int_{-1}^{2}x^2\,dx \\ &= 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} - 6\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} \\ &= 4\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) - 6\left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ &= -12\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 Evalúe $\int_{1}^{8}(x^{1/3} + x^{4/3})\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int_{1}^{8}(x^{1/3} + x^{4/3})\,dx &= \left[\tfrac{3}{4}x^{4/3} + \tfrac{3}{7}x^{7/3}\right]_{1}^{8} \\ &= \left(\tfrac{3}{4}\cdot 16 + \tfrac{3}{7}\cdot 128\right) - \left(\tfrac{3}{4}\cdot 1 + \tfrac{3}{7}\cdot 1\right) \\ &= \tfrac{45}{4} + \tfrac{381}{7} \approx 65.68\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Encuentre $D_x\int_{0}^{x}3\,\text{sen}\,t\,dt$ de dos maneras.

SOLUCIÓN La manera fácil es aplicar el Primer Teorema Fundamental del Cálculo.

$$D_x\int_{0}^{x}3\,\text{sen}\,t\,dt = 3\,\text{sen}\,x$$

Una segunda forma de resolver este problema es aplicar el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo para evaluar la integral de 0 a x; después, aplicar las reglas de las derivadas.

$$\int_{0}^{x}3\,\text{sen}\,t\,dt = [-3\cos t]_{0}^{x} = -3\cos x - (-3\cos 0) = -3\cos x + 3$$

Entonces

$$D_x\int_{0}^{x}3\,\text{sen}\,t\,dt = D_x(-3\cos x + 3) = 3\,\text{sen}\,x$$

■

En términos del símbolo para la integral indefinida, podemos escribir la conclusión del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo como

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_{a}^{b}$$

La parte no trivial de la aplicación del teorema es encontrar siempre la integral indefinida $\int f(x)\,dx$. Una de las técnicas más poderosas para hacer esto es el método de sustitución.

El método de sustitución En la sección 3.8 introdujimos el método de sustitución para la regla de la potencia. Esta regla puede extenderse a un caso más general, como lo muestra el siguiente teorema. Un lector perspicaz verá que la regla de sustitución no es más que la regla de la cadena en sentido inverso.

Uso del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

La forma de utilizar el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo para evaluar una integral definida, tal como $\int_a^b f(x)\,dx$, es

(1) encontrar una antiderivada $F(x)$ del integrando $f(x)$, y
(2) sustituir los límites y calcular $F(b) - F(a)$.

Todo depende de ser capaces de encontrar una antiderivada. Por esta razón, regresamos brevemente a la evaluación de integrales *indefinidas*.

Teorema B **Regla de sustitución para integrales indefinidas**

Sea g una función derivable y suponga que F es una antiderivada de f. Entonces,

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Demostración Para probar este resultado, es suficiente con demostrar que la derivada del lado derecho es el integrando de la integral del lado izquierdo. Pero esto es una aplicación sencilla de la regla de la cadena

$$D_x[F(g(x)) + C] = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$ ■

Por lo regular, aplicamos el teorema B como sigue. En una integral como $\int f(g(x))g'(x)\,dx$, hacemos $u = g(u)$, de modo que $du/dx = g'(x)$. Así, $du = g'(x)dx$. Entonces, la integral se transforma en

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\underbrace{g'(x)\,dx}_{du} = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Por lo tanto, si podemos encontrar una antiderivada para $f(x)$, podemos evaluar $\int f(g(x))g'(x)\,dx$. El truco para aplicar el método de sustitución es elegir la sustitución adecuada que se debe hacer. En algunos casos, esta sustitución es obvia; en otros no lo es tanto. El dominio en la aplicación del método de sustitución viene con la práctica.

EJEMPLO 7 Evalúe $\int \operatorname{sen} 3x\,dx$.

SOLUCIÓN Aquí, la sustitución obvia es $u = 3x$, de modo que $du = 3\,dx$. Por lo tanto,

$$\int \operatorname{sen} 3x\,dx = \int \frac{1}{3}\operatorname{sen}(\underbrace{3x}_{u})\underbrace{3\,dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} u\,du = -\frac{1}{3}\cos u + C = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$$

Observe cómo tuvimos que multiplicar por $\frac{1}{3}\cdot 3$ para tener en la integral la expresión $3\,dx = du$. ■

EJEMPLO 8 Evalúe $\int x \operatorname{sen} x^2\,dx$.

SOLUCIÓN Aquí, la sustitución apropiada es $u = x^2$. Esto nos da, en el integrando, $\operatorname{sen} x^2 = \operatorname{sen} u$, pero más importante, la x adicional en el integrando se puede poner con la diferencial, ya que $du = 2x\,dx$. Por lo tanto,

$$\int x \operatorname{sen} x^2\,dx = \int \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\underbrace{x^2}_{u})\underbrace{2x\,dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u\,du = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$$ ■

Ninguna ley dice que tiene que escribir la sustitución con u. Si puede realizar la sustitución en forma mental, está bien. Enseguida, una ilustración.

EJEMPLO 9 Evalúe $\int x^3\sqrt{x^4+11}\,dx$.

SOLUCIÓN Sustituya mentalmente $u = x^4 + 11$.

$$\int x^3\sqrt{x^4+11}\,dx = \frac{1}{4}\int (x^4+11)^{1/2}(4x^3\,dx)$$

$$= \frac{1}{6}(x^4+11)^{3/2} + C$$

EJEMPLO 10 Evalúe $\int_0^4 \sqrt{x^2+x}\,(2x+1)\,dx$.

¿Qué hace que esta sustitución funcione?

Observe que en el ejemplo 10 la derivada de u es precisamente $2x + 1$. Por esto funciona la sustitución. Si la expresión entre paréntesis fuese $3x + 1$ en lugar de $2x + 1$, la regla de sustitución no se aplicaría y tendríamos un problema mucho más difícil.

SOLUCIÓN Sea $u = x^2 + x$, entonces $du = (2x + 1)dx$. Así que

$$\int \underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{u}\,\underbrace{(2x+1)\,dx}_{du} = \int u^{1/2}\,du = \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$= \tfrac{2}{3}(x^2+x)^{3/2} + C$$

Por lo tanto, con base en el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_0^4 \sqrt{x^2+x}\,(2x+1)\,dx = \left[\tfrac{2}{3}(x^2+x)^{3/2} + C\right]_0^4$$

$$= \left[\tfrac{2}{3}(20)^{3/2} + C\right] - [0 + C]$$

$$= \tfrac{2}{3}(20)^{3/2} \approx 59.63$$

Observe que la C de la integral indefinida se cancela, y siempre sucederá, en la integración definida. Ésta es la *razón* de que en el enunciado del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo pudimos utilizar la frase *cualquier antiderivada*. En particular, siempre podemos elegir $C = 0$ al aplicar dicho teorema.

EJEMPLO 11 Evalúe $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^3 2x \cos 2x\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \operatorname{sen} 2x$, entonces $du = 2\cos 2x\,dx$. Así,

$$\int \operatorname{sen}^3 2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{(\operatorname{sen} 2x)}_{u}{}^3\underbrace{(2\cos 2x)\,dx}_{du} = \frac{1}{2}\int u^3\,du$$

$$= \frac{1}{2}\frac{u^4}{4} + C = \frac{\operatorname{sen}^4 2x}{8} + C$$

Por lo tanto, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^3 2x \cos 2x\,dx = \left[\frac{\operatorname{sen}^4 2x}{8}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$$

Observe que en el procedimiento de dos pasos, ilustrado en los ejemplos 10 y 11, debemos estar seguros de expresar la integral indefinida en términos de x antes de aplicar el segundo teorema fundamental. Esto se debe a que los límites, 0 y 4 en el ejemplo 10 y 0 y $\pi/4$ en el ejemplo 11, se aplican a x, no a u. Pero, ¿qué sucede si al hacer la sustitución $u = \operatorname{sen} 2x$ en el ejemplo 11, también hacemos los cambios correspondientes en los límites de integración para u?

Si $x = 0$, entonces $u = \operatorname{sen}(2 \cdot 0) = 0$.

Si $x = \pi/4$, entonces $u = \operatorname{sen}(2(\pi/4)) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$.

Entonces, ¿podríamos terminar la integración con la integral definida en términos de u? La respuesta es *sí*.

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^3 2x \cos 2x \, dx = \left[\frac{1}{2}\frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$$

A continuación está el resultado general, que nos permite sustituir los límites de integración y, de este modo, producir un procedimiento con menos pasos.

Sustitución para integrales definidas

Para hacer la sustitución en una integral definida, se requieren tres cambios:

1. Hacer la sustitución en el integrando.
2. Hacer el cambio adecuado en la diferencial.
3. Cambiar los límites de a y b a $g(a)$ y $g(b)$.

Teorema C Regla de sustitución para integrales definidas

Suponga que g tiene una derivada continua en $[a, b]$, y sea f continua en el rango de g. Entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

donde $u = g(x)$.

Demostración Sea F una antiderivada de f (la existencia de F está garantizada por el teorema 4.3A). Entonces, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du = \left[F(u)\right]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

Por otra parte, por medio de la regla de sustitución para las integrales indefinidas (teorema B),

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

y así, otra vez por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = \left[F(g(x))\right]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$ ■

EJEMPLO 12 Evalúe $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2}\, dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = x^2 + 2x + 6$, de modo que $du = (2x+2)dx = 2(x+1)dx$, y obsérvese que $u = 6$ cuando $x = 0$ y que $u = 9$ cuando $x = 1$. Así que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2}\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2(x+1)}{(x^2+2x+6)^2}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_6^9 u^{-2}\, du = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{u}\right]_6^9 \\ &= -\frac{1}{18} - \left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{36}\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 13 Evalúe $\displaystyle\int_{\pi^2/9}^{\pi^2/4} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \sqrt{x}$, de modo que $du = dx/\left(2\sqrt{x}\right)$. Así,

$$\begin{aligned}\int_{\pi^2/9}^{\pi^2/4} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx &= 2\int_{\pi^2/9}^{\pi^2/4} \cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \\ &= 2\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos u\, du \\ &= \left[2 \operatorname{sen} u\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

El cambio en los límites de integración ocurrió en la segunda igualdad. Cuando $x = \pi^2/9$, $u = \sqrt{\pi^2/9} = \pi/3$; cuando $x = \pi^2/4$, $u = \pi/2$. ■

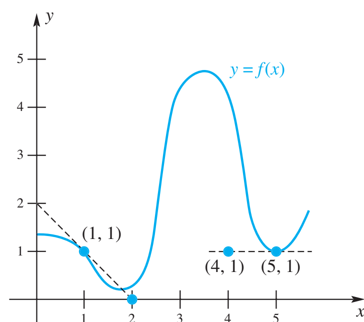


Figura 1

EJEMPLO 14 La figura 1 muestra la gráfica de una función f que tiene tercera derivada continua. Las líneas discontinuas son tangentes a la gráfica de $y = f(x)$ en (1, 1) y en (5, 1). Con base en lo que se muestra, diga, si es posible, si las siguientes integrales son positivas, negativas o cero.

(a) $\int_1^5 f(x)\,dx$ (b) $\int_1^5 f'(x)\,dx$

(c) $\int_1^5 f''(x)\,dx$ (d) $\int_1^5 f'''(x)\,dx$

SOLUCIÓN

(a) La función f es positiva para toda x en el intervalo $[1, 5]$, y la gráfica indica que hay cierta área por arriba del eje x. Por lo tanto, $\int_1^5 f(x)\,dx > 0$.

(b) Por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_1^5 f'(x)\,dx = f(5) - f(1) = 1 - 1 = 0$$

(c) Otra vez mediante el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (ahora con f' como una antiderivada de f''), vemos que

$$\int_1^5 f''(x)\,dx = f'(5) - f'(1) = 0 - (-1) = 1$$

(d) La función f es cóncava hacia arriba en $x = 5$, de modo que $f''(5) > 0$, y es cóncava hacia abajo en $x = 1$, de modo que $f''(1) < 0$. Así que

$$\int_1^5 f'''(x)\,dx = f''(5) - f''(1) > 0$$ ■

Este ejemplo ilustra la notable propiedad de que todo lo que necesitamos conocer para evaluar una integral definida son los valores de una antiderivada en los puntos frontera a y b. Por ejemplo, para evaluar $\int_1^5 f''(x)\,dx$, todo lo que necesitábamos saber eran $f'(5)$ y $f'(1)$; no necesitábamos conocer f' y f'' en los puntos del intervalo abierto (a, b).

Tasa de cambio acumulada El Segundo Teorema Fundamental del Cálculo puede volver a enunciarse de esta manera:

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Si $F(t)$ mide el total de alguna cantidad en el instante t, entonces el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo dice que la tasa de cambio acumulada del instante $t = a$ al instante $t = b$ es igual al cambio neto en esa cantidad en el intervalo $[a, b]$, esto es, el total presente en el instante $t = b$ menos el total presente en el instante $t = a$.

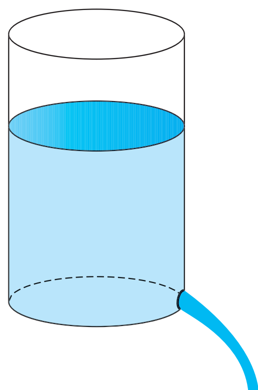


Figura 2

EJEMPLO 15 Sale agua de un depósito, cuya capacidad es de 55 galones, a una tasa de $V'(t) = 11 - 1.1t$, en donde t se mide en horas y V en galones. (Véase la figura 2). Al principio, el depósito está lleno. (a) ¿Cuánta agua sale del tanque entre $t = 3$ y $t = 5$ horas? (b) ¿Cuánto tiempo pasa para que queden exactamente 5 galones en el tanque?

SOLUCIÓN $V(t)$ representa la cantidad de agua que ha salido hasta el instante t.

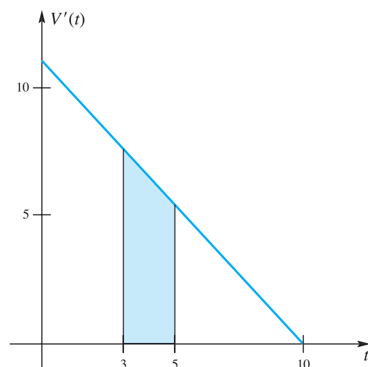


Figura 3

(a) La cantidad que ha salido entre $t = 3$ y $t = 5$ horas es igual al área debajo de la curva $V'(t)$ de 3 a 5 (figura 3). Así,

$$V(5) - V(3) = \int_3^5 V'(t)\,dt = \int_3^5 (11 - 1.1t)\,dt = \left[11t - \frac{1.1}{2}t^2\right]_3^5 = 13.2$$

Por lo tanto, han salido 13.2 galones en las dos horas entre los instantes $t = 3$ y $t = 5$.

(b) Denótese con t_1 el instante en que queden 5 galones en el depósito. Entonces, la cantidad que ha salido es igual a 50, por lo que $V(t_1) = 50$. Como al principio, el depósito estaba lleno (es decir, no había salido agua), tenemos $V(0) = 0$. Por consiguiente,

$$V(t_1) - V(0) = \int_0^{t_1} (11 - 1.1t)\,dt$$
$$50 - 0 = \left[11t - \frac{1.1}{2}t^2\right]_0^{t_1}$$
$$0 = -50 + 11t_1 - 0.55t_1^2$$

Las soluciones de esta última ecuación son $10\left(11 \pm \sqrt{11}\right)/11$, aproximadamente 6.985 y 13.015. Observe que como $\int_0^{10}(11 - 1.1t)\,dt = 55$, el depósito está drenado en el instante $t = 10$, llevándonos a descartar la última solución. Así que al cabo de 6.985 horas quedan 5 galones. ■

Revisión de conceptos

1. Si f es continua en $[a, b]$ y si allí F es cualquier ________ de f, entonces $\int_a^b f(x)\,dx =$ ________.

2. El símbolo $\left[F(x)\right]_a^b$ se establece para la expresión ________.

3. Con base en el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, $\int_c^d F'(x)\,dx =$ ________.

4. Con la sustitución $u = x^3 + 1$, la integral definida $\int_0^1 x^2(x^3 + 1)^4\,dx$ se transforma en la nueva integral definida ________.

Conjunto de problemas 4.4

En los problemas del 1 al 14 utilice el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo para evaluar cada integral definida.

1. $\int_0^2 x^3\,dx$ **2.** $\int_{-1}^2 x^4\,dx$

3. $\int_{-1}^2 (3x^2 - 2x + 3)\,dx$ **4.** $\int_1^2 (4x^3 + 7)\,dx$

5. $\int_1^4 \frac{1}{w^2}\,dw$ **6.** $\int_1^3 \frac{2}{t^3}\,dt$

7. $\int_0^4 \sqrt{t}\,dt$ **8.** $\int_1^8 \sqrt[3]{w}\,dw$

9. $\int_{-4}^{-2} \left(y^2 + \frac{1}{y^3}\right) dy$ **10.** $\int_1^4 \frac{s^4 - 8}{s^2}\,ds$

11. $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ **12.** $\int_{\pi/6}^{\pi/2} 2 \operatorname{sen} t\,dt$

13. $\int_0^1 (2x^4 - 3x^2 + 5)\,dx$ **14.** $\int_0^1 (x^{4/3} - 2x^{1/3})\,dx$

En los problemas del 15 al 34 utilice el método de sustitución para determinar cada una de las siguientes integrales indefinidas.

15. $\int \sqrt{3x + 2}\,dx$ **16.** $\int \sqrt[3]{2x - 4}\,dx$

17. $\int \cos(3x + 2)\,dx$ **18.** $\int \operatorname{sen}(2x - 4)\,dx$

19. $\int \operatorname{sen}(6x - 7)\,dx$ **20.** $\int \cos\left(\pi v - \sqrt{7}\right) dv$

21. $\int x\sqrt{x^2 + 4}\,dx$ **22.** $\int x^2(x^3 + 5)^9\,dx$

23. $\int x(x^2 + 3)^{-12/7}\,dx$ **24.** $\int v\left(\sqrt{3}v^2 + \pi\right)^{7/8} dv$

25. $\int x \operatorname{sen}(x^2 + 4)\,dx$ **26.** $\int x^2 \cos(x^3 + 5)\,dx$

27. $\int \frac{x \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 4}}\,dx$ **28.** $\int \frac{z \cos\left(\sqrt[3]{z^2 + 3}\right)}{\left(\sqrt[3]{z^2 + 3}\right)^2}\,dz$

29. $\int x^2(x^3+5)^8 \cos[(x^3+5)^9]\,dx$

30. $\int x^6(7x^7+\pi)^8 \operatorname{sen}[(7x^7+\pi)^9]\,dx$

31. $\int x\cos(x^2+4)\sqrt{\operatorname{sen}(x^2+4)}\,dx$

32. $\int x^6 \operatorname{sen}(3x^7+9)\sqrt[3]{\cos(3x^7+9)}\,dx$

33. $\int x^2 \operatorname{sen}(x^3+5)\cos^9(x^3+5)\,dx$

34. $\int x^{-4}\sec^2(x^{-3}+1)\sqrt[5]{\tan(x^{-3}+1)}\,dx$

Sugerencia: $D_x \tan x = \sec^2 x$

En los problemas del 35 al 58 utilice la regla de sustitución para integrales definidas para evaluar cada integral definida.

35. $\int_0^1 (x^2+1)^{10}(2x)\,dx$

36. $\int_{-1}^0 \sqrt{x^3+1}(3x^2)\,dx$

37. $\int_{-1}^3 \frac{1}{(t+2)^2}\,dt$

38. $\int_2^{10} \sqrt{y-1}\,dy$

39. $\int_5^8 \sqrt{3x+1}\,dx$

40. $\int_1^7 \frac{1}{\sqrt{2x+2}}\,dx$

41. $\int_{-3}^3 \sqrt{7+2t^2}\,(8t)\,dt$

42. $\int_1^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}\,dx$

43. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx$

44. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x\,dx$

45. $\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^2\,dx$

46. $\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x}}\,dx$

47. $\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\,d\theta$

48. $\int_0^{\pi/6} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta$

49. $\int_0^1 \cos(3x-3)\,dx$

50. $\int_0^{1/2} \operatorname{sen}(2\pi x)\,dx$

51. $\int_0^1 x\operatorname{sen}(\pi x^2)\,dx$

52. $\int_0^{\pi} x^4\cos(2x^5)\,dx$

53. $\int_0^{\pi/4} (\cos 2x + \operatorname{sen} 2x)\,dx$

54. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos 3x + \operatorname{sen} 5x)\,dx$

55. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\cos x)\,dx$

56. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\cos(\pi\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$

57. $\int_0^1 x\cos^3(x^2)\operatorname{sen}(x^2)\,dx$

58. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\operatorname{sen}^2(x^3)\cos(x^3)\,dx$

59. La figura 4 muestra la gráfica de una función f que tiene tercera derivada continua. Las líneas discontinuas son tangentes a la gráfica de $y = f(x)$ en los puntos $(0, 2)$ y $(3, 0)$. Con base en lo que se muestra, diga, si es posible, si las siguientes integrales son positivas, negativas o cero.

(a) $\int_0^3 f(x)\,dx$ (b) $\int_0^3 f'(x)\,dx$

(c) $\int_0^3 f''(x)\,dx$ (d) $\int_0^3 f'''(x)\,dx$

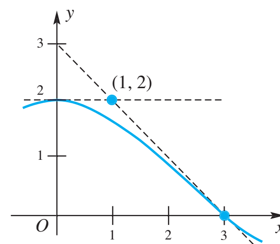


Figura 4

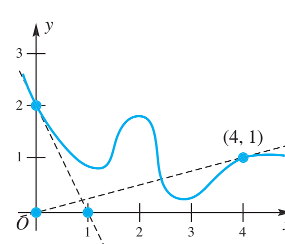


Figura 5

60. La figura 5 muestra la gráfica de una función f que tiene tercera derivada continua. Las líneas discontinuas son tangentes a la gráfica de $y = f(x)$ en los puntos $(0, 2)$ y $(4, 1)$. Con base en lo que se muestra, diga, si es posible, si las siguientes integrales son positivas, negativas o cero.

(a) $\int_0^4 f(x)\,dx$ (b) $\int_0^4 f'(x)\,dx$

(c) $\int_0^4 f''(x)\,dx$ (d) $\int_0^4 f'''(x)\,dx$

61. De un depósito, que tiene capacidad para 200 galones (inicialmente lleno), sale agua a razón de $V'(t) = 20 - t$, donde t se mide en horas y V en galones. ¿Cuánta agua sale entre la hora 10 y la 20? ¿Cuánto tardará el depósito en vaciarse por completo?

62. De un depósito, inicialmente lleno con 55 galones, sale petróleo a razón de $V'(t) = 1 - t/110$. ¿Cuánto petróleo sale durante la primera hora? ¿Y durante la décima hora? ¿Cuánto tarda en quedar vacío el depósito?

63. El agua que se utiliza en una pequeña población se mide en galones por hora. En la figura 6 se muestra una gráfica de esta tasa de uso, desde la medianoche hasta el mediodía de un día particular. Estime la cantidad total de agua consumida durante este periodo de 12 horas.

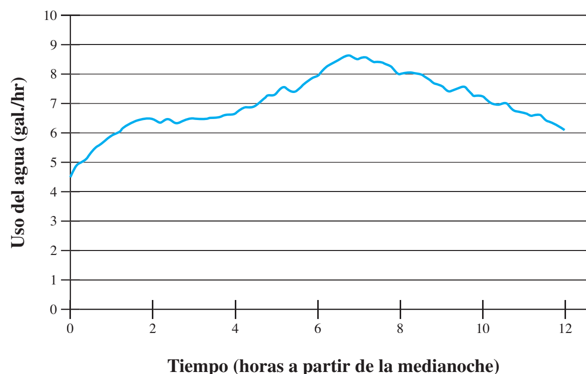


Figura 6

64. La figura 7 muestra la tasa de consumo de petróleo, en millones de barriles por año, para Estados Unidos desde 1973 hasta 2003. De forma aproximada, ¿cuántos barriles de petróleo se consumieron entre 1990 y 2000?

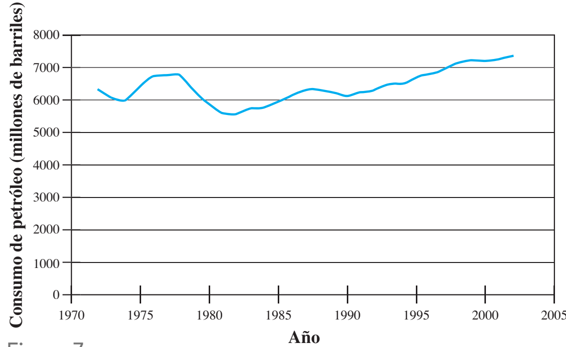


Figura 7

65. La figura 8 muestra el uso de potencia eléctrica, medido en megawatts, para una pequeña población para un día (medido de medianoche a medianoche). Estime la energía eléctrica usada durante el día, medida en megawatts-hora. *Sugerencia:* la potencia es la derivada de la energía.

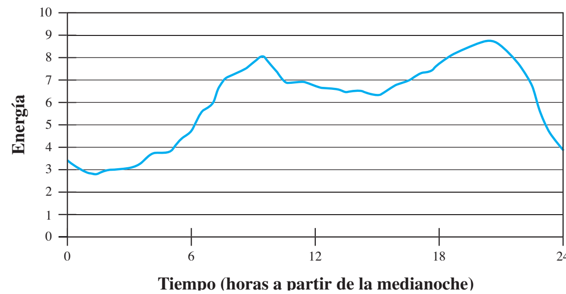


Figura 8

66. La masa de una varilla, medida en kilogramos, desde el extremo izquierdo al punto x, en metros, es $m(x) = x + x^2/8$. ¿Cuál es la densidad $\delta(x)$ de la varilla, medida en kilogramos por metro? Suponiendo que la varilla tiene un largo de 2 metros, exprese la masa total de la varilla en términos de su densidad.

67. Aseguramos que

$$\int_a^b x^n\,dx + \int_{a^n}^{b^n} \sqrt[n]{y}\,dy = b^{n+1} - a^{n+1}$$

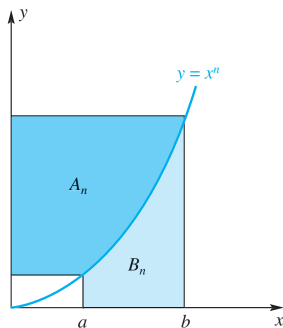


Figura 9

(a) Utilice la figura 9 para justificar esto mediante un argumento geométrico.

(b) Demuestre el resultado usando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

(c) Demuestre que $A_n = nB_n$.

68. Con base en el método sugerido en el ejemplo 6 de la sección 4.3, demuestre el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

En los problemas del 69 al 72 primero identifique el límite dado como una integral definida y luego evalúe la integral por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

69. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3i}{n}\right)^2 \frac{3}{n}$

70. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^3 \frac{2}{n}$

71. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi i}{n}\right)\right] \frac{\pi}{n}$

72. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{2i}{n} + \left(\frac{2i}{n}\right)^2\right] \frac{2}{n}$

C **73.** Explique por qué, para n grande, $(1/n^3)\sum_{i=1}^{n} i^2$ debe ser una buena aproximación para $\int_0^1 x^2\,dx$. Ahora calcule la expresión de la suma para $n = 10$ y evalúe la integral por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. Compare sus valores.

74. Evalúe $\int_{-2}^{4} (2[\![x]\!] - 3|x|)\,dx$.

75. Demuestre que $\frac{1}{2}x|x|$ es una antiderivada de $|x|$ y utilice este hecho para obtener una fórmula sencilla para $\int_a^b |x|\,dx$.

76. Encuentre una fórmula sencilla para $\int_0^b [\![x]\!]\,dx,\ b > 0$.

77. Suponga que f es continua en $[a, b]$.

(a) Sea $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Demuestre que G es continua en $[a, b]$.

(b) Sea $F(x)$ cualquier antiderivada de f en $[a, b]$. Demuestre que F es continua en $[a, b]$.

78. Proporcione un ejemplo para demostrar que la función de acumulación $G(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ puede ser continua aun si f no es continua.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** antiderivada; $F(b) - F(a)$ **2.** $F(b) - F(a)$ **3.** $F(d) - F(c)$

4. $\int_1^2 \frac{1}{3}u^4\,du$

4.5 El teorema del valor medio para integrales y el uso de la simetría

Sabemos lo que significa el promedio de un conjunto de n números, $y_1, y_2, \ldots, y_n$: simplemente los sumamos y dividimos entre n

$$\overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

¿Podemos dar significado al concepto del promedio de una función f en un intervalo $[a, b]$? Bueno, suponga que tomamos una partición regular de $[a, b]$, digamos $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, con $\Delta x = (b - a)/n$. El promedio de los n valores $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ es

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n}\frac{1}{b-a}\\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\end{aligned}$$

Esta última es una suma de Riemann para f en $[a, b]$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

Esto sugiere la siguiente definición.

Definición Valor promedio de una función

Si f es integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces el **valor promedio** de f en $[a, b]$ es

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

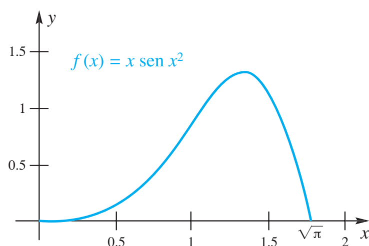


Figura 1

EJEMPLO 1 Determine el valor promedio de la función definida por $f(x) = x \operatorname{sen} x^2$ en el intervalo $\left[0, \sqrt{\pi}\right]$. (Véase la figura 1.)

SOLUCIÓN El valor promedio es

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} - 0}\int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen} x^2\,dx$$

Para evaluar esta integral, hacemos la sustitución $u = x^2$, de modo que $du = 2x\,dx$. Cuando $x = 0$, $u = 0$ y cuando $x = \sqrt{\pi}$, $u = \pi$. Así,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen} x^2\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\operatorname{sen} u\,du = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Big[-\cos u\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad ■$$

EJEMPLO 2 Suponga que la temperatura, en grados Fahrenheit, de una barra metálica de longitud de 2 pies, depende de la posición x, de acuerdo con la función $T(x) = 40 + 20x(2 - x)$. Determine la temperatura promedio en la barra. ¿Existe algún punto en donde la temperatura real sea igual a la temperatura promedio?

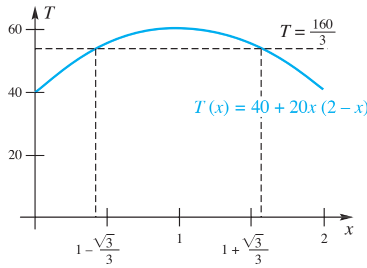


Figura 2

SOLUCIÓN La temperatura promedio es

$$\frac{1}{2}\int_0^2 [40 + 20x(2 - x)]\,dx = \int_0^2 (20 + 20x - 10x^2)\,dx$$

$$= \left[20x + 10x^2 - \frac{10}{3}x^3\right]_0^2$$

$$= \left(40 + 40 - \frac{80}{3}\right) = \frac{160}{3}\ {}^\circ\mathrm{F}$$

La figura 2, que muestra la temperatura T como una función de x, indica que debemos esperar dos puntos en los que la temperatura real sea igual a la temperatura promedio. Para determinar estos puntos, hacemos $T(x)$ igual a 160/3 e intentamos resolver para x.

$$40 + 20x(2 - x) = \frac{160}{3}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

La fórmula cuadrática da

$$x = \frac{1}{3}\left(3 - \sqrt{3}\right) \approx 0.42265 \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{3}\left(3 + \sqrt{3}\right) \approx 1.5774$$

Ambas soluciones están entre 0 y 2, por lo cual existen dos puntos en los que la temperatura es igual a la temperatura promedio. ■

Parece como si siempre debiese existir un valor de x con la propiedad de que $f(x)$ sea igual al valor promedio de la función. Esto es cierto sólo con que la función f sea continua.

Los dos teoremas del valor medio

El teorema del valor medio para derivadas dice que existe algún punto c en el intervalo $[a, b]$ en el que la tasa promedio de cambio de f, $(f(b) - f(a))/(b - a)$, es igual a la tasa instantánea de cambio $f'(c)$.

El teorema del valor medio para integrales dice que existe algún punto c en el intervalo $[a, b]$ en el que el valor medio de la función $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ es igual al valor real de la función, $f(c)$.

Teorema A Teorema del valor medio para integrales

Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe un número c entre a y b, tal que

$$f(c) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Demostración Para $a \le x \le b$ defínase $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Por el teorema del valor medio para derivadas (aplicado a G) existe una c en el intervalo (a, b), tal que

$$G'(c) = \frac{G(b) - G(a)}{b - a}$$

Como $G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$, $G(b) = \int_a^b f(t)\,dt$, $G'(c) = f(c)$, esto lleva a

$$G'(c) = f(c) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(t)\,dt$$ ■

Con frecuencia, el teorema del valor medio para integrales se expresa como sigue: si f es integrable en $[a, b]$, entonces existe una c en $(a, b]$, tal que

$$\int_a^b f(t)\,dt = (b - a)\,f(c)$$

Cuando se ve de esta manera, el teorema del valor medio para integrales dice que existe alguna c en el intervalo $[a, b]$, tal que el área del rectángulo con altura $f(c)$ y ancho $b - a$ es igual al área bajo la curva. En la figura 3 el área bajo la curva es igual al área del rectángulo.

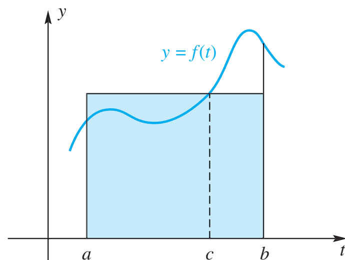


Figura 3

Estimación de integrales

Esta versión del teorema del valor medio para integrales, con la figura 3 junto a ella, sugiere una buena manera de estimar el valor de una integral definida. El área de la región bajo la curva es igual al área de un rectángulo. Uno puede hacer una buena estimación de este rectángulo simplemente "echando un vistazo" a la región. En la figura 3, el área de la parte sombreada *por arriba* de la curva debe coincidir con el área de la parte en blanco por *debajo* de la curva.

EJEMPLO 3 Determine todos los valores de c que satisfacen el teorema del valor medio para integrales, para $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-3, 3]$.

SOLUCIÓN La gráfica de $f(x)$ que se muestra en la figura 4 indica que podría haber dos valores de c que satisfacen el teorema del valor medio para integrales. El valor promedio de la función es

$$\frac{1}{3-(-3)}\int_{-3}^{3} x^2\,dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3} = \frac{1}{18}[27-(-27)] = 3$$

Para determinar los valores de c, resolvemos

$$3 = f(c) = c^2$$
$$c = \pm\sqrt{3}$$

Tanto $-\sqrt{3}$ como $\sqrt{3}$ están en el intervalo $[-3, 3]$, así que ambos valores satisfacen el teorema del valor medio para integrales. ■

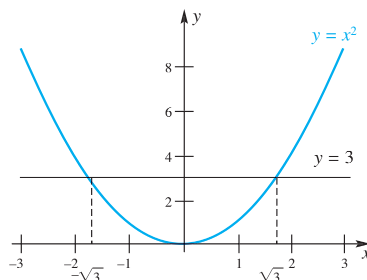


Figura 4

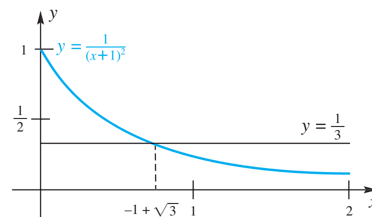


Figura 5

EJEMPLO 4 Determine todos los valores de c que satisfacen el teorema del valor medio para integrales para $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ en el intervalo $[0, 2]$.

SOLUCIÓN La gráfica de $f(x)$ que se muestra en la figura indica que debe haber un valor de c que satisface el teorema del valor medio para integrales. El valor promedio de la función se determina haciendo la sustitución $u = x + 1$, $du = dx$, en donde cuando $x = 0$, $u = 1$ y cuando $x = 2$, $u = 3$:

$$\frac{1}{2-0}\int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{u^2}\,du = \frac{1}{2}\left[-u^{-1}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{1}{3}$$

Para determinar el valor de c, resolvemos

$$\frac{1}{3} = f(c) = \frac{1}{(c+1)^2}$$
$$c^2 + 2c + 1 = 3$$
$$c = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-2)}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Observe que $-1 - \sqrt{3} \approx -2.7321$ y $-1 + \sqrt{3} \approx 0.73205$. La única de estas soluciones que está en el intervalo $[0, 2]$ es $c = -1 + \sqrt{3}$ así, éste es el único valor de c que satisface el teorema del valor medio para integrales. ■

Uso de la simetría en la evaluación de integrales definidas Recuerde que una función par es aquella que satisface $f(-x) = f(x)$, mientras que una función

impar satisface $f(-x) = -f(x)$. La gráfica de la primera es simétrica respecto al eje x; la gráfica de la segunda es simétrica respecto al origen. A continuación, está un útil teorema de integración para tales funciones.

Teorema B **Teorema de simetría**

Si f es una función par, entonces

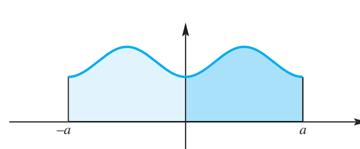
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Si f es una función impar, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

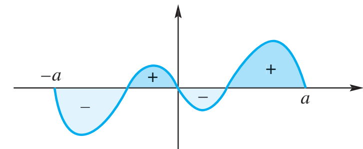
Demostración para funciones pares La interpretación geométrica de este teorema se muestra en las figuras 6 y 7. Para justificar analíticamente los resultados, primero escribimos

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$



Función par
Área de la izquierda = área de la derecha

Figura 6



Función impar
El área de la izquierda neutraliza el área de la derecha

Figura 7

En la primera de las integrales de la derecha hacemos la sustitución $u = -x$, $du = -dx$. Si f es par, $f(u) = f(-x) = f(x)$ y

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{-a}^{0} f(-x)(-dx) = -\int_{a}^{0} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Por lo tanto,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

La demostración para funciones impares se deja como un ejercicio (problema 60). ■

EJEMPLO 5 Evalúe $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$.

SOLUCIÓN Puesto que $\cos(-x/4) = \cos(x/4)$, $f(x) = \cos(x/4)$ es una función par. Así que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 8\int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\,dx$$

$$= 8\int_{0}^{\pi/4} \cos u\,du = \Big[8\,\text{sen}\,u\Big]_{0}^{\pi/4} = 4\sqrt{2}$$ ■

Asegúrese de observar las hipótesis del teorema de simetría. El integrando debe ser par o impar y el intervalo de integración debe ser simétrico con respecto al origen. Éstas son condiciones restrictivas, pero es sorprendente cómo se cumplen en las aplicaciones. Cuando se cumplen, pueden simplificar en gran medida las integraciones.

EJEMPLO 6 Evalúe $\displaystyle\int_{-5}^{5} \frac{x^5}{x^2+4}\,dx.$

SOLUCIÓN $f(x) = x^5/(x^2 + 4)$ es una función impar. Por lo tanto, la integral anterior tiene el valor cero. ■

EJEMPLO 7 Evalúe $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x\,\text{sen}^4 x + x^3 - x^4)\,dx.$

SOLUCIÓN Los primeros dos términos en el integrando son impares, el último es par. Por eso podemos escribir la integral como

$$\int_{-2}^{2} (x\,\text{sen}^4 x + x^3)\,dx - \int_{-2}^{2} x^4\,dx = 0 - 2\int_{0}^{2} x^4\,dx$$

$$= \left[-2\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = -\frac{64}{5}$$ ■

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^3 x \cos^5 x\,dx.$

SOLUCIÓN La función sen x es impar y cos x es par. Una función impar elevada a una potencia impar es impar, por lo que $\text{sen}^3\,x$ es impar. Una función par elevada a cualquier potencia entera es par, por lo que $\cos^5 x$ es par. Una función impar por una función par es impar. Por lo tanto, el integrando en esta integral es una función par y el intervalo es simétrico respecto al origen, así que el valor de esta integral es 0. ■

Uso de la periodicidad Recuérdese que una función f es *periódica* si existe un número p, tal que $f(x + p) = f(x)$ para toda x en el dominio de f. El número positivo más pequeño p que cumple con lo anterior se denomina **periodo** de f. Las funciones trigonométricas son ejemplos de funciones periódicas.

Teorema C

Si f es periódica con periodo p, entonces

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

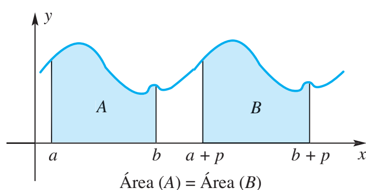


Figura 8

Demostración La interpretación geométrica puede verse en la figura 8. Para demostrar el resultado, sea $u = x - p$ de modo que $x = u + p$ y $du = dx$. Entonces

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,dx = \int_a^b f(u+p)\,du = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(x)\,dx$$

Podríamos reemplazar $f(u + p)$ por $f(u)$, ya que f es periódica. ■

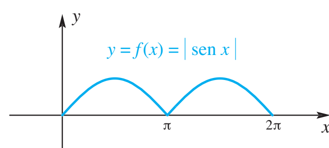


Figura 9

EJEMPLO 9 Evalúe (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\text{sen}\,x|\,dx$ y (b) $\displaystyle\int_0^{100\pi} |\text{sen}\,x|\,dx.$

SOLUCIÓN

(a) Observe que $f(x) = |\text{sen}\,x|$ es periódica con periodo π (véase la figura 9). Así que la integral en (a) es

$$\int_0^{2\pi} |\text{sen } x|\, dx = \int_0^{\pi} |\text{sen } x|\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\text{sen } x|\, dx$$
$$= \int_0^{\pi} |\text{sen } x|\, dx + \int_0^{\pi} |\text{sen } x|\, dx$$
$$= 2\int_0^{\pi} \text{sen } x\, dx = 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 2[1 - (-1)] = 4$$

(b) La integral en (b) es

$$\int_0^{100\pi} |\text{sen } x|\, dx = \underbrace{\int_0^{\pi} |\text{sen } x|\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\text{sen } x|\, dx + \cdots + \int_{99\pi}^{100\pi} |\text{sen } x|\, dx}_{100 \text{ integrales iguales a } \int_0^{\pi} \text{sen } x\, dx}$$
$$= 100\int_0^{\pi} \text{sen } x\, dx = 100\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 100(2) = 200 \quad ■$$

Observe que en el ejemplo 9 tuvimos que utilizar la simetría porque no podemos encontrar una antiderivada para $|\text{sen } x|$ en el intervalo $[0, 100\pi]$.

Revisión de conceptos

1. El valor promedio de una función f en el intervalo $[a, b]$ es ________.

2. El teorema del valor medio para integrales dice que existe una c en el intervalo (a, b), tal que el valor promedio de la función en $[a, b]$ es igual a ________.

3. Si f es una función impar, $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx =$ ________; si f es una función par, $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx =$ ________.

4. La función f es periódica si existe un número p, tal que ________ para toda x en el dominio de f. El número positivo más pequeño de tal p se denomina el (la) ________ de la función.

Conjunto de problemas 4.5

En los problemas del 1 al 14 determine el valor promedio de la función en el intervalo dado.

1. $f(x) = 4x^3$; $[1, 3]$ **2.** $f(x) = 5x^2$; $[1, 4]$

3. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$; $[0, 3]$

4. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3 + 16}}$; $[0, 2]$

5. $f(x) = 2 + |x|$; $[-2, 1]$ **6.** $f(x) = x + |x|$; $[-3, 2]$

7. $f(x) = \cos x$; $[0, \pi]$ **8.** $f(x) = \text{sen } x$; $[0, \pi]$

9. $f(x) = x\cos x^2$; $\left[0, \sqrt{\pi}\right]$

10. $f(x) = \text{sen}^2 x \cos x$; $[0, \pi/2]$

11. $F(y) = y(1 + y^2)^3$; $[1, 2]$

12. $g(x) = \tan x \sec^2 x$; $[0, \pi/4]$

13. $h(z) = \dfrac{\text{sen}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$; $[\pi/4, \pi/2]$

14. $G(v) = \dfrac{\text{sen } v \cos v}{\sqrt{1 + \cos^2 v}}$; $[0, \pi/2]$

En los problemas del 15 al 28 encuentre todos lo valores de x que satisfacen el teorema del valor medio para integrales en el intervalo dado.

15. $f(x) = \sqrt{x + 1}$; $[0, 3]$ **16.** $f(x) = x^2$; $[-1, 1]$

17. $f(x) = 1 - x^2$; $[-4, 3]$ **18.** $f(x) = x(1 - x)$; $[0, 1]$

19. $f(x) = |x|$; $[0, 2]$ **20.** $f(x) = |x|$; $[-2, 2]$

21. $H(z) = \text{sen } z$; $[-\pi, \pi]$ **22.** $g(y) = \cos 2y$; $[0, \pi]$

23. $R(v) = v^2 - v$; $[0, 2]$ **24.** $T(x) = x^3$; $[0, 2]$

25. $f(x) = ax + b$; $[1, 4]$ **26.** $S(y) = y^2$; $[0, b]$

27. $f(x) = ax + b$; $[A, B]$ **28.** $q(y) = ay^2$; $[0, b]$

GC ≈ *Utilice una calculadora gráfica para hacer la gráfica del integrando en los problemas del 29 a 32. Luego estime la integral, como se sugiere en la nota al margen que acompaña al teorema B.*

29. $\int_0^{2\pi} (5 + \text{sen } x)^4\, dx$ **30.** $\int_0^{2} \left[3 + \text{sen}(x^2)\right] dx$

31. $\int_{-1}^{1} \dfrac{2}{1 + x^2}\, dx$ **32.** $\int_{10}^{20} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^5 dx$

33. La figura 10 muestra la humedad relativa H como una función del tiempo t (medido en días, a partir del domingo) para un edificio de oficinas. Aproxime la humedad relativa promedio para la semana.

34. La figura 11 muestra la temperatura T como una función del tiempo t (medido en horas después de la medianoche) para un día en San Luis, Missouri.

(a) Aproxime la temperatura promedio para el día.

(b) ¿Debe existir algún instante cuando la temperatura es igual a la temperatura promedio para el día? Explique.

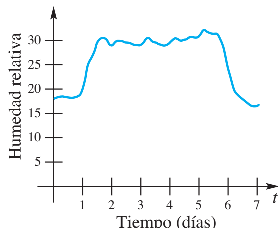


Figura 10

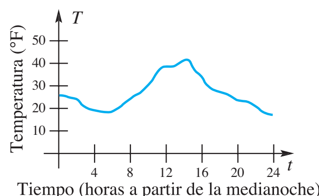


Figura 11

En los problemas del 35 al 44 utilice la simetría para ayudarse a evaluar la integral dada.

35. $\int_{-\pi}^{\pi}(\text{sen } x + \cos x)\,dx$

36. $\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{(1+x^2)^4}\,dx$

37. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\text{sen } x}{1+\cos x}\,dx$

38. $\int_{-\sqrt[3]{\pi}}^{\sqrt[3]{\pi}}x^2\cos(x^3)\,dx$

39. $\int_{-\pi}^{\pi}(\text{sen } x + \cos x)^2\,dx$

40. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}z\,\text{sen}^2(z^3)\cos(z^3)\,dz$

41. $\int_{-1}^{1}(1 + x + x^2 + x^3)\,dx$

42. $\int_{-100}^{100}(v + \text{sen } v + v\cos v + \text{sen}^3 v)^5\,dv$

43. $\int_{-1}^{1}(|x^3| + x^3)\,dx$

44. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(|x|\,\text{sen}^5 x + |x|^2\tan x)\,dx$

45. ¿Cómo es $\int_{-b}^{-a}f(x)\,dx$ comparada con $\int_{a}^{b}f(x)\,dx$, cuando f es una función par? ¿Y cuando f es una función impar?

46. Demuestre (por medio de sustitución) que

$$\int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a}f(x)\,dx$$

47. Utilice periodicidad para calcular $\int_0^{4\pi}|\cos x|\,dx$.

48. Calcule $\int_0^{4\pi}|\text{sen } 2x|\,dx$.

49. Si f es periódica, con periodo p, entonces

$$\int_a^{a+p}f(x)\,dx = \int_0^p f(x)\,dx$$

Convénzase de que esto es cierto: trace una gráfica y luego utilice el resultado para calcular $\int_1^{1+\pi}|\text{sen } x|\,dx$.

50. Utilice el resultado del problema 49 para calcular

$$\int_2^{2+\pi/2}|\text{sen } 2x|\,dx.$$

51. Calcule $\int_1^{1+\pi}|\cos x|\,dx$.

52. Demuestre o refute que la integral del valor promedio es igual a la integral de la función en el intervalo: $\int_a^b \bar{f}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$, donde $\bar{f}$ es el valor promedio de la función f en el intervalo $[a, b]$.

EXPL **53.** Suponga que u y v puedan integrarse en el intervalo $[a, b]$ y que los valores promedio en el intervalo se denotan por $\bar{u}$ y $\bar{v}$, demuestre o refute que

(a) $\bar{u} + \bar{v} = \overline{u + v}$;

(b) $k\bar{u} = \overline{ku}$, donde k es cualquier constante;

(c) si $u \le v$ entonces $\bar{u} \le \bar{v}$.

54. La corriente eléctrica domiciliaria puede modelarse por medio del voltaje $V = \hat{V}\,\text{sen}(120\pi t + \phi)$, donde t se mide en segundos, $\hat{V}$ es el valor máximo que V puede alcanzar y ϕ es el ángulo de fase. Por lo común, tal voltaje es de 60 ciclos, ya que en 1 segundo el voltaje da 60 oscilaciones. El voltaje cuadrado medio, por lo común denotado por V_{rms}, se define como la raíz cuadrada del V^2. De aquí que

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\int_{\phi}^{1+\phi}(\hat{V}\,\text{sen}(120\pi t + \phi))^2\,dt}$$

Una buena medida de cuánto calor puede producir un voltaje dado está determinado por V_{rms}.

(a) Calcule el voltaje promedio durante un segundo.

(b) Calcule el voltaje promedio en 1/60 de un segundo.

(c) Demuestre que $V_{\text{rms}} = \frac{\hat{V}\sqrt{2}}{2}$ calculando la integral para V_{rms}.

Sugerencia: $\int \text{sen}^2 t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t\,\text{sen } t + \frac{1}{2}t + C.$

(d) Si por lo regular el V_{rms} para la corriente domiciliaria es 120 volts, ¿cuál es el valor $\hat{V}$ en este caso?

55. Proporcione una demostración del teorema del valor medio para integrales (teorema A) que no utilice el Primer Teorema Fundamental del Cálculo. *Sugerencia:* aplique el teorema de existencia máximo-mínimo y el teorema del valor intermedio.

56. Integrales que aparecen con frecuencia en las aplicaciones son $\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx$ y $\int_0^{2\pi}\text{sen}^2 x\,dx$.

(a) Por medio de una identidad trigonométrica, muestre que

$$\int_0^{2\pi}(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)\,dx = 2\pi$$

(b) Muestre, a partir de consideraciones geométricas, que

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx = \int_0^{2\pi}\text{sen}^2 x\,dx$$

(c) Concluya que $\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx = \int_0^{2\pi}\text{sen}^2 x\,dx = \pi$.

GC **57.** Sea $f(x) = |\text{sen } x| \text{ sen}(\cos x)$.

(a) ¿Es par, impar o ninguna de los dos?

(b) Observe que f es periódica, ¿cuál es su periodo?

(c) Evalúe la integral definida de f para cada uno de los intervalos siguientes: $[0, \pi/2]$, $[-\pi/2, \pi/2]$, $[0, 3\pi/2]$, $[-3\pi/2, 3\pi/2]$, $[0, 2\pi]$, $[\pi/6, 13\pi/6]$, $[\pi/6, 4\pi/3]$, $[13\pi/6, 10\pi/3]$.

58. Repita el problema 57 para $f(x) = \text{sen } x\, |\text{sen}(\text{sen } x)|$.

59. Complete la generalización del Teorema de Pitágoras, iniciado en el problema 59 de la sección 0.3, mediante la demostración de que $A + B = C$ en la figura 12, éstas son las áreas de regiones semejantes construidas sobre los dos catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

(a) Convénzase de que semejanza significa

$$g(x) = \frac{a}{c} f\left(\frac{c}{a}x\right) \quad \text{y} \quad h(x) = \frac{b}{c} f\left(\frac{c}{b}x\right)$$

(b) Demuestre que $\int_0^a g(x)\, dx + \int_0^b h(x)\, dx = \int_0^c f(x)\, dx$.

60. Demuestre el teorema de simetría para el caso de funciones impares.

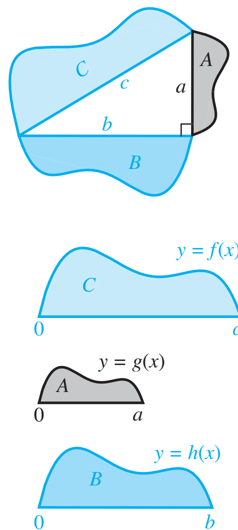


Figura 12

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$ **2.** $f(c)$ **3.** 0; $2\int_0^2 f(x)\, dx$ **4.** $f(x + p) = f(x)$; periodo.

4.6 Integración numérica

Sabemos que si f es continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ debe existir. La existencia es una cosa; la evaluación es un asunto muy distinto. Hay muchas integrales definidas que no se pueden evaluar mediante los métodos que hemos aprendido; es decir, usando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. Por ejemplo, las integrales indefinidas

$$\int \text{sen}(x^2)\, dx, \quad \int \sqrt{1 - x^4}\, dx, \quad \int \frac{\text{sen } x}{x}\, dx$$

no pueden expresarse algebraicamente en términos de funciones elementales; es decir, en términos de funciones estudiadas en un primer curso de cálculo. Aunque algunas integrales indefinidas elementales se pueden encontrar, con frecuencia conviene usar los métodos de aproximación de esta sección, pues éstos conducen a algoritmos eficientes que se pueden programar directamente en una calculadora o computadora. En la sección 4.2 vimos cómo usar las sumas de Riemann para aproximar una integral definida. En esta sección revisamos estas sumas de Riemann y presentamos dos métodos más: la regla del trapecio y la regla de la parábola.

Sumas de Riemann En la sección 4.2 introducimos el concepto de suma de Riemann. Suponga que f está definida en $[a, b]$ y que dividimos el intervalo $[a, b]$ en n intervalos más pequeños con puntos extremos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Entonces, la suma de Riemann está definida como

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, \Delta x_i$$

en donde $\bar{x}_i$ es algún punto (incluso, posiblemente un extremo) en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Por ahora, supondremos que la partición es *regular*, esto es, $\Delta x_i = (b - a)/n$

para toda i. Las sumas de Riemann se introdujeron en la sección 4.2, con el objetivo de expresar la integral definida como el límite de la suma de Riemann. Aquí vemos a la suma de Riemann como una forma de aproximar una integral definida.

Consideramos los tres casos: en donde el punto muestra, $\overline{x}_i$, es el extremo izquierdo, el extremo derecho o el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$. El extremo izquierdo, el extremo derecho y el punto medio del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ son

$$\text{extremo izquierdo} = x_{i-1} = a + (i-1)\frac{b-a}{n}$$

$$\text{extremo derecho} = x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$$

$$\text{punto medio} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = \frac{a + (i-1)\frac{b-a}{n} + a + i\frac{b-a}{n}}{2} = a + \left(i - \tfrac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}$$

Para una suma de Riemann del punto izquierdo tomamos $\overline{x}_i$ como x_{i-1}, el extremo izquierdo:

$$\text{Suma de Riemann del punto izquierdo} = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)$$

Para una suma de Riemann del punto derecho tomamos $\overline{x}_i$ como x_i, el extremo derecho:

$$\text{Suma de Riemann del punto derecho} = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)$$

Para la suma de Riemann del punto medio tomamos $\overline{x}_i$ como $(x_{i-1}+x_i)/2$, el punto medio del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\text{Suma de Riemann del punto medio} = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \left(i - \tfrac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)$$

Las figuras en la gran tabla de la página siguiente ilustran cómo funcionan estas aproximaciones (y otras dos, que introduciremos posteriormente en esta sección).

EJEMPLO 1 Aproxime la integral definida $\int_1^3 \sqrt{4-x}\,dx$; use las sumas de Riemann del punto izquierdo, del punto derecho y del punto medio con $n = 4$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = \sqrt{4-x}$. Tenemos $a = 1$, $b = 3$ y $n = 4$, por lo que $(b-a)/n = 0.5$. Los valores x_i y $f(x_i)$ son

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1.0 & f(x_0) &= f(1.0) = \sqrt{4-1} \approx 1.7321\\
x_1 &= 1.5 & f(x_1) &= f(1.5) = \sqrt{4-1.5} \approx 1.5811\\
x_2 &= 2.0 & f(x_2) &= f(2.0) = \sqrt{4-2} \approx 1.4142\\
x_3 &= 2.5 & f(x_3) &= f(2.5) = \sqrt{4-2.5} \approx 1.2247\\
x_4 &= 3.0 & f(x_4) &= f(3.0) = \sqrt{4-3} = 1.0000
\end{aligned}$$

Mediante la suma de Riemann del punto izquierdo tenemos la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \sqrt{4-x}\,dx &\approx \text{Suma de Riemann del punto izquierdo}\\
&= \frac{b-a}{n}[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)]\\
&= 0.5[f(1.0) + f(1.5) + f(2.0) + f(2.5)]\\
&\approx 0.5(1.7321 + 1.5811 + 1.4142 + 1.2247)\\
&\approx 2.9761
\end{aligned}$$

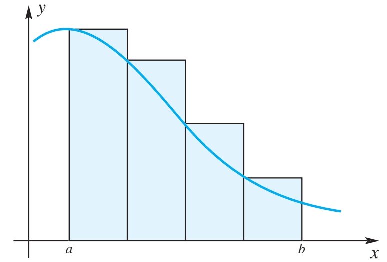
Métodos para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$

1. Suma de Riemann del punto izquierdo

$$\text{Área del } i\text{-ésimo rectángulo} = f(x_{i-1})\,\Delta x_i = \frac{b-a}{n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)$$

$$E_n = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(c) \text{ para alguna } c \text{ en } [a,b]$$

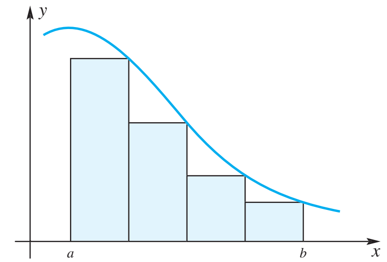


2. Suma de Riemann del punto derecho

$$\text{Área del } i\text{-ésimo rectángulo} = f(x_i)\,\Delta x_i = \frac{b-a}{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

$$E_n = -\frac{(b-a)^2}{2n} f'(c) \text{ para alguna } c \text{ en } [a,b]$$

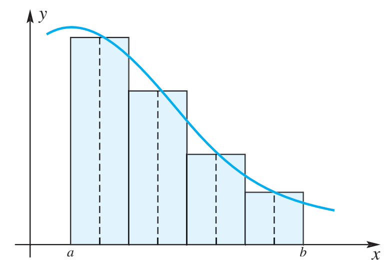


3. Suma de Riemann del punto medio

$$\text{Área del } i\text{-ésimo rectángulo} = f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\Delta x_i = \frac{b-a}{n} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)$$

$$E_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c) \text{ para alguna } c \text{ en } [a,b]$$



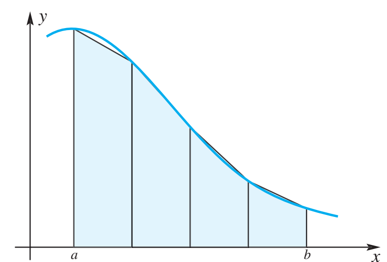
4. Regla del trapecio

$$\text{Área del trapecio } i\text{-ésimo} = \frac{b-a}{n}\,\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

$$= \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) + f(b)\right]$$

$$E_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c) \text{ para alguna } c \text{ en } [a,b]$$

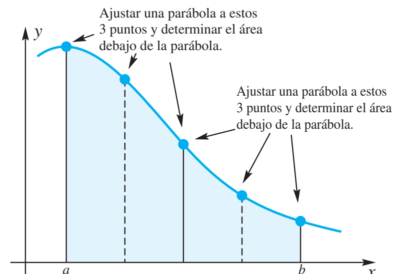


5. Regla de la parábola (*n* debe ser par)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-3}) + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{b-a}{3n}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f\left(a + (2i-1)\frac{b-a}{n}\right) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f\left(a + 2i\frac{b-a}{n}\right) + f(b)\right]$$

$$E_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c) \text{ para alguna } c \text{ en } [a,b]$$



La suma de Riemann del punto derecho lleva a la aproximación siguiente:

$$\begin{aligned}\int_1^3 \sqrt{4-x}\,dx &\approx \text{Suma de Riemann del punto derecho}\\ &= \frac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)]\\ &= 0.5[f(1.5)+f(2.0)+f(2.5)+f(3.0)]\\ &\approx 0.5(1.5811+1.4142+1.2247+1.0000)\\ &\approx 2.6100\end{aligned}$$

Por último, la aproximación de la suma de Riemann del punto medio para la integral definida es

$$\begin{aligned}\int_1^3 \sqrt{4-x}\,dx &\approx \text{Suma de Riemann del punto medio}\\ &= \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right]\\ &= 0.5\,[f(1.25)+f(1.75)+f(2.25)+f(2.75)]\\ &\approx 0.5(1.6583+1.5000+1.3229+1.1180)\\ &\approx 2.7996\end{aligned}$$

■

En este último ejemplo no eran necesarias las aproximaciones, ya que podríamos haber evaluado esta integral por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\begin{aligned}\int_1^3 \sqrt{4-x}\,dx &= \left[-\frac{2}{3}(4-x)^{3/2}\right]_1^3 = -\frac{2}{3}(4-3)^{3/2}+\frac{2}{3}(4-1)^{3/2}\\ &= 2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\approx 2.7974\end{aligned}$$

La aproximación mediante la suma de Riemann del punto medio resultó ser la más cercana. Las figuras en la tabla de la página anterior sugieren que, con frecuencia, éste será el caso.

El ejemplo siguiente es más realista, en el sentido de que no es posible aplicar el-Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

EJEMPLO 2 Aproxime la integral definida $\int_0^2 \operatorname{sen} x^2\,dx$, mediante la suma de Riemann del punto derecho, con $n = 8$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = \operatorname{sen} x^2$. Tenemos $a = 0$, $b = 2$ y $n = 8$, de modo que $(b - a)/n = 0.25$. Al usar la suma de Riemann del punto derecho tenemos la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \operatorname{sen} x^2\,dx &\approx \text{Suma de Riemann del punto derecho}\\ &= \frac{b-a}{n}\left[\sum_{i=1}^{8} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right]\\ &= 0.25(\operatorname{sen} 0.25^2+\operatorname{sen} 0.5^2+\operatorname{sen} 0.75^2+\operatorname{sen} 1^2\\ &\quad+\operatorname{sen} 1.25^2+\operatorname{sen} 1.5^2+\operatorname{sen} 1.75^2+\operatorname{sen} 2^2)\\ &\approx 0.69622\end{aligned}$$

■

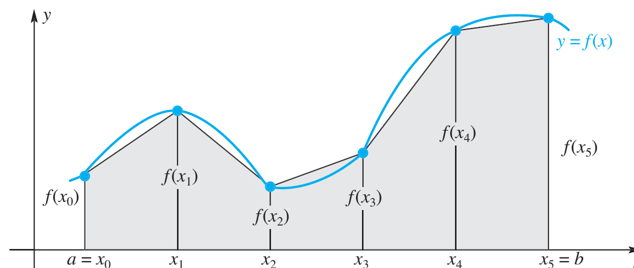


Figura 1

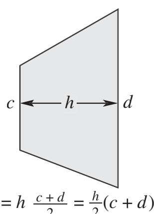


Figura 2

La regla del trapecio Suponga que unimos las parejas de puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$ mediante segmentos de recta, como se muestra en la figura 1, y así se forman n trapecios. Entonces, en lugar de aproximar el área debajo de la curva mediante la suma de áreas de *rectángulos*, la aproximamos mediante la suma de las áreas de los *trapecios*. Este método se denomina regla del trapecio.

Al recordar la fórmula para el área que aparece en la figura 2 podemos escribir el área del trapecio como

$$A_i = \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

Más precisamente, deberíamos hablar del área con *signo,* pues A_i será negativa en un subintervalo donde ϕ sea negativa. La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es aproximadamente igual a $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, es decir, igual a

$$\frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Esto se simplifica a la regla del trapecio:

Regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) + f(b)\right]$$

EJEMPLO 3 Aproxime la integral definida $\int_0^2 \operatorname{sen} x^2\,dx$ por medio de la regla del trapecio con $n = 8$.

SOLUCIÓN Éste es el mismo integrando e intervalo como en el ejemplo 2.

$$\int_0^2 \operatorname{sen} x^2\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{7} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) + f(b)\right]$$

$$= 0.125\left[\operatorname{sen} 0^2 + 2(\operatorname{sen} 0.25^2 + \operatorname{sen} 0.5^2 + \operatorname{sen} 0.75^2 + \operatorname{sen} 1^2\right.$$

$$\left.+ \operatorname{sen} 1.25^2 + \operatorname{sen} 1.5^2 + \operatorname{sen} 1.75^2) + \operatorname{sen} 2^2\right]$$

$$\approx 0.79082$$

■

Es de suponer que podríamos obtener una mejor aproximación al elegir una n mayor; esto sería fácil si usáramos una computadora. Sin embargo, aunque al considerar n mayor se reduce el error del método, al menos potencialmente aumenta el error de cálculo. Por ejemplo, no sería adecuado considerar $n = 1{,}000{,}000$, pues los errores potenciales por el redondeo harían más que compensar el hecho de que el error del método fuese minúsculo. En breve, hablaremos más sobre los errores.

La regla de la parábola (regla de Simpson) En la regla del trapecio aproximamos la curva $y = f(x)$ por medio de segmentos de recta. Parece probable que podríamos hacerlo mejor utilizando segmentos parabólicos. Al igual que antes, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de longitud $h = (b - a)/n$, pero esta vez con n un número *par*. Entonces ajustamos segmentos parabólicos a tres puntos adyacentes, como se muestra en la figura 3.

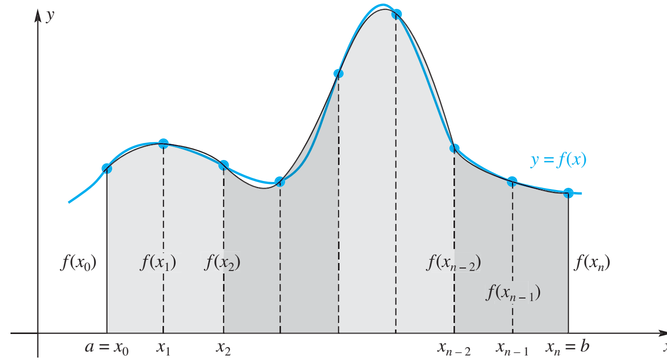


Figura 3

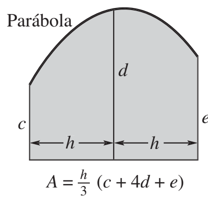


Figura 4

El uso de la fórmula del área en la figura 4 (véase el problema 17 para la deducción) conduce a una aproximación denominada **regla de la parábola.** También se le llama **regla de Simpson,** en honor del matemático inglés Thomas Simpson (1710–1761).

Regla de la parábola (n par)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{b-a}{3n}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f\left(a + (2i-1)\frac{b-a}{n}\right) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f\left(a + 2i\frac{b-a}{n}\right) + f(b)\right]$$

El patrón de los coeficientes es 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2,..., 2, 4, 1.

EJEMPLO 4 Aproxime la integral definida $\int_0^3 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ por medio de la regla de la parábola con $n = 6$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 1/(1 + x^2)$, $a = 0$, $b = 3$ y $n = 6$. Las x_i son $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.0, \ldots, x_6 = 3.0$

$$\int_0^3 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{3-0}{3\cdot 6}[f(0) + 4f(0.5) + 2f(1.0) + 4f(1.5) + 2f(2.0) + 4f(2.5) + f(3.0)]$$

$$= \frac{1}{6}(1 + 4\cdot 0.8 + 2\cdot 0.5 + 4\cdot 0.30769 + 2\cdot 0.2 + 4\cdot 0.13793 + 0.1)$$

$$= 1.2471$$

■

Análisis del error En cualquier uso práctico de los métodos de aproximación descritos en esta sección, necesitamos tener alguna idea del tamaño del error incluido. Por fortuna, los métodos descritos en esta sección tienen fórmulas de error sencillas, siempre que el integrando tenga un número suficiente de derivadas. Llamamos a E_n el error si satisface

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{aproximación con base en } n \text{ intervalos} + E_n$$

Las fórmulas del error se dan en el siguiente teorema. Las demostraciones de estos resultados son muy difíciles y aquí las omitiremos.

Teorema A

Suponiendo que existen las derivadas necesarias en el intervalo $[a, b]$, los errores para la suma de Riemann del punto izquierdo, la suma de Riemann del punto derecho, la suma de Riemann del punto medio, la regla del trapecio y la regla de la parábola son

Suma de Riemann del punto izquierdo: $E_n = \dfrac{(b-a)^2}{2n} f'(c)$ para alguna c en $[a, b]$

Suma de Riemann del punto derecho: $E_n = -\dfrac{(b-a)^2}{2n} f'(c)$ para alguna c en $[a, b]$

Suma de Riemann del punto medio: $E_n = \dfrac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c)$ para alguna c en $[a, b]$

Regla del trapecio: $E_n = -\dfrac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c)$ para alguna c en $[a, b]$

Regla de la parábola: $E_n = -\dfrac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c)$ para alguna c en $[a, b]$

La cosa más importante de ser observada acerca de estas fórmulas de errores es la posición de n, el número de subintervalos. En todos los casos, la n aparece elevada a alguna potencia en el *denominador*. Por lo tanto, cuando n aumenta, el error disminuye. Además, entre más grande sea el exponente en n, el término de error se aproximará más rápido a cero. Por ejemplo, el término del error en la regla de la parábola incluye una n^4 en el denominador. Como n^4 crece mucho más rápido que n^2, el término del error para la regla de la parábola se aproximará a cero más rápido que el término del error para la regla del trapecio o la regla de la suma de Riemann del punto medio. De forma análoga, el término del error para la regla del trapecio se aproximará a cero más rápido que el término del error para las reglas de la suma de Riemann del punto izquierdo o derecho. Otra cosa que se debe notar acerca de estas fórmulas del error es que se cumplen "para alguna c en $[a, b]$". En la mayor parte de las situaciones prácticas, nunca podemos decir cuál es el valor de c. Todo lo que podemos hacer es obtener una cota superior sobre qué tan grande puede ser el error. Los siguientes ejemplos ilustran esto.

EJEMPLO 5 Aproxime la integral definida $\int_1^4 \frac{1}{1+x}\,dx$ por medio de la regla de la parábola con $n = 6$ y proporcione una cota para el valor absoluto del error.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 1$, $b = 4$ y $n = 6$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{1+x}\,dx &\approx \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] \\ &= \frac{3}{3(6)}[f(1.0) + 4f(1.5) + 2f(2.0) + 4f(2.5) + 2f(3.0) + 4f(3.5) + f(4.0)] \\ &\approx \frac{1}{6}(5.4984) \approx 0.9164\end{aligned}$$

El término del error para la regla de la parábola incluye la cuarta derivada del integrando:

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

La pregunta a la que ahora nos enfrentamos es ¿qué tan grande puede ser $|f^{(4)}(x)|$ en el intervalo [1, 4]? Es claro que $f^{(4)}(x)$ es una función decreciente no negativa en este intervalo, así que su valor absoluto alcanza su valor mayor en el extremo izquierdo, esto es, cuando $x = 1$. El valor de la cuarta derivada en $x = 1$ es $f^{(4)}(1) = 24/(1+1)^5 = 3/4$. Así que

$$|E_6| = \left|-\frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{(4)}(c)\right| = \frac{(4-1)^5}{180 \cdot 6^4}|f^{(4)}(c)| \le \frac{(4-1)^5}{180 \cdot 6^4}\frac{3}{4} \approx 0.00078$$

Por lo tanto, el error no es mayor que 0.00078. ■

En el siguiente ejemplo damos vuelta a las cosas. En lugar de especificar n y preguntar por el error, damos el error deseado y preguntamos qué tan grande debe ser n.

EJEMPLO 6 ¿Qué tan grande debe ser n para garantizar que el valor absoluto del error sea menor que 0.00001, cuando utilizamos (a) la suma de Riemann del punto derecho, (b) la regla del trapecio y (c) la regla de la parábola para estimar $\int_1^4 \frac{1}{1+x}\,dx$?

SOLUCIÓN Las derivadas del integrando $f(x) = 1/(1+x)$ están dadas en el ejemplo anterior.

(a) El valor absoluto del término del error para la suma de Riemann del punto derecho es

$$|E_n| = \left|-\frac{(4-1)^2}{2n}f'(c)\right| = \frac{3^2}{2n}\left|\frac{1}{(1+c)^2}\right| \le \frac{9}{2n}\frac{1}{(1+1)^2} = \frac{9}{8n}$$

Queremos $|E_n| \le 0.00001$, así que necesitamos

$$\frac{9}{8n} \le 0.00001$$

$$n \ge \frac{9}{8 \cdot 0.00001} = 112{,}500$$

(b) Para la regla del trapecio tenemos

$$|E_n| = \left|-\frac{(4-1)^3}{12n^2}f''(c)\right| = \frac{3^3}{12n^2}\left|\frac{2}{(1+c)^3}\right| \le \frac{54}{12n^2(1+1)^3} = \frac{9}{16n^2}$$

Necesitamos que $|E_n| \le 0.00001$, así que n debe satisfacer

$$\frac{9}{16n^2} \le 0.00001$$

$$n^2 \ge \frac{9}{16 \cdot 0.00001} = 56{,}250$$

$$n \ge \sqrt{56{,}250} \approx 237.17$$

Así que, $n = 238$ debe hacerlo.

(c) Para la regla de la parábola,

$$|E_n| = \left| -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c) \right| = \frac{3^5}{180n^4} \left| \frac{24}{(1+c)^5} \right| \leq \frac{3^5 \cdot 24}{180n^4(1+1)^5} = \frac{81}{80n^4}$$

Necesitamos $|E_n| \leq 0.00001$, así que

$$\frac{81}{80n^4} \leq 0.00001$$

$$n^4 \geq \frac{81}{80 \cdot 0.00001} \approx 101{,}250$$

$$n \geq 101{,}250^{1/4} \approx 17.8$$

Debemos redondear al siguiente entero par (ya que, para la regla de la parábola, n debe ser par). Por lo tanto, requerimos $n = 18$. ■

Observe cuán diferentes fueron las respuestas para las tres partes del ejemplo anterior. ¡Dieciocho subintervalos para la regla de la parábola dará casi la misma precisión que 100,000 subintervalos para la suma de Riemann del punto derecho! En realidad, la regla de la parábola es un método muy poderoso para aproximar integrales definidas.

Minutos	Velocidad
0	0
10	55
20	57
30	60
40	70
50	70
60	70
70	70
80	19
90	0
100	59
110	63
120	65
130	62
140	0
150	0
160	0
170	22
180	38
190	35
200	25
210	0

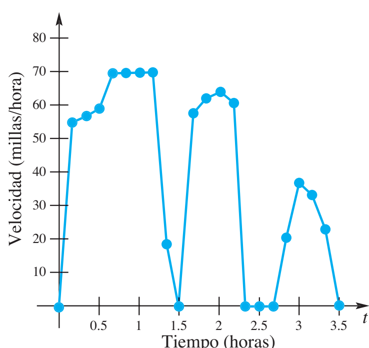


Figura 5

Funciones definidas por medio de una tabla En todos los ejemplos anteriores, la función que hemos integrado se ha definido siempre en el intervalo completo de integración. Existen muchas situaciones en donde éste no es el caso. Por ejemplo, la velocidad se mide cada minuto, el flujo de agua de un tanque se mide cada 10 segundos y el área de la sección transversal se mide cada 0.1 milímetros. En todos estos casos, la integral tiene un significado claramente definido. Aunque no podemos obtener la integral de manera exacta, podemos utilizar las sumas de Riemann para aproximar la integral.

EJEMPLO 7 Mientras su padre conducía desde San Luis hasta la ciudad de Jefferson, Chris observó la velocidad del automóvil cada 10 minutos, esto es, cada sexto de hora. La tabla al margen muestra estas lecturas del velocímetro. Utilice la regla del trapecio para aproximar cuánto viajaron.

SOLUCIÓN Sea $v(t)$ la velocidad del automóvil en el instante t, en donde t se mide en horas, contadas a partir del inicio del viaje. Si conocemos $v(t)$ para toda t en el intervalo $[0, 3.5]$ podemos encontrar la distancia recorrida tomando $\int_0^{3.5} v(t)\,dt$. El problema es que sólo conocemos $v(t)$ para 22 valores de t; $t_k = k/6$, donde $k = 0, 1, 2, \ldots, 21$. La figura 5 muestra una gráfica de la información que nos dan. Dividimos el intervalo $[0, 3.5]$ en intervalos de ancho $\frac{1}{6}$ (ya que 10 minutos es un sexto de una hora). Entonces, la regla del trapecio da

$$\int_0^{3.5} v(t)\,dt \approx \frac{3.5-0}{2 \cdot 21}\left[v(0) + 2\sum_{i=1}^{20} v\left(0 + i\frac{3.5-0}{21}\right) + v(21)\right]$$

$$= \frac{3.5}{42}[0 + 2(55 + 57 + 60 + 70 + 70 + 70 + 70 + 19 + 0 + 59$$

$$+ 63 + 65 + 62 + 0 + 0 + 0 + 22 + 38 + 35 + 25) + 0]$$

$$= 140$$

Ellos condujeron aproximadamente 140 millas ■

Revisión de conceptos

1. El patrón de coeficientes en la regla del trapecio es ______.

2. El patrón de coeficientes en la regla de la parábola es ______.

3. El error en la regla del trapecio tiene n^2 en el denominador, mientras que el error en la regla de la parábola tiene _______ en el denominador, de modo que esperamos que la segunda proporcione una mejor aproximación a una integral definida.

4. Si f es positiva y cóncava hacia arriba, entonces la regla del trapecio dará siempre un valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ demasiado ______.

Conjunto de problemas 4.6

C *En los problemas 1 al 6 utilice los métodos de (1) suma de Riemann del punto izquierdo, (2) suma de Riemann del punto derecho, (3) regla del trapecio, (4) regla de la parábola, con n = 8, para aproximar la integral definida. Luego utilice el segundo teorema fundamental del cálculo para determinar el valor exacto de cada integral.*

1. $\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx$

2. $\int_1^3 \frac{1}{x^3}\,dx$

3. $\int_0^2 \sqrt{x}\,dx$

4. $\int_1^3 x\sqrt{x^2+1}\,dx$

5. $\int_0^1 x(x^2+1)^5\,dx$

6. $\int_1^4 (x+1)^{3/2}\,dx$

C *En los problemas del 7 al 10 utilice los métodos de (1) suma de Riemann del punto izquierdo, (2) suma de Riemann del punto derecho, (3) suma de Riemann del punto medio, (4) regla del trapecio, (5) regla de la parábola, con n = 4, 8, 16. (Observe que ninguna de estas integrales puede evaluarse mediante el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, con las técnicas que ha aprendido hasta aquí). Presente sus aproximaciones en una tabla, como la siguiente:*

	SRPI	SRPD	SRPM	Trapecio	Parábola
$n = 4$					
$n = 8$					
$n = 16$					

7. $\int_1^3 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

8. $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

9. $\int_0^2 \sqrt{x^2+1}\,dx$

10. $\int_1^3 x\sqrt{x^3+1}\,dx$

C *En los problemas del 11 al 14 determine una n de modo que la regla del trapecio aproximará a la integral con un error En, que satisface $|E_n| \leq 0.01$. Luego, utilizando esa n, aproxime la integral.*

11. $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

12. $\int_1^3 \frac{1}{1+x}\,dx$

13. $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

14. $\int_1^3 \sqrt{x+1}\,dx$

C *En los problemas 15 y 16 determine una n de modo que la regla de la parábola aproximará a la integral con un error En, que satisface $|E_n| \leq 0.01$. Luego, con esa n, aproxime la integral.*

15. $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

16. $\int_4^8 \sqrt{x+1}\,dx$

17. Let $f(x) = ax^2 + bx + c$. Demuestre que

$$\int_{m-h}^{m+h} f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \frac{h}{3}[f(m-h) + 4f(m) + f(m+h)]$$

tienen el valor $(h/3)[a(6m^2 + 2h^2) + b(6m) + 6c]$. Esto establece la fórmula del área, en la que está basada la regla de la parábola.

18. De dos formas distintas, muestre que la regla de la parábola es exacta para cualquier polinomio cúbico.

(a) Por medio de cálculo directo.

(b) Demostrando que $E_n = 0$.

Justifique sus respuestas a los problemas 19 al 22, de dos maneras: (1) mediante las propiedades de la gráfica de la función, y (2) por medio de las fórmulas del error del teorema A.

19. Si una función f es creciente en el intervalo $[a, b]$, la suma de Riemann del punto izquierdo ¿será mayor o menor que $\int_a^b f(x)\,dx$?

20. Si una función f es creciente en el intervalo $[a, b]$, la suma de Riemann del punto derecho ¿será mayor o menor que $\int_a^b f(x)\,dx$?

21. Si una función f es cóncava hacia abajo en el intervalo $[a, b]$, la suma de Riemann del punto medio ¿será mayor o menor que $\int_a^b f(x)\,dx$?

22. Si una función f es cóncava hacia abajo en el intervalo $[a, b]$, la suma de la regla del trapecio ¿será mayor o menor que $\int_a^b f(x)\,dx$?

23. Muestre que la regla de la parábola proporciona el valor exacto de $\int_{-a}^{a} x^k\,dx$ siempre que k sea impar.

24. Es interesante que una versión modificada de la regla del trapecio sea más precisa, en general, que la regla de la parábola. Esta versión dice que

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T - \frac{[f'(b) - f'(a)]h^2}{12}$$

donde T es la estimación usual por medio de trapecios.

(a) Utilice esta fórmula con $n = 8$ para estimar $\int_1^3 x^4\,dx$ y observe su notable precisión.

(b) Utilice esta fórmula con $n = 12$ para estimar $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$.

25. Sin hacer cálculo alguno, clasifique de la más pequeña a la más grande las aproximaciones de $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1}\, dx$, para los siguientes métodos: suma de Riemann del punto izquierdo, suma de Riemann del punto derecho, suma de Riemann del punto medio, regla del trapecio.

26. Sin hacer cálculo alguno, clasifique de la más pequeña a la más grande las aproximaciones de $\int_1^3 (x^3 + x^2 + x + 1)\, dx$, para los siguientes métodos: suma de Riemann del punto izquierdo, suma de Riemann del punto derecho, regla del trapecio, regla de la parábola.

27. Utilice la regla del trapecio para aproximar el área del terreno a orillas del lago que se muestra en la figura 6. Las dimensiones están en pies.

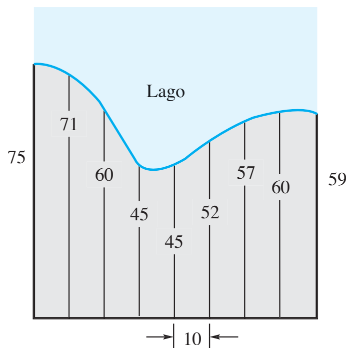


Figura 6

28. Utilice la regla de la parábola para aproximar la cantidad de agua necesaria para llenar una piscina, cuya figura se muestra en la figura 7, a una profundidad de 6 pies. Todas las dimensiones están en pies.

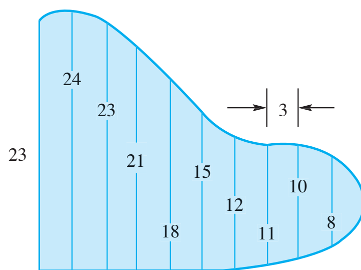


Figura 7

C **29.** La figura 8 muestra la profundidad, en pies, del agua en un río, medida a intervalos de 20 pies por la anchura del río. Si el río fluye a 4 millas por hora, durante un día, ¿cuánta agua (en pies cúbicos) fluye pasando por el lugar en donde se tomaron estas medidas? Utilice la regla de la parábola.

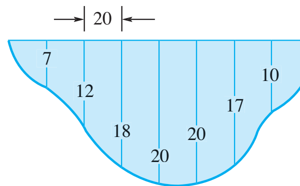


Figura 8

30. En un día de trabajo, Terí anotó su velocidad cada 3 minutos. Los resultados se muestran en la siguiente tabla. ¿Qué distancia manejó?

Tiempo (minutos)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
Velocidad (mi/h)	0	31	54	53	52	35	31	28	0

31. Cada 12 minutos, entre las 4:00 p. m. y las 6:00 p. m., se midió la razón (en galones por minuto) a la cual fluía el agua del depósito de agua de un pueblo. Los resultados se muestran en la siguiente tabla. ¿Cuánta agua fue utilizada en este periodo de 2 horas?

Tiempo	4:00	4:12	4:24	4:36	4:48	5:00
Flujo (gal/min)	65	71	68	78	105	111
Tiempo	5:12	5:24	5:36	5:48	6:00	
Flujo (gal/min)	108	144	160	152	148	

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** 1, 2, 2, . . . , 2, 1 **2.** 1, 4, 2, 4, 2, . . . , 4, 1 **3.** n^4 **4.** grande

4.7 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

1. La integral indefinida es un operador lineal.

2. $\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\, dx = f(x)g(x) + C.$

3. Todas las funciones continuas deben tener antiderivadas.

4. Si las segundas derivadas de dos funciones son iguales, entonces las funciones difieren a lo más por una constante.

5. $\int f'(x)\, dx = f(x)$ para toda función derivable f.

6. Si $s = -16t^2 + v_0 t$ da la altura en el instante t de una pelota lanzada directamente hacia arriba desde la superficie de la Tierra, entonces la pelota llegará al suelo con velocidad $-v_0$.

7. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + a_{i-1}) = a_0 + a_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_i.$

8. $\sum_{i=1}^{100}(2i - 1) = 10{,}000.$

9. Si $\sum_{i=1}^{10} a_i^2 = 100$ y $\sum_{i=1}^{10} a_i = 20$, entonces $\sum_{i=1}^{10}(a_i + 1)^2 = 150.$

10. Si f está acotada en $[a, b]$, entonces f es integrable allí.

11. $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

12. Si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$.

13. Si $\int_a^b [f(x)]^2\,dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$.

14. Si $a > x$ y $G(x) = \int_a^x f(z)\,dz$, entonces $G'(x) = -f(x)$.

15. El valor de $\int_x^{x+2\pi}(\text{sen } t + \cos t)\,dt$ es independiente de x.

16. El operador lím es lineal.

17. $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^{13} x\,dx = 0.$

18. $\int_1^5 \text{sen}^2 x\,dx = \int_1^7 \text{sen}^2 x\,dx + \int_7^5 \text{sen}^2 x\,dx.$

19. Si f es continua y positiva en todas partes, entonces $\int_c^d f(x)\,dx$ es positiva.

20. $D_x\left[\int_0^{x^2} \frac{1}{1+t^2}\,dt\right] = \frac{1}{1+x^4}.$

21. $\int_0^{2\pi} |\text{sen } x|\,dx = \int_0^{2\pi} |\cos x|\,dx.$

22. $\int_0^{2\pi} |\text{sen } x|\,dx = 4\int_0^{\pi/2} \text{sen } x\,dx.$

23. La antiderivada de funciones impares son funciones pares.

24. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces $F(5x)$ es una antiderivada de $f(5x)$.

25. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces $F(2x + 1)$ es una antiderivada de $f(2x + 1)$.

26. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces $F(x) + 1$ es una antiderivada de $f(x) + 1$.

27. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces

$$\int f(v(x))\,dx = F(v(x)) + C$$

28. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces

$$\int f^2(x)\,dx = \tfrac{1}{3}F^3(x) + C$$

29. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces

$$\int f(x)\frac{df}{dx}dx = \tfrac{1}{2}F^2(x) + C$$

30. Si $f(x) = 4$ en $[0, 3]$, entonces toda suma de Riemann para f en el intervalo dado tiene el valor 12.

31. Si $F'(x) = G'(x)$ para toda x en $[a, b]$, entonces $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

32. Si $f(x) = f(-x)$ para toda x en $[-a, a]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

33. Si $\bar{z} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} z(t)\,dt$, entonces $z(t) - \bar{z}$ es una función impar para $-1 \le t \le 1$.

34. Si $F'(x) = f(x)$ para toda x en $[0, b]$, entonces $\int_0^b f(x)\,dx = F(b)$.

35. $\int_{-99}^{99}(ax^3 + bx^2 + cx)\,dx = 2\int_0^{99} bx^2\,dx.$

36. Si $f(x) \le g(x)$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b |g(x)|\,dx$.

37. Si $f(x) \le g(x)$ en $[a, b]$, entonces $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \left|\int_a^b g(x)\,dx\right|$.

38. $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$

39. Si f es continua en $[a, b]$, entonces $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

40. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \text{sen}\left(\frac{2i}{n}\right)\cdot\frac{2}{n} = \int_0^2 \text{sen } x\,dx.$

41. Si $\|P\| \to 0$, entonces el número de subintervalos en la partición tiende a ∞.

42. Siempre podemos expresar la integral indefinida de una función elemental en términos de funciones elementales.

43. Para una función creciente, la suma de Riemann del punto izquierdo siempre será menor que la suma de Riemann del punto derecho.

44. Para una función lineal $f(x)$, la suma de Riemann del punto medio siempre dará el valor exacto de $\int_a^b f(x)\,dx$, sin importar el valor de n.

45. La regla del trapecio con $n = 10$ dará una estimación para $\int_0^5 x^3\,dx$ que es menor al valor verdadero.

46. La regla de la parábola con $n = 10$ dará el valor exacto de $\int_0^5 x^3\,dx$.

Problemas de examen

En los problemas del 1 al 12 evalúe las integrales que se indican.

1. $\int_0^1 \left(x^3 - 3x^2 + 3\sqrt{x}\right)dx$

2. $\int_1^2 \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{x^2}dx$

3. $\int_1^{\pi} \frac{y^3 - 9y\,\text{sen } y + 26y^{-1}}{y}dy$

4. $\int_4^9 y\sqrt{y^2 - 4}\,dy$

5. $\int_2^8 z(2z^2 - 3)^{1/3}\,dz$

6. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,\text{sen } x\,dx$

7. $\int_0^{\pi}(x + 1)\tan^2(3x^2 + 6x)\sec^2(3x^2 + 6x)\,dx$

8. $\int_0^2 \frac{t^3}{\sqrt{t^4 + 9}}dt$

9. $\int_1^2 t^4(t^5 + 5)^{2/3}\,dt$

10. $\displaystyle\int_2^3 \frac{y^2-1}{(y^3-3y)^2}\,dy$

11. $\displaystyle\int (x+1)\operatorname{sen}(x^2+2x+3)\,dx$

12. $\displaystyle\int_1^5 \frac{(y^2+y+1)}{\sqrt[5]{2y^3+3y^2+6y}}\,dy$

13. Sea P una partición regular del intervalo $[0, 2]$ en cuatro subintervalos iguales, y sea $f(x) = x^2 - 1$. Escriba la suma de Riemann para f sobre P, en la que $\bar{x}_i$ es el extremo de la derecha de cada subintervalo de P, $i = 1, 2, 3, 4$. Determine el valor de esta suma de Riemann y bosqueje la gráfica.

14. Si $f(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} \frac{1}{t+3}\,dt$, $-2 \le x$, encuentre $f'(7)$.

15. Evalúe $\displaystyle\int_0^3 \left(2-\sqrt{x+1}\right)^2 dx$.

16. Si $f(x) = 3x^2\sqrt{x^3-4}$, encuentre el valor promedio de f en $[2, 5]$.

17. Evalúe $\displaystyle\int_2^4 \frac{5x^2-1}{x^2}\,dx$.

18. Evalúe $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3^i - 3^{i-1})$.

19. Evalúe $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}(6i^2 - 8i)$.

20. Evalúe cada suma.

(a) $\displaystyle\sum_{m=2}^{4}\left(\frac{1}{m}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6}(2-i)$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)$

21. Escriba en notación sigma

(a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{78}$

(b) $x^2+2x^4+3x^6+4x^8+\cdots+50x^{100}$

22. Haga un bosquejo de la región bajo la curva $y = 16 - x^2$ entre $x = 0$ y $x = 3$, muestre el polígono inscrito correspondiente a una partición regular de $[0, 3]$ en n subintervalos. Encuentre una fórmula para el área de este polígono y después encuentre el área debajo de la curva tomando un límite.

23. If $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 4$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 2$, y $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx = -3$, evalúe cada integral.

(a) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^0 f(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^2 3f(u)\,du$ (d) $\displaystyle\int_0^2 [2g(x)-3f(x)]\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{-2} f(-x)\,dx$

24. Evalúe cada integral.

(a) $\displaystyle\int_0^4 |x-1|\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^4 [\![x]\!]\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^4 (x-[\![x]\!])\,dx$

Sugerencia: primero bosqueje una gráfica en las partes (a) y (b).

25. Suponga que $f(x) = f(-x)$, $f(x) \le 0$, $g(-x) = -g(x)$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = -4$, y $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx = 5$. Evalúe cada integral

(a) $\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^2 |f(x)|\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^2 g(x)\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{-2}^2 [f(x)+f(-x)]\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^2 [2g(x)+3f(x)]\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-2}^0 g(x)\,dx$

26. Evalúe $\displaystyle\int_{-100}^{100}(x^3+\operatorname{sen}^5 x)\,dx$.

27. Encuentre c, del teorema del valor medio para integrales, para $f(x) = 3x^2$ en $[-4, -1]$.

28. Encuentre $G'(x)$ para cada función G.

(a) $G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$

(b) $G(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{1}{t^2+1}\,dt$

(c) $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^3} \frac{1}{t^2+1}\,dt$

29. Encuentre $G'(x)$ para cada función G.

(a) $G(x) = \displaystyle\int_1^x \operatorname{sen}^2 z\,dz$

(b) $G(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(z)\,dz$

(c) $G(x) = \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x f(z)\,dz$

(d) $G(x) = \displaystyle\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du$

(e) $G(x) = \displaystyle\int_0^{g(x)}\left(\frac{d}{du}g(u)\right)du$

(f) $G(x) = \displaystyle\int_0^{-x} f(-t)\,dt$

30. Evalúe cada uno de los siguientes límites, reconociéndolos como una integral definida.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{4i}{n}}\cdot\frac{4}{n}$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2\frac{2}{n}$

31. Demuestre que si $f(x) = \displaystyle\int_{2x}^{5x}\frac{1}{t}\,dt$, entonces f es una función constante en $(0, \infty)$.

32. Aproxime $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1+x^4}\,dx$ utilizando las sumas de Riemann del punto izquierdo, del punto derecho y del punto medio, con $n = 8$.

33. Aproxime $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1+x^4}\,dx$ utilizando la regla del trapecio, con $n = 8$, y proporcione una cota superior para el valor absoluto del error.

34. Aproxime $\int_0^4 \frac{1}{1+2x}\,dx$ mediante la regla de la parábola, con $n = 8$, y proporcione una cota superior para el valor absoluto del error.

35. ¿Qué tan grande debe ser n, en la regla del trapecio, para aproximar $\int_1^2 \frac{1}{1+x^4}\,dx$ con un error no mayor que 0.0001?

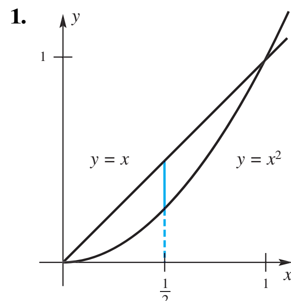
36. ¿Qué tan grande debe ser n, en la regla de la parábola, para aproximar $\int_0^4 \frac{1}{1+2x}\,dx$ con un error no mayor que 0.0001?

37. Sin realizar cálculo alguno, clasifique de menor a mayor las aproximaciones de $\int_1^6 \frac{1}{x}\,dx$ por los métodos siguientes: suma de Riemann del punto izquierdo, suma de Riemann del punto medio, regla del trapecio.

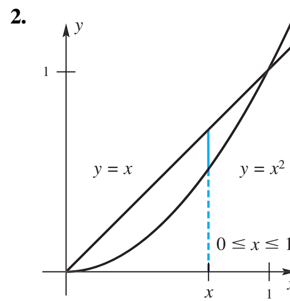
PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

En los problemas del 1 al 6 determine la longitud de la línea continua gris.

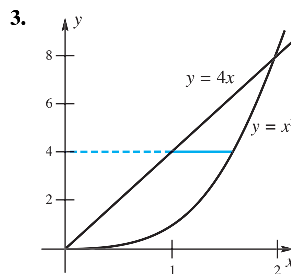
1.



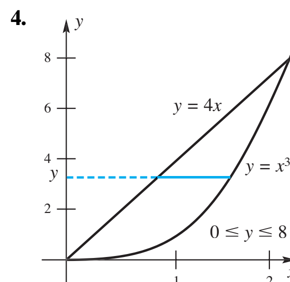
2.



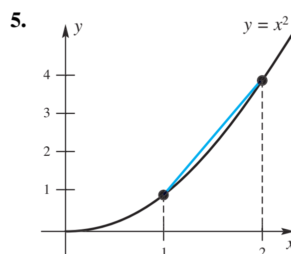
3.



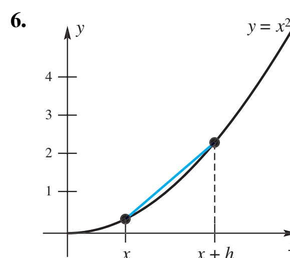
4.



5.

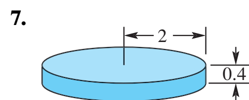


6.

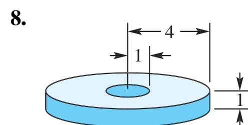


Para cada una de las siguientes figuras, el volumen del sólido es igual al área de la base por la altura. Proporcione el volumen de cada uno de estos sólidos.

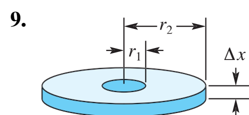
7.



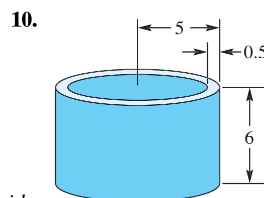
8.



9.



10.



Evalúe cada una de las siguientes integrales definidas.

11. $\int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^3 + 2)\, dx$

12. $\int_{0}^{3} y^{2/3}\, dy$

13. $\int_{0}^{2} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}\right) dx$

14. $\int_{1}^{4} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$

CAPÍTULO 5

Aplicaciones de la integral

5.1 El área de una región plana

El breve estudio de áreas en la sección 4.1 sirvió para motivar la definición de la integral definida. Ahora, con la última noción firmemente establecida, utilizamos la integral definida para calcular áreas de formas cada vez más complejas. Como es nuestra costumbre, iniciamos con casos sencillos.

Una región por arriba del eje x Supóngase que $y = f(x)$ determina una curva en el plano xy y supóngase que f es continua y no negativa en el intervalo $a \le x \le b$ (como en la figura 1). Considérese la región R acotada por las gráficas de $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ y $y = 0$. Nos referiremos a R como la región bajo $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$. Su área $A(R)$ está dada por

$$A(R) = \int_a^b f(x)\,dx$$

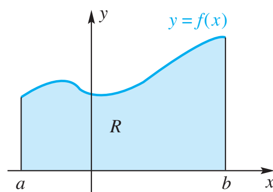


Figura 1

EJEMPLO 1 Encuentre el área de la región R bajo $y = x^4 - 2x^3 + 2$ entre $x = -1$ y $x = 2$.

SOLUCIÓN La gráfica de R se muestra en la figura 2. Una estimación razonable para el área de R es su base por una altura promedio, digamos $(3)(2) = 6$. El valor exacto es

$$A(R) = \int_{-1}^{2}(x^4 - 2x^3 + 2)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{51}{10} = 5.1$$

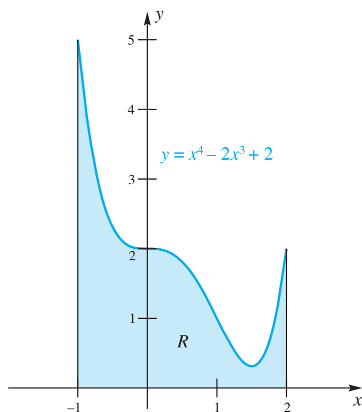


Figura 2

El valor calculado de 5.1 es suficientemente cercano a nuestra estimación, 6, para darnos confianza de su validez. ■

Una región debajo del eje x El área es un número no negativo. Si la gráfica de $y = f(x)$ está por debajo del eje x, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ es un número negativo y, por lo tanto, no puede ser un área. Sin embargo, sólo es el negativo del área de la región acotada por $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ y $y = 0$.

EJEMPLO 2 Encuentre el área de la región R acotada por $y = x^2/3 - 4$, el eje x, $x = -2$ y $x = 3$.

SOLUCIÓN La región R se muestra en la figura 3. Nuestra estimación preliminar para su área es $(5)(3) = 15$. El valor exacto es

$$A(R) = -\int_{-2}^{3}\left(\frac{x^2}{3} - 4\right)dx = \int_{-2}^{3}\left(-\frac{x^2}{3} + 4\right)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{9} + 4x\right]_{-2}^{3} = \left(-\frac{27}{9} + 12\right) - \left(\frac{8}{9} - 8\right) = \frac{145}{9} \approx 16.11$$

Estamos tranquilos por la cercanía de 16.11 a nuestra estimación. ■

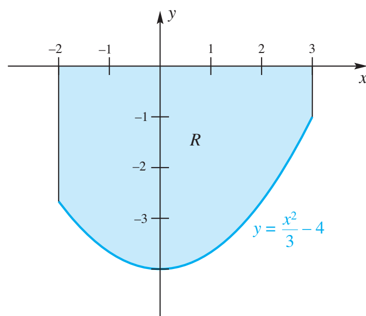


Figura 3

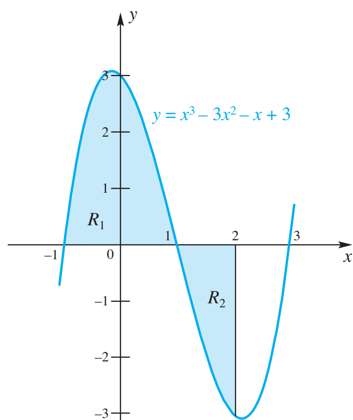


Figura 4

EJEMPLO 3 Encuentre el área de la región R acotada por $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$, el segmento del eje x entre $x = -1$ y $x = 2$, y la recta $x = 2$.

SOLUCIÓN La región R está sombreada en la figura 4. Observe que una parte de ella está arriba del eje x y otra está debajo. Las áreas de estas dos partes, R_1 y R_2, deben calcularse por separado. Puede verificar que la curva cruza el eje x en -1, 1 y 3. Así que

$$\begin{aligned} A(R) &= A(R_1) + A(R_2) \\ &= \int_{-1}^{1}(x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx - \int_{1}^{2}(x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{2} \\ &= 4 - \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{23}{4} \end{aligned}$$

Note que podríamos haber escrito esta área como una integral utilizando el símbolo de valor absoluto.

$$A(R) = \int_{-1}^{2}|x^3 - 3x^2 - x + 3|\,dx$$

pero ésta no es una simplificación real, ya que para evaluar esta integral tendríamos que separarla en dos partes, justo como lo hicimos antes. ■

Una manera útil de pensar Para regiones sencillas del tipo considerado anteriormente, es muy fácil escribir la integral correcta. Cuando consideremos regiones más complicadas (por ejemplo, regiones entre dos curvas), la tarea de seleccionar la integral correcta es más difícil. Sin embargo, hay una manera de pensar que puede ser muy útil. Regrese a la definición de área y de integral definida. Aquí está en cinco pasos.

Paso 1: Bosqueje la región.

Paso 2: Córtela en pedazos delgados (tiras); marque una pieza representativa.

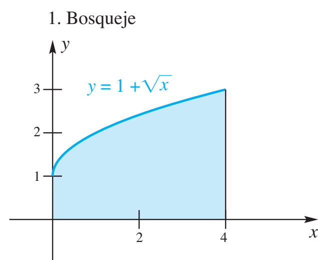
Paso 3: Aproxime el área de esta pieza representativa como si fuese un rectángulo.

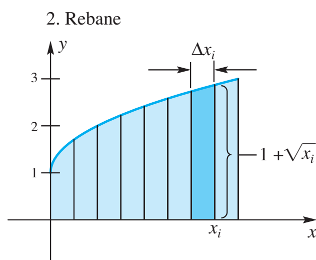
Paso 4: Sume las aproximaciones a las áreas de las piezas.

Paso 5: Tome el límite cuando el ancho de las piezas se aproxima a cero, obteniendo así una integral definida.

Para ilustrar, consideramos otro ejemplo, aún sencillo.

EJEMPLO 4 Formule la integral para el área de la región bajo $y = 1 + \sqrt{x}$ entre $x = 0$ y $x = 4$ (véase la figura 5).





3. Aproxime el área de una pieza representativa:

$\Delta A_i \approx (1 + \sqrt{x_i})\,\Delta x_i$

4. Sume: $A \approx \sum_{i=1}^{n}(1 + \sqrt{x_i})\,\Delta x_i$

5. Tome el límite: $A = \int_0^4 (1 + \sqrt{x})\,dx$

Figura 5

SOLUCIÓN Una vez comprendido este procedimiento de cinco pasos, podemos reducirlo a tres: *rebane, aproxime* e *integre*. Considere la palabra *integre* como la incorporación de dos pasos: (1) sumar las áreas de las piezas y (2) tomar el límite cuando el ancho de las piezas tiende a cero. En este proceso $\Sigma \ldots \Delta x$ se transforma en $\int \ldots dx$ cuando tomamos el límite. La figura 6 proporciona la forma abreviada para el mismo problema.

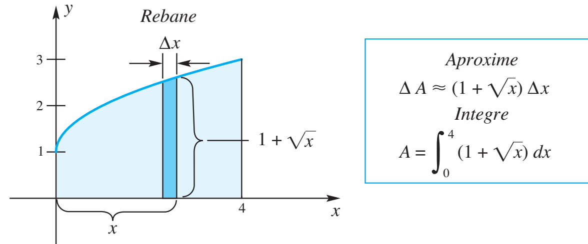


Figura 6

Una región entre dos curvas Considere las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ con $g(x) \leq f(x)$ en $a \leq x \leq b$. Ellas determinan la región que se muestra en la figura 7. Utilizamos el método *rebane, aproxime, integre* para encontrar su área. Asegúrese de notar que $f(x) - g(x)$ da la altura correcta para la tira delgada, aun cuando la gráfica de g está por debajo del eje x. En este caso, $g(x)$ es negativa; de modo que restar $g(x)$ es lo mismo que sumar un número positivo. Puede verificar que $f(x) - g(x)$ también da la altura correcta, incluso cuando $f(x)$ y $g(x)$ son negativas.

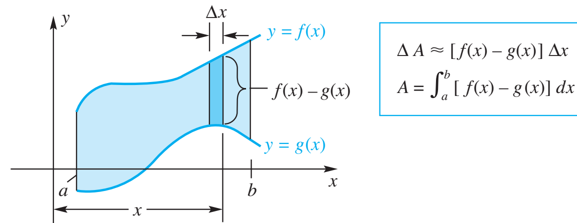


Figura 7

EJEMPLO 5 Encuentre el área de la región entre las curvas $y = x^4$ y $y = 2x - x^2$.

SOLUCIÓN Empezamos por encontrar en dónde se intersecan las dos curvas. Para hacer esto, necesitamos resolver $2x - x^2 = x^4$, una ecuación de cuarto grado, la cual por lo regular es difícil de resolver. No obstante, en este caso $x = 0$ y $x = 1$ son soluciones obvias. Nuestro bosquejo de la región, junto con la aproximación apropiada y la integral correspondiente, se muestra en la figura 8.

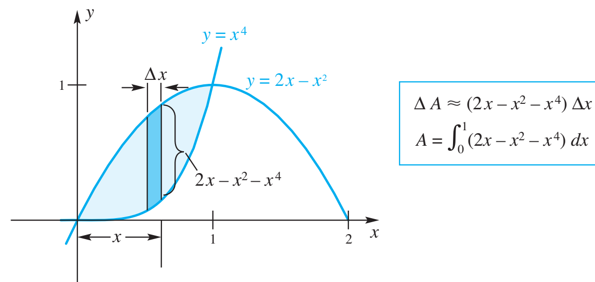


Figura 8

Queda una tarea: evaluar la integral.

$$\int_0^1 (2x - x^2 - x^4)\,dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$$ ■

EJEMPLO 6 **Rebanadas horizontales** Encuentre el área de la región entre la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $4x - 3y = 4$.

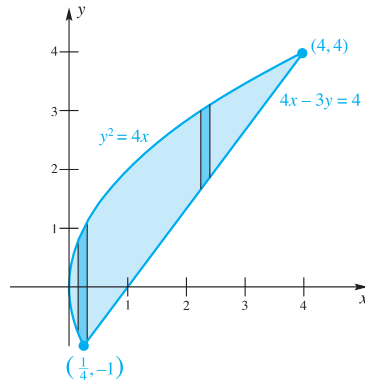


Figura 9

SOLUCIÓN Necesitaremos los puntos de intersección de estas dos curvas. Las ordenadas de estos puntos pueden determinarse escribiendo la segunda ecuación como $4x = 3y + 4$ y luego igualando las dos expresiones para $4x$.

$$\begin{aligned} y^2 &= 3y + 4 \\ y^2 - 3y - 4 &= 0 \\ (y - 4)(y + 1) &= 0 \\ y &= 4, -1 \end{aligned}$$

Cuando $y = 4$, $x = 4$ y cuando $y = -1$, $x = \frac{1}{4}$, concluimos que los puntos de intersección son $(4, 4)$ y $\left(\frac{1}{4}, -1\right)$. La región entre las curvas se muestra en la figura 9.

Ahora imagine que se rebana esta región de forma vertical. Nos enfrentamos a un problema, ya que la frontera inferior consiste en dos curvas diferentes. Las rebanadas en el extremo izquierdo van de la rama inferior de la parábola a su rama superior. Para el resto de la región, las rebanadas se extienden desde la recta hasta la parábola. Para resolver el problema con rebanadas verticales se requiere que primero dividamos nuestra región en dos partes, configurando una integral para cada parte y evaluando ambas integrales.

Un enfoque más apropiado es rebanar la región de manera horizontal, como se muestra en la figura 10, y por eso usamos como variable de integración a y en lugar de x. Observe que las rebanadas horizontales siempre van de la parábola (a la izquierda) a la recta (a la derecha). La longitud de tal rebanada es el valor más grande de $\left(x = \frac{1}{4}(3y + 4)\right)$ menos el valor más pequeño de $\left(x = \frac{1}{4}y^2\right)$.

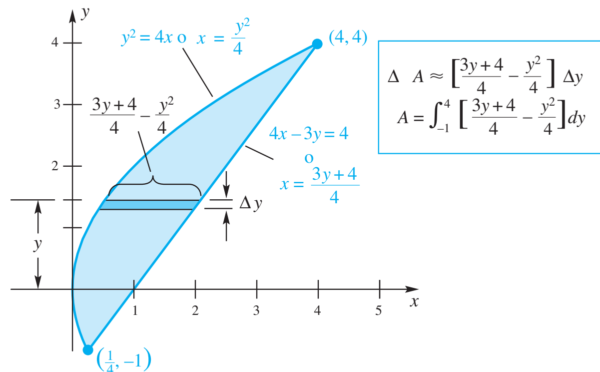


Figura 10

$$\begin{aligned} A = \int_{-1}^{4}\left[\frac{3y + 4 - y^2}{4}\right]dy &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{4}(3y + 4 - y^2)\,dy \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{3y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{4} \\ &= \frac{1}{4}\left[\left(24 + 16 - \frac{64}{3}\right) - \left(\frac{3}{2} - 4 + \frac{1}{3}\right)\right] \\ &= \frac{125}{24} \approx 5.21 \end{aligned}$$

Hay dos puntos a observar: (1) El integrando que resulta de las rebanadas horizontales incluye a y, no a x; (2) para obtener el integrando, se despeja x de ambas ecuaciones y se resta el valor más pequeño de x del mayor. ■

Distancia y desplazamiento Considere un objeto que se mueve a lo largo de una recta con velocidad $v(t)$ en el instante t. Si $v(t) \geq 0$, entonces $\int_a^b v(t)\, dt$ proporciona la distancia recorrida durante el intervalo de tiempo $a \leq t \leq b$. Sin embargo, si algunas veces $v(t)$ es negativa (que corresponde a que el objeto se mueva en sentido inverso), entonces

$$\int_a^b v(t)\, dt = s(b) - s(a)$$

mide el **desplazamiento** del objeto, esto es, la distancia dirigida desde su posición inicial $s(a)$ hasta su posición final $s(b)$. Para obtener la **distancia total** que el objeto recorrió durante $a \leq t \leq b$, debemos calcular $\int_a^b |v(t)|\, dt$, el área entre la curva de la velocidad y el eje t.

EJEMPLO 7 Un objeto se encuentra en la posición $s = 3$ en el instante $t = 0$. Su velocidad en el instante t es $v(t) = 5 \text{ sen } 6\pi t$. ¿Cuál es la posición del objeto en el instante $t = 2$ y cuánto recorrió durante este tiempo?

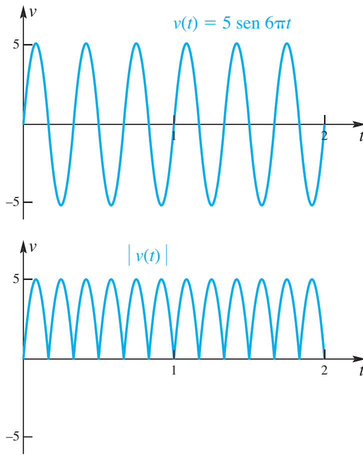


Figura 11

SOLUCIÓN El desplazamiento del objeto, esto es, el cambio en su posición, es

$$s(2) - s(0) = \int_0^2 v(t)\, dt = \int_0^2 5 \text{ sen } 6\pi t\, dt = \left[-\frac{5}{6\pi}\cos 6\pi t\right]_0^2 = 0$$

Por lo tanto, $s(2) = s(0) + 0 = 3 + 0 = 3$. El objeto se encuentra en la posición 3, en el instante $t = 2$. La distancia total recorrida es

$$\int_0^2 |v(t)|\, dt = \int_0^2 |5 \text{ sen } 6\pi t|\, dt$$

Para realizar esta integración hacemos uso de la simetría (véase la figura 11). Así que

$$\int_0^2 |v(t)|\, dt = 12\int_0^{2/12} 5 \text{ sen } 6\pi t\, dt = 60\left[-\frac{1}{6\pi}\cos 6\pi t\right]_0^{1/6} = \frac{20}{\pi} \approx 6.3662$$ ■

Revisión de conceptos

1. Sea R la región entre la curva $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a, b]$. Si $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces $A(R) =$ _____, pero si $f(x) \leq 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces $A(R) =$ ______.

2. Para determinar el área de la región entre dos curvas, es bueno recordar la siguiente frase de tres palabras: ______.

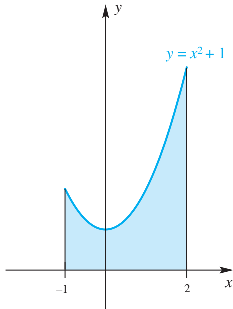
3. Suponga que las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ acotan a una región R en la que $f(x) \leq g(x)$. Entonces el área de R está dada por $A(R) = \int_a^b$ ________dx, donde a y b se determinan resolviendo la ecuación ________.

4. Si $p(y) \leq q(y)$ para toda y en $[c, d]$, entonces el área $A(R)$ de la región R acotada por las curvas $x = p(y)$ y $x = q(y)$ entre $y = c$ y $y = d$ está dada por $A(R) =$ ______.

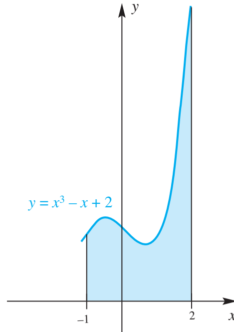
Conjunto de problemas 5.1

En los problemas del 1 al 10 utilice el procedimiento de tres pasos (rebanar, aproximar, integrar) para configurar y evaluar una integral (o integrales) para el área de la región que se indica.

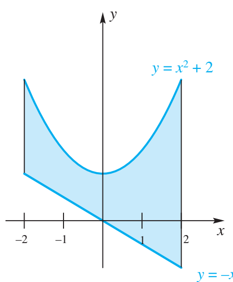
1.



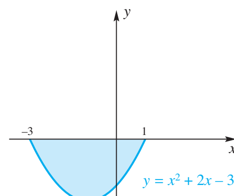
2.



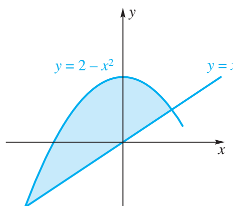
3.



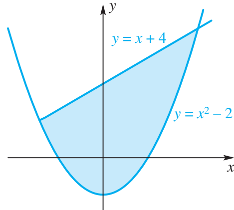
4.



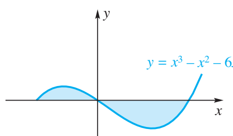
5.



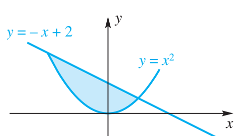
6.



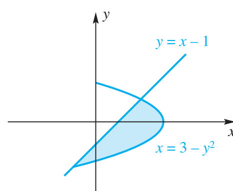
7.



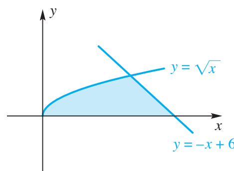
8.



9.



10.



≈ *En los problemas del 11 al 28 dibuje la región acotada por las gráficas de las ecuaciones que se dan, muestre una rebanada representativa, aproxime su área, formule una integral y calcule el área de la región. Haga una estimación del área para confirmar su respuesta.*

11. $y = 3 - \frac{1}{3}x^2$, $y = 0$, entre $x = 0$ y $x = 3$

12. $y = 5x - x^2$, $y = 0$, entre $x = 1$ y $x = 3$

13. $y = (x - 4)(x + 2)$, $y = 0$, entre $x = 0$ y $x = 3$

14. $y = x^2 - 4x - 5$, $y = 0$, entre $x = -1$ y $x = 4$

15. $y = \frac{1}{4}(x^2 - 7)$, $y = 0$, entre $x = 0$ y $x = 2$

16. $y = x^3$, $y = 0$, entre $x = -3$ y $x = 3$

17. $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, entre $x = -2$ y $x = 2$

18. $y = \sqrt{x} - 10$, $y = 0$, entre $x = 0$ y $x = 9$

19. $y = (x - 3)(x - 1)$, $y = x$

20. $y = \sqrt{x}$, $y = x - 4$, $x = 0$

21. $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2$

22. $y = x^2 - 9$, $y = (2x - 1)(x + 3)$

23. $x = 8y - y^2$, $x = 0$

24. $x = (3 - y)(y + 1)$, $x = 0$

25. $x = -6y^2 + 4y$, $x + 3y - 2 = 0$

26. $x = y^2 - 2y$, $x - y - 4 = 0$

27. $4y^2 - 2x = 0$, $4y^2 + 4x - 12 = 0$

28. $x = 4y^4$, $x = 8 - 4y^4$

29. Haga un bosquejo de la región R acotada por $y = x + 6$, $y = x^3$ y $2y + x = 0$. Después encuentre su área. *Sugerencia:* divida R en dos partes.

30. Por medio de integración, encuentre el área del triángulo con vértices en $(-1, 4)$, $(2, -2)$ y $(5, 1)$.

31. Un objeto se mueve a lo largo de una recta, de modo que su velocidad en el instante t es $v(t) = 3t^2 - 24t + 36$ pies por segundo. Encuentre el desplazamiento y la distancia total que recorre el objeto para $-1 \le t \le 9$.

32. Siga las instrucciones del problema 31, si $v(t) = \frac{1}{2} + \operatorname{sen} 2t$ y el intervalo es $0 \le t \le 3\pi/2$.

33. Iniciando en $s = 0$ cuando $t = 0$, un objeto se mueve a lo largo de una recta de modo que su velocidad en el instante t es $v(t) = 2t - 4$ centímetros por segundo. ¿Cuánto tiempo le toma llegar a $s = 12$? ¿Cuánto tiempo le toma recorrer una distancia total de 12 centímetros?

34. Considere la curva $y = 1/x^2$ para $1 \le x \le 6$.

(a) Calcule el área debajo de esta curva.

(b) Determine c de modo que la recta $x = c$ biseque el área de la parte (a).

(c) Determine d de modo que la recta $y = d$ biseque el área de la parte (a).

35. Calcule las áreas A, B, C y D en la figura 12. Verifique calculando $A + B + C + D$ en una sola integración.

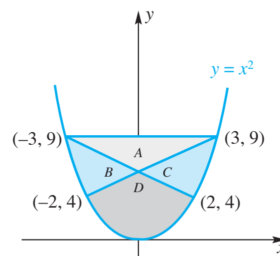


Figura 12

36. Demuestre el principio de Cavalieri. (Bonaventura Cavalieri —1598-1647— desarrolló este principio en 1635). Si dos regiones tienen la misma altura en cada x en $[a, b]$, entonces tienen la misma área (véase la figura 13).

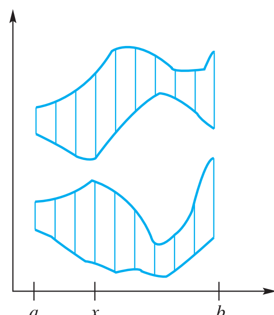


Figura 13

37. Utilice el principio de Cavalieri (no integre; vea el problema 36) para demostrar que las regiones sombreadas en la figura 14 tienen la misma área.

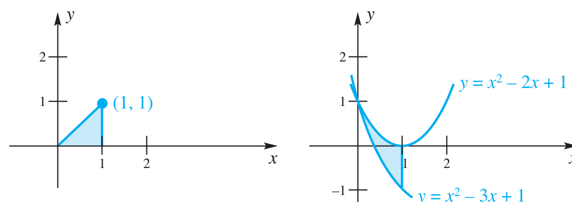


Figura 14

38. Encuentre el área de la región encerrada entre $y = \text{sen } x$ y $y = \frac{1}{2}, 0 \leq x \leq 17\pi/6$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\int_a^b f(x)\,dx; -\int_a^b f(x)\,dx$ **2.** rebane, aproxime, integre. **3.** $[g(x) - f(x)]; f(x) = g(x)$ **4.** $\int_c^d [q(y) - p(y)]\,dy$

5.2 Volúmenes de sólidos: capas, discos, arandelas

No es sorprendente que la integral definida pueda utilizarse para calcular *áreas*; se inventó para ese propósito. Pero los usos de la integral van mucho más allá de esa aplicación. Muchas cantidades pueden considerarse como el resultado de rebanar algo en pequeños pedazos, aproximar cada pedazo, sumarlos y tomar el límite cuando los pedazos disminuyen su tamaño. Este método de rebanar, aproximar e integrar puede utilizarse para encontrar los *volúmenes* de sólidos, siempre y cuando el volumen de cada pedazo sea fácil de aproximar.

¿Qué es el volumen? Comenzamos con sólidos sencillos denominados *cilindros rectos* cuatro de los cuales se muestran en la figura 1. En cada caso el sólido se genera moviendo una región plana (la base) a lo largo de una distancia h en dirección perpendicular a esa región. Y en cada caso el volumen del sólido se define como el área A de la base por la altura h; esto es,

$$V = A \cdot h$$

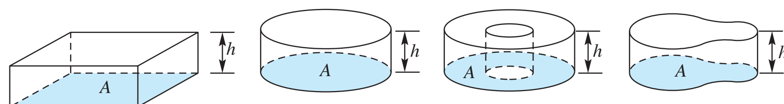
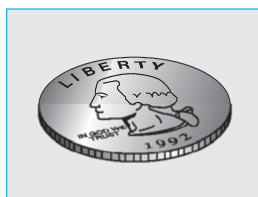


Figura 1

El volumen de una moneda

Considere una moneda ordinaria, digamos, de 25 centavos de dólar.



Ésta tiene un radio de aproximadamente 1 centímetro y un grosor de casi 0.2 centímetros. Su volumen es el área de la base, $A = \pi(1^2)$ por el grosor $h = 0.2$; esto es

$$V = (1\pi)(0.2) \approx 0.63$$

centímetros cúbicos.

Ahora considere un sólido con la propiedad de que su sección transversal perpendicular a una recta dada tiene área conocida. En particular, supóngase que la recta es el eje x y que el área de la sección transversal en x es $A(x)$, $a \leq x \leq b$ (véase la figura 2). Dividimos el intervalo $[a, b]$ insertando los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Después, a través de estos puntos, pasamos planos perpendiculares al eje x, con lo que rebanamos el sólido en **capas** delgadas o rebanadas (véase la figura 3). El *volumen* ΔV_i de una rebanada debe ser aproximadamente el volumen de un cilindro; esto es,

$$\Delta V_i \approx A(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$

(Recuérdese que $\overline{x}_i$, denominado *punto muestra*, es cualquier número en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$).

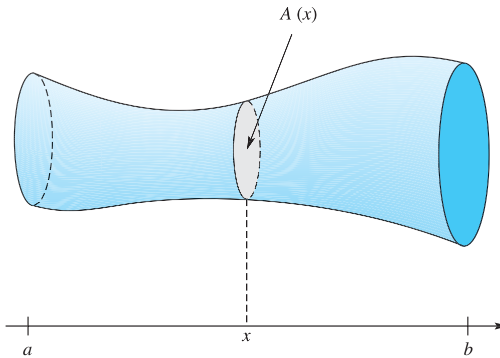


Figura 2

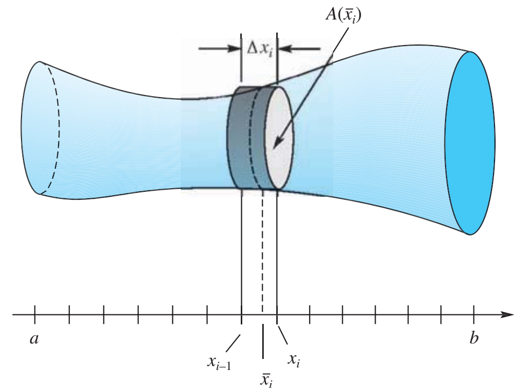


Figura 3

El "volumen" V del sólido debe estar dado, de manera aproximada, por la suma de Riemann.

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(\overline{x}_i)\,\Delta x_i$$

Cuando hacemos que la norma de la partición tienda a cero, obtenemos una integral definida; ésta se define como el **volumen** del sólido.

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

En lugar de aplicar de manera mecánica la fórmula en el recuadro para obtener volúmenes, le sugerimos que en cada problema vaya a través del proceso que conduce a ella. Al igual que para áreas, llamamos a este proceso *rebane, aproxime, integre*. Se ilustra en los siguientes ejemplos.

Sólidos de revolución: Método de los discos Cuando una región plana está por completo en un lado de una recta fija en su plano y se hace girar alrededor de esa recta, genera un **sólido de revolución**. La recta fija se denomina **eje** del sólido de revolución.

A manera de ilustración, si la región acotada por un semicírculo y su diámetro se hace girar alrededor de ese diámetro, barre un sólido esférico (véase la figura 4). Si la región dentro de un triángulo rectángulo se hace girar alrededor de uno de sus catetos, genera un sólido cónico (véase la figura 5). Cuando una región circular se hace girar alrededor de una recta en su plano y que no interseque al círculo (véase la figura 6), barre un toro (dona). En cada caso es posible representar el volumen como una integral definida.

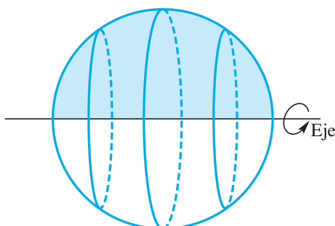


Figura 4

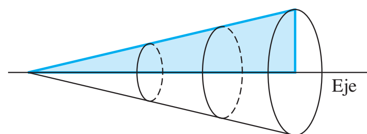


Figura 5

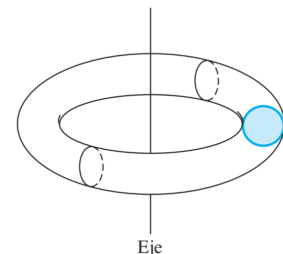


Figura 6

EJEMPLO 1 Encuentre el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje x la región plana R, acotada por $y = \sqrt{x}$, el eje x y la recta $x = 4$.

SOLUCIÓN La región R, con una rebanada representativa, se muestra como la parte de la izquierda de la figura 7. Cuando se hace girar en torno al eje x, esta región genera un sólido de revolución y la rebanada genera un disco, un objeto delgado en forma de moneda.

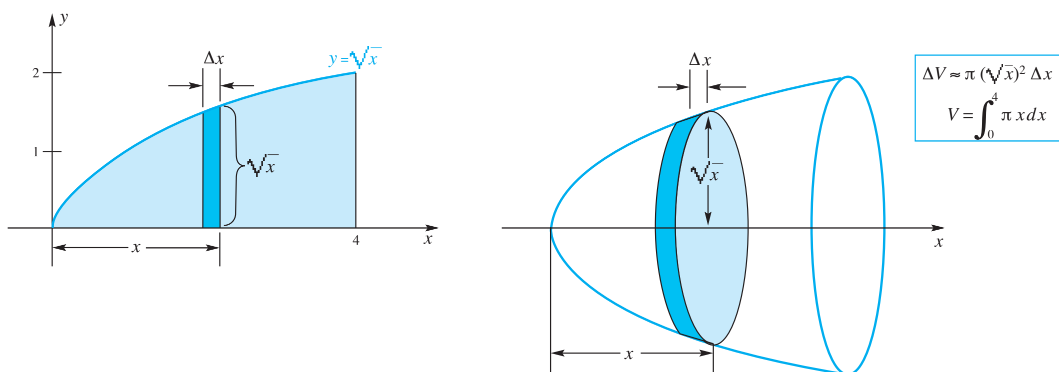


Figura 7

Al recordar que el volumen de un cilindro circular recto es $\pi r^2 h$, aproximamos el volumen ΔV de este disco con $\Delta V \approx \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 \Delta x$ y entonces integramos

$$V = \pi\int_0^4 x\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi\frac{16}{2} = 8\pi \approx 25.13$$

≈ ¿Es razonable esta respuesta? El cilindro circular recto que contiene al sólido tiene volumen $V = \pi 2^2 \cdot 4 = 16\pi$. La mitad de este número parece razonable. ■

EJEMPLO 2 Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la curva $y = x^3$, el eje y y la recta $y = 3$ en torno al eje y (véase la figura 8).

SOLUCIÓN Aquí rebanamos de manera horizontal, lo cual hace que y sea la elección como la variable de integración. Observe que $y = x^3$ es equivalente a $x = \sqrt[3]{y}$ y $\Delta V \approx \pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 \Delta y$.

Por lo tanto, el volumen es

$$V = \pi\int_0^3 y^{2/3}\,dy = \pi\left[\frac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^3 = \pi\frac{9\sqrt[3]{9}}{5} \approx 11.76$$

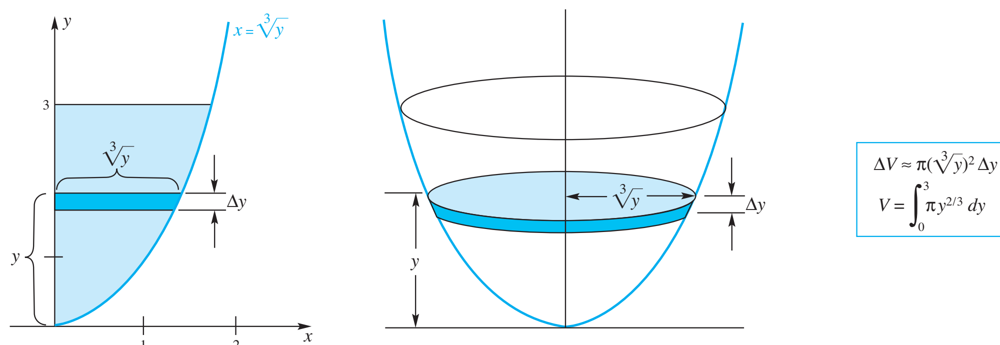


Figura 8

■

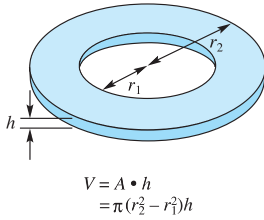


Figura 9

Método de las arandelas Algunas veces, al rebanar un sólido de revolución se obtienen discos con agujeros en medio. Les llamamos **arandelas**. Observe el diagrama y la fórmula de volumen que la acompaña, los cuales se muestran en la figura 9.

EJEMPLO 3 Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por las parábolas $y = x^2$ y $y^2 = 8x$ en torno al eje x.

SOLUCIÓN Las palabras clave siguen siendo *rebane, aproxime, integre* (véase la figura 10).

$$V = \pi \int_0^2 (8x - x^4)\, dx = \pi \left[\frac{8x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{48\pi}{5} \approx 30.16$$

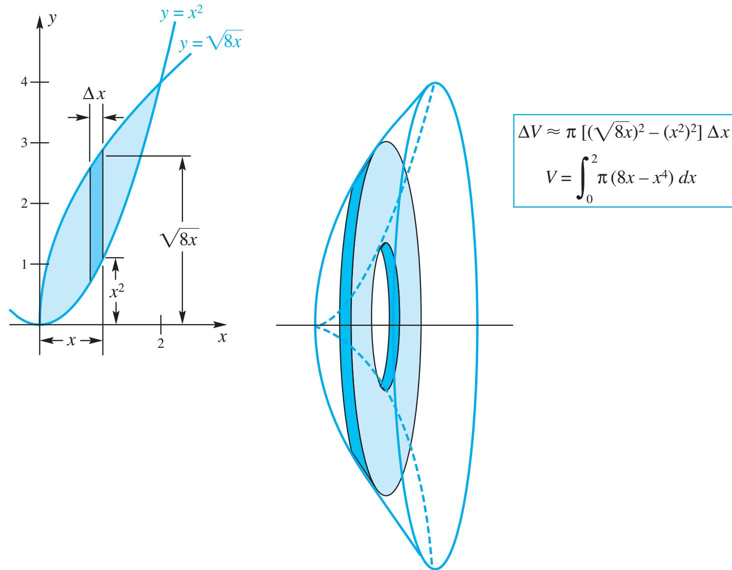


Figura 10

EJEMPLO 4 La región semicircular acotada por la curva $x = \sqrt{4 - y^2}$ y el eje y se hace girar alrededor de la recta $x = -1$. Configure la integral que representa su volumen.

SOLUCIÓN Aquí el radio exterior de la arandela es $1 + \sqrt{4 - y^2}$ y el radio interior es 1. La figura 11 muestra la solución. Se puede simplificar la integral. La parte que está por arriba del eje x tiene el mismo volumen que la parte por debajo de él (que se manifiesta por sí mismo en un integrando par). Por eso podemos integrar desde 0 hasta 2 y multiplicar el resultado por dos. También, el integrando se simplifica.

$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left[\left(1 + \sqrt{4 - y^2}\right)^2 - 1^2 \right] dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left[2\sqrt{4 - y^2} + 4 - y^2 \right] dy$$

Ahora, véase el problema 35 para considerar una forma de evaluar esta integral.

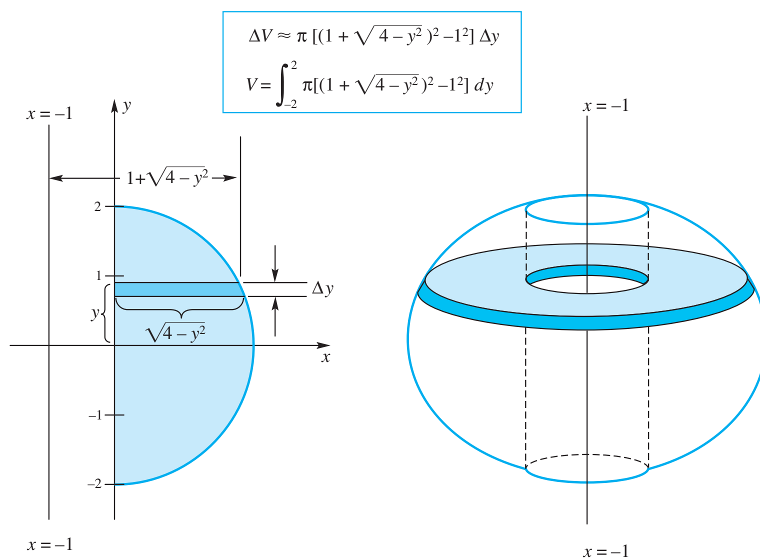


Figura 11 ■

Otros sólidos con secciones transversales conocidas Hasta ahora, nuestros sólidos habían tenido secciones transversales circulares. Sin embargo, el método de encontrar el volumen funciona también para sólidos cuyas secciones transversales son cuadrados o triángulos. En realidad, todo lo que se necesita es que las áreas de las secciones transversales puedan determinarse, ya que, en este caso, también podemos aproximar el volumen de la rebanada —una capa— con esta sección transversal. Entonces, el volumen se encuentra mediante integración.

EJEMPLO 5 Sea la base de un sólido la región plana en el primer cuadrante acotada por $y = 1 - x^2/4$, el eje x y el eje y. Supóngase que las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadrados. Encuentre el volumen del sólido.

SOLUCIÓN Cuando rebanamos este sólido de manera perpendicular al eje x, obtenemos las delgadas cajas cuadradas (véase la figura 12), como rebanadas de queso.

$$V = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{80}\right]_0^2$$

$$= 2 - \frac{8}{6} + \frac{32}{80} = \frac{16}{15} \approx 1.07$$

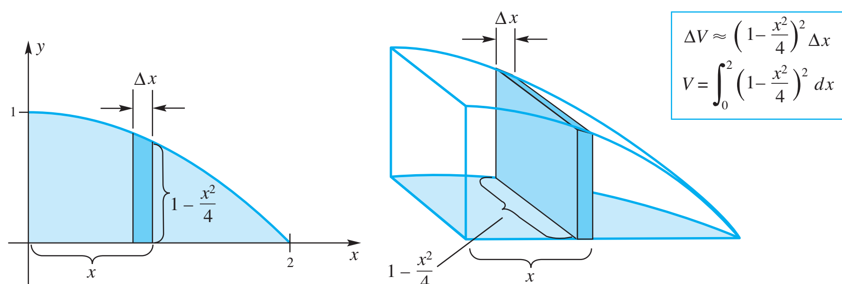


Figura 12 ■

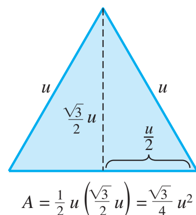


Figura 13

EJEMPLO 6 La base de un sólido es la región entre un arco de $y = \operatorname{sen} x$ y el eje x. Cada sección transversal perpendicular al eje x es un triángulo equilátero apoyado en esta base. Encuentre el volumen del sólido.

SOLUCIÓN Necesitamos el resultado de que el área de un triángulo equilátero de lado u es $\sqrt{3}\,u^2/4$ (véase la figura 13). Procedemos como se muestra en la figura 14.

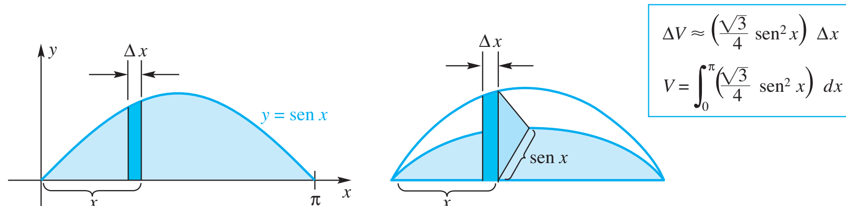


Figura 14

Para realizar la integración indicada, usamos la fórmula para el medio ángulo $\operatorname{sen}^2 x = (1 - \cos 2x)/2$.

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\int_0^{\pi} 1\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x \cdot 2\,dx\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\sqrt{3}}{8}\pi \approx 0.68$$

■

Revisión de conceptos

1. El volumen de un disco de radio r y grosor h es _____.

2. El volumen de una arandela con radio interno r, radio externo R y grosor h es _____.

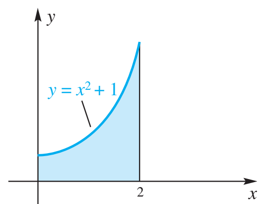
3. Si la región R, acotada por $y = x^2$, $y = 0$ y $x = 3$, se hace girar en torno al eje x, el disco en x tendrá un volumen $\Delta V \approx$ ______.

4. Si la región R de la pregunta 3 se hace girar en torno a la recta $y = -2$, la arandela en x tendrá volumen $\Delta V \approx$ ______.

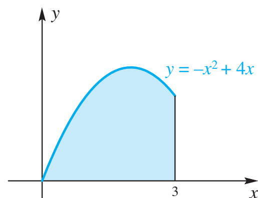
Conjunto de problemas 5.2

En los problemas del 1 al 4 encuentre el volumen del sólido generado cuando la región que se indica se hace girar alrededor del eje especificado; rebane, aproxime, integre.

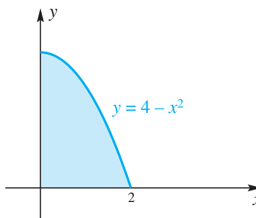
1. Eje x



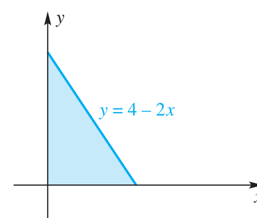
2. Eje x



3. (a) Eje x
(b) Eje y



4. (a) Eje x
(b) Eje y



≈ *En los problemas del 5 al 10 dibuje la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y muestre una rebanada vertical representativa. Después encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar R en torno al eje x.*

5. $y = \dfrac{x^2}{\pi}, x = 4, y = 0$

6. $y = x^3, x = 3, y = 0$

7. $y = \dfrac{1}{x}, x = 2, x = 4, y = 0$

8. $y = x^{3/2}, y = 0$, entre $x = 2$ y $x = 3$

9. $y = \sqrt{9 - x^2}, y = 0$, entre $x = -2$ y $x = 3$

10. $y = x^{2/3}, y = 0$, entre $x = 1$ y $x = 27$

≈ *En los problemas del 11 al 16 haga un dibujo de la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y muestre una rebanada horizontal representativa. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar R alrededor del eje y.*

11. $x = y^2, x = 0, y = 3$

12. $x = \dfrac{2}{y}, y = 2, y = 6, x = 0$

13. $x = 2\sqrt{y}, y = 4, x = 0$

14. $x = y^{2/3}, y = 27, x = 0$

15. $x = y^{3/2}, y = 9, x = 0$

16. $x = \sqrt{4 - y^2}, x = 0$

17. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar en torno al eje x la región acotada por la mitad superior de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y el eje x; de esta manera, encuentre el volumen de un *esferoide alargado.* Aquí a y b son constantes positivas, con $a > b$.

18. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno al eje x, la región acotada por la recta $y = 6x$ y la parábola $y = 6x^2$.

19. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno al eje x, la región acotada por la recta $x - 2y = 0$ y la parábola $y^2 = 4x$.

20. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno al eje x, la región en el primer cuadrante acotada por el círculo $x^2 + y^2 = r^2$, el eje x y la recta $x = r - h, 0 < h < r$, calculando así el volumen de un *casquete esférico* de altura h, de una esfera de radio r.

21. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno al eje y, la región acotada por la recta $y = 4x$ y la parábola $y = 4x^2$.

22. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, en torno a la recta $y = 2$, la región en el primer cuadrante acotada por las parábolas $3x^2 - 16y + 48 = 0$ y $x^2 - 16y + 80 = 0$ y el eje y.

23. La base de un sólido es la región interior del círculo $x^2 + y^2 = 4$. Encuentre el volumen del sólido si cada sección transversal a un plano perpendicular al eje x es un cuadrado. *Sugerencia:* véanse los ejemplos 5 y 6.

24. Resuelva el problema 23 suponiendo que cada sección transversal a un plano perpendicular al eje x es un triángulo isósceles con base en el plano xy y altura 4. *Sugerencia:* para completar la evaluación, interprete $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$ como el área de un semicírculo.

25. La base de un sólido está acotada por un arco de $y = \sqrt{\cos x}$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, y el eje x. Cada sección transversal perpendicular al eje x es un cuadrado apoyado en esta base. Encuentre el volumen del sólido.

26. La base de un sólido es la región acotada por $y = 1 - x^2$ y $y = 1 - x^4$. Las secciones transversales del sólido, que son perpendiculares al eje x, son cuadrados. Encuentre el volumen del sólido.

27. Encuentre el volumen de un octante (un octavo) de la región sólida común a dos cilindros circulares rectos de radio 1 cuyos ejes se intersecan en ángulos rectos. *Sugerencia:* las secciones transversales horizontales son cuadradas. Véase la figura 15.

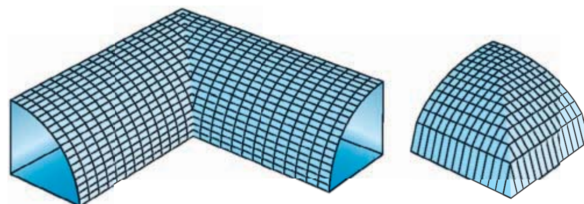


Figura 15

28. Encuentre el volumen dentro de la "cruz" que se muestra en la figura 16. Suponga que ambos cilindros tienen radio de 2 pulgadas y largo de 12 pulgadas. *Sugerencia:* el volumen es igual al volumen del primer cilindro más el volumen del segundo cilindro menos el volumen de la región común a ambos. Utilice el resultado del problema 27.

29. Encuentre el volumen interior a la "cruz" de la figura 16, suponiendo que ambos cilindros tienen radio r y largo L.

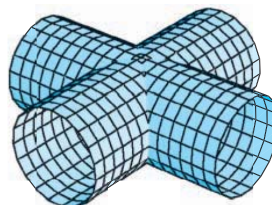


Figura 16

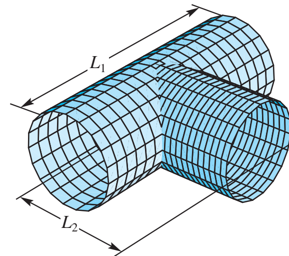


Figura 17

30. Encuentre el volumen interior de la "T" en la figura 17, suponiendo que cada cilindro tiene radio $r = 2$ pulgadas y que las longitudes son $L_1 = 12$ pulgadas y $L_2 = 8$ pulgadas.

31. Repita el problema 30 para r, L_1 y L_2 arbitrarias.

32. La base de un sólido es la región R acotada por $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$. Cada sección transversal perpendicular al eje x es un semicírculo cuyo diámetro se extiende a lo largo de R. Encuentre el volumen del sólido.

33. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante acotada por la curva $y^2 = x^3$, la recta $x = 4$ y el eje x:

(a) en torno a la recta $x = 4$; (b) en torno a la recta $y = 8$.

34. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante acotada por la curva $y^2 = x^3$, la recta $y = 8$ y el eje y:

(a) en torno a la recta $x = 4$; (b) en torno a la recta $y = 8$.

35. Complete la evaluación de la integral del ejemplo 4, observando que

$$\int_0^2 \left[2\sqrt{4-y^2}+4-y^2\right] dy$$
$$= 2\int_0^2 \sqrt{4-y^2}\, dy + \int_0^2 (4-y^2)\, dy$$

Ahora interprete la primera integral como el área de un cuarto de círculo.

36. Un barril abierto de radio r y altura h, al inicio está lleno de agua. Se inclina y el agua se derrama hasta que el nivel del agua coincide con el diámetro de la base y toca exactamente el borde superior. Encuentre el volumen del agua que queda en el barril. Véase la figura 18.

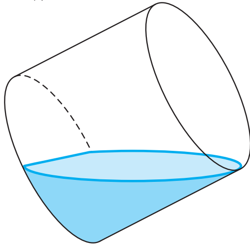


Figura 18

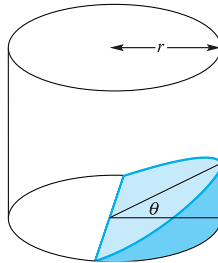


Figura 19

37. Se corta una cuña de un cilindro circular recto de radio r (véase la figura 19). La superficie superior de la cuña está en un plano que pasa por el diámetro de la base circular y forma un ángulo θ con la base. Encuentre el volumen de la cuña.

38. (El reloj de agua) Un tanque de agua se obtiene haciendo girar, en torno al eje y, la curva $y = kx^4$, $k > 0$.

(a) Encuentre $V(y)$, el volumen de agua en el tanque como una función de su profundidad y.

(b) El agua sale a través de un pequeño orificio de acuerdo con la Ley de Torricelli $\left(dV/dt = -m\sqrt{y}\right)$. Demuestre que el nivel del agua desciende a una velocidad constante.

39. Demuestre que el volumen de un cono general (véase la figura 20) es $\frac{1}{3}Ah$, donde A es el área de la base y h es la altura. Utilice este resultado para dar la fórmula para el volumen de:

(a) Un cono circular recto de radio r y altura h;

(b) Un tetraedro regular con arista de longitud r.

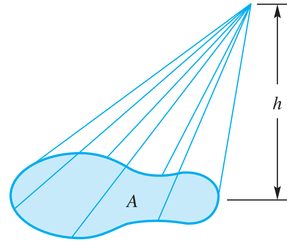


Figura 20

40. Formule la versión del principio de Cavalieri para el volumen (véase el problema 36 de la sección 5.1).

41. Aplique el principio de Cavalieri para volúmenes a los dos sólidos que se muestran en la figura 21. (Uno es una semiesfera de radio r; el otro es un cilindro de radio r y altura r, del que se eliminó un cono circular recto de radio r y altura r). Suponiendo que el volumen de un cono circular recto es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, encuentre el volumen de una semiesfera de radio r.

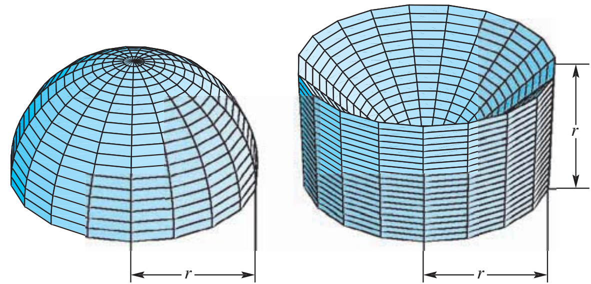


Figura 21

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\pi r^2 h$ **2.** $\pi(R^2 - r^2)h$ **3.** $\pi x^4 \,\Delta x$ **4.** $\pi[(x^2+2)^2 - 4]\,\Delta x$

5.3 Volúmenes de sólidos de revolución: cascarones

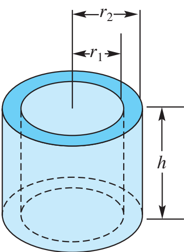


Figura 1

Existe otro método para encontrar el volumen de un sólido de revolución: el método de los cascarones cilíndricos. Para muchos problemas, es más fácil de aplicar que el método de los discos o el de las arandelas.

Un cascarón cilíndrico es un sólido acotado por dos cilindros circulares rectos concéntricos (véase la figura 1). Si el radio interno es r_1, el radio externo es r_2 y la altura es h, entonces su volumen está dado por

$$\begin{aligned} V &= (\text{área de la base}) \cdot (\text{altura}) \\ &= (\pi r_2^2 - \pi r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \\ &= 2\pi\left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)h(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

La expresión $(r_1 + r_2)/2$, que denotaremos con r, es el promedio de r_1 y r_2. Por lo tanto,

$$V = 2\pi \cdot (\text{radio promedio})\cdot(\text{altura})\cdot(\text{grosor})$$
$$= 2\pi rh\,\Delta r$$

He aquí una buena forma de recordar esta fórmula: si el cascarón fuera muy delgado y flexible (como papel), podríamos cortarlo por un lado, abrirlo para formar una hoja rectangular y después calcular su volumen, suponiendo que esta hoja forma una delgada caja rectangular de largo $2\pi r$, altura h y grosor Δr (véase la figura 2).

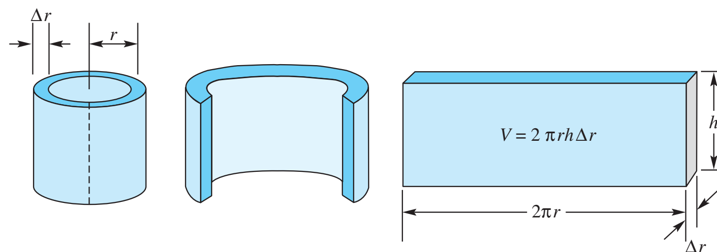


Figura 2

El método de los cascarones Ahora, considere una región del tipo que se muestra en la figura 3. Rebánela de manera vertical y hágala girar en torno al eje y. Generará un sólido de revolución y cada rebanada generará una pieza que es aproximadamente un cascarón cilíndrico. Para obtener el volumen de este sólido, calculamos el volumen ΔV de un cascarón representativo, sumamos y tomamos el límite cuando el grosor de los cascarones tiende a cero. Por supuesto, lo último es una integral. De nuevo, la estrategia es rebane, aproxime, integre.

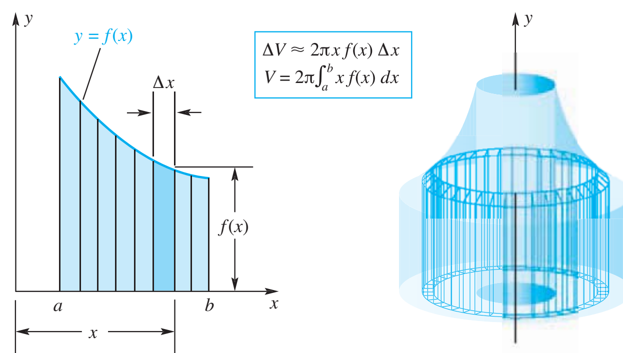


Figura 3

EJEMPLO 1 La región acotada por $y = 1/\sqrt{x}$, el eje x, $x = 1$ y $x = 4$ se hace girar en torno al eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

SOLUCIÓN Con base en la figura 3, vemos que el volumen del cascarón que se genera por la rebanada es

$$\Delta V \approx 2\pi x f(x)\,\Delta x$$

que, para $f(x) = 1/\sqrt{x}$, se convierte en

$$\Delta V \approx 2\pi x \frac{1}{\sqrt{x}}\Delta x$$

Entonces, el volumen se encuentra por medio de integración.

$$V = 2\pi \int_1^4 x \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\pi \int_1^4 x^{1/2}\, dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^4 = 2\pi\left(\frac{2}{3}\cdot 8 - \frac{2}{3}\cdot 1\right) = \frac{28\pi}{3} \approx 29.32$$

■

EJEMPLO 2 La región acotada por la recta $y = (r/h)x$, el eje x y $x = h$ se hace girar alrededor del eje x, y por ello se genera un cono (suponga que $r > 0$, $h > 0$). Encuentre su volumen por el método de los discos y por el método de los cascarones.

SOLUCIÓN

Método de los discos Siga los pasos sugeridos por la figura 4; esto es, *rebane, aproxime, integre.*

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2\, dx = \pi \frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h^3}{3h^2} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

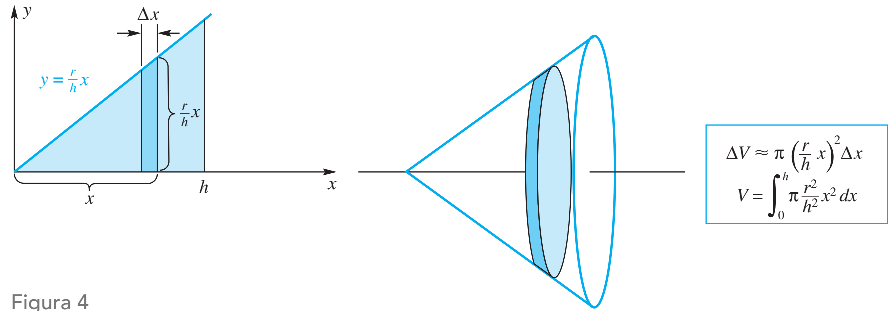


Figura 4

Método de los cascarones Siga los pasos sugeridos por la figura 5. Entonces el volumen es

$$V = \int_0^r 2\pi y\left(h - \frac{h}{r}y\right) dy = 2\pi h \int_0^r \left(y - \frac{1}{r}y^2\right) dy$$

$$= 2\pi h\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3r}\right]_0^r = 2\pi h\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{3}\right] = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

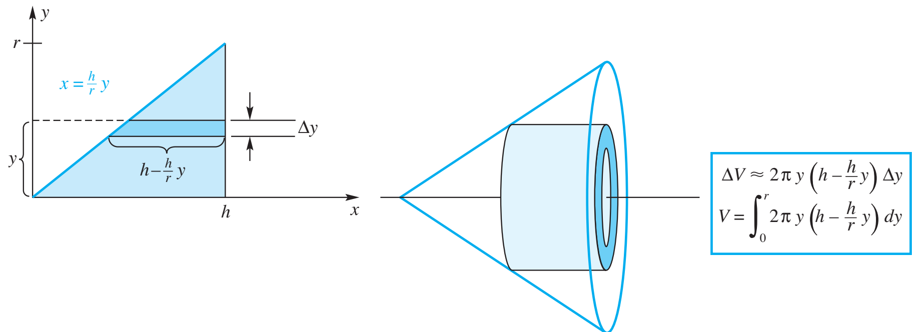


Figura 5

Como era de esperarse, ambos métodos dan la bien conocida fórmula para el volumen de un cono circular recto. ■

EJEMPLO 3 Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar en torno al eje y, la región en el primer cuadrante que está por encima de la parábola $y = x^2$ y por debajo de la parábola $y = 2 - x^2$.

SOLUCIÓN Un vistazo a la región (parte izquierda de la figura 6) debe convencerle de que las rebanadas horizontales que conducen al método de los discos no son la mejor elección (ya que la frontera de la derecha consta de dos partes de dos curvas, haciendo necesario usar dos integrales). Sin embargo, las rebanadas verticales, que resultan en cascarones esféricos, funcionarán bien.

$$V = \int_0^1 2\pi x(2 - 2x^2)\, dx = 4\pi \int_0^1 (x - x^3)\, dx$$

$$= 4\pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 4\pi\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = \pi \approx 3.14$$

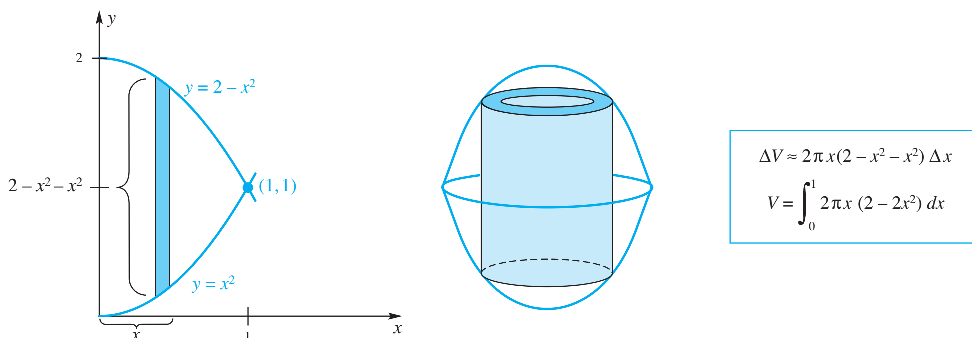


Figura 6

■

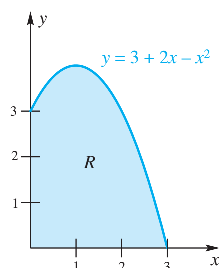


Figura 7

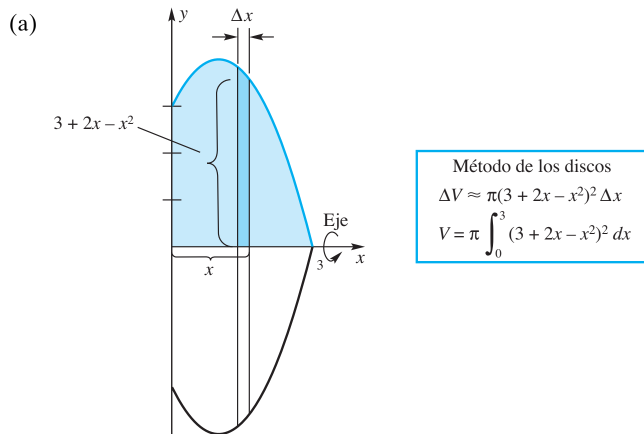
Reuniendo todo Aunque la mayoría de nosotros puede dibujar razonablemente bien una figura plana, algunos lo harán menos bien al dibujar sólidos en tres dimensiones. Pero no existe una ley que diga que tenemos que dibujar un sólido para calcular su volumen. Por lo común, bastará con una figura plana, siempre que podamos visualizar en nuestras mentes el sólido correspondiente. En el ejemplo siguiente vamos a imaginar que hacemos girar, respecto a varios ejes, la región R de la figura 7. Nuestra tarea es formular y evaluar una integral para el volumen del sólido resultante y vamos a hacerlo viendo la figura plana.

EJEMPLO 4 Formule y evalúe una integral para el volumen del sólido que resulta cuando la región R, que se muestra en la figura 7, se hace girar en torno

(a) el eje x, (b) el eje y,
(c) la recta $y = -1$, (d) la recta $x = 4$.

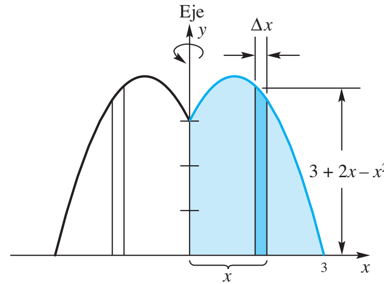
SOLUCIÓN

(a)



$$V = \pi \int_0^3 (3 + 2x - x^2)^2\, dx = \frac{153}{5}\pi \approx 96.13$$

(b)



Método de los cascarones

$\Delta V \approx 2\pi x\,(3 + 2x - x^2)\,\Delta x$

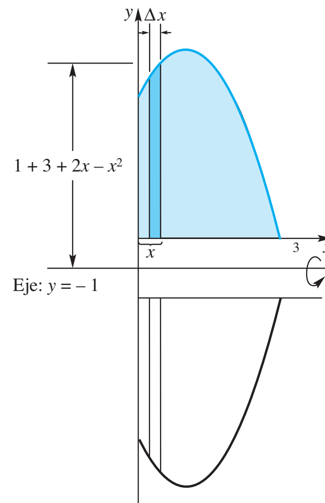
$V = 2\pi \int_0^3 x\,(3 + 2x - x^2)\,dx$

$$V = 2\pi \int_0^3 x(3 + 2x - x^2)\,dx = \frac{45}{2}\pi \approx 70.69$$

Tecnología

En las cuatro partes de este ejemplo, el integrando resultó ser un polinomio; pero encontrar el polinomio implica algunos desarrollos largos. Una vez que las integrales están configuradas, evaluarlas es una tarea ideal para un CAS.

(c)



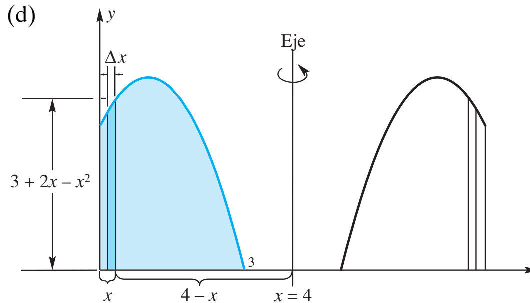
Método de las arandelas

$\Delta V \approx \pi[(4 + 2x - x^2)^2 - 1^2]\,\Delta x$

$V = \pi \int_0^3 [(4 + 2x - x^2)^2 - 1]\,dx$

$$V = \pi \int_0^3 [(4 + 2x - x^2)^2 - 1]\,dx = \frac{243}{5}\pi \approx 152.68$$

(d)



Método de los cascarones

$\Delta V \approx 2\pi\,(4 - x)(3 + 2x - x^2)\,\Delta x$

$V = 2\pi \int_0^3 (4 - x)(3 + 2x - x^2)\,dx$

$$V = 2\pi \int_0^3 (4 - x)(3 + 2x - x^2)\,dx = \frac{99}{2}\pi \approx 155.51$$

Observe que en los cuatro casos los límites de integración son los mismos; es la región plana original la que determina estos límites. ■

Revisión de conceptos

1. El volumen ΔV de un cascarón delgado cilíndrico de radio x, altura $f(x)$ y grosor Δx está dado por $\Delta V \approx$ ________.

2. La región triangular R acotada por $y = x$, $y = 0$ y $x = 2$, se hace girar en torno al eje y, generando un sólido. El método de los cascarones produce la integral ________ como su volumen; el método de las arandelas da la integral ________ como su volumen.

3. La región R de la pregunta 2 se hace girar en torno a la recta $x = -1$, generando un sólido. El método de los cascarones da la integral ________ como su volumen.

4. La región R de la pregunta 2 se hace girar en torno a la recta $y = -1$, generando un sólido. El método de los cascarones da la integral ________ como su volumen.

Conjunto de problemas 5.3

En los problemas del 1 al 12 encuentre el volumen del sólido que se genera cuando la región R, acotada por las curvas dadas, se hace girar en torno al eje que se indica. Haga esto mediante los siguientes pasos.

(a) Dibuje la región R.

(b) Muestre una rebanada rectangular representativa marcada de manera adecuada.

(c) Escriba una fórmula para aproximar el volumen del cascarón generado por esta rebanada.

(d) Formule la integral correspondiente.

(e) Evalúe la integral.

1. $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$; alrededor del eje y

2. $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$; alrededor del eje y

3. $y = \sqrt{x}$, $x = 3$, $y = 0$; alrededor del eje y.

4. $y = 9 - x^2 (x \geq 0)$, $x = 0$, $y = 0$; alrededor del eje y

5. $y = \sqrt{x}$, $x = 5$, $y = 0$; alrededor de la recta $x = 5$

6. $y = 9 - x^2 (x \geq 0)$, $x = 0$, $y = 0$; alrededor de la recta $x = 3$

7. $y = \frac{1}{4}x^3 + 1$, $y = 1 - x$, $x = 1$; alrededor del eje y

8. $y = x^2$, $y = 3x$; alrededor del eje y

9. $x = y^2$, $y = 1$, $x = 0$; alrededor del eje x

10. $x = \sqrt{y} + 1$, $y = 4$, $x = 0$, $y = 0$; alrededor del eje x

11. $x = y^2$, $y = 2$, $x = 0$; alrededor de la recta $y = 2$

12. $x = \sqrt{2y} + 1$, $y = 2$, $x = 0$, $y = 0$; alrededor de la recta $y = 3$

13. Considere la región R (véase la figura 8). Formule una integral para el volumen del sólido que se obtiene cuando se hace girar R alrededor de la recta dada, utilice el método que se indica.

(a) El eje x (arandelas) (b) El eje y (cascarones)

(c) La recta $x = a$ (cascarones) (d) La recta $x = b$ (cascarones)

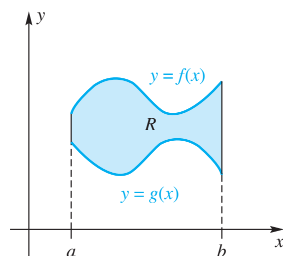


Figura 8

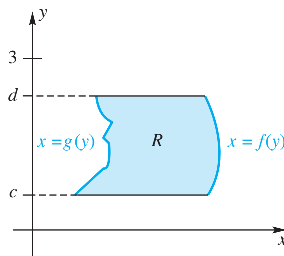


Figura 9

14. En la figura 9 se muestra una región R. Formule una integral para el volumen del sólido que se obtiene cuando se hace girar R alrededor de cada recta. Utilice el método que se indica.

(a) El eje y (arandelas) (b) El eje x (cascarones)

(c) La recta $y = 3$ (cascarones)

15. Dibuje la región R acotada por $y = 1/x^3$, $x = 1$, $x = 3$ y $y = 0$. Formule (pero no evalúe) integrales para cada uno de lo siguiente.

(a) El área de R.

(b) El volumen del sólido que se obtiene cuando se hace girar R en torno al eje y.

(c) El volumen del sólido que se obtiene cuando se hace girar R alrededor de la recta $y = -1$.

(d) El volumen del sólido que se obtiene cuando se hace girar R alrededor de la recta $x = 4$.

16. Siga las instrucciones del problema 15 para la región acotada por $y = x^3 + 1$ y $y = 0$ y entre $x = 0$ y $x = 2$.

17. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región R acotada por las curvas $x = \sqrt{y}$ y $x = y^3/32$ alrededor del eje x.

18. Siga las instrucciones del problema 17, pero haga girar R alrededor de la recta $y = 4$.

19. Se perfora un agujero redondo de radio a que pasa por el centro de una esfera sólida de radio b (suponga que $b > a$). Encuentre el volumen del sólido que queda.

20. Establezca la integral (utilizando cascarones) para el volumen del toro que se obtiene al hacer girar, alrededor de la recta $x = b$, la región interior del círculo $x^2 + y^2 = a^2$, en donde $b > a$. Después evalúe esta integral. *Sugerencia:* cuando simplifique, le puede ayudar considerar una parte de esta integral como un área.

21. La región en el primer cuadrante acotada por $x = 0$, $y = \operatorname{sen}(x^2)$ y $y = \cos(x^2)$ se hace girar alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

22. La región acotada por $y = 2 + \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 2\pi$, se hace girar en torno al eje y. Encuentre el volumen que resulta. *Sugerencia:* $\int x \operatorname{sen} x \, dx = \operatorname{sen} x - x \cos x + C$.

23. Sea R la región acotada por $y = x^2$ y $y = x$. Encuentre el volumen del sólido que resulta cuando R se hace girar alrededor de:

(a) el eje x; (b) el eje y; (c) la recta $y = x$.

24. Suponga que conocemos la fórmula $S = 4\pi r^2$ para el área de la superficie de una esfera, pero no conocemos la fórmula correspondiente para su volumen V. Obtenga esta fórmula rebanando la esfera sólida en delgados *cascarones esféricos* concéntricos (véase la figura 10). *Sugerencia:* el volumen ΔV de un cascarón delgado esférico de radio exterior x es $\Delta V \approx 4\pi x^2 \Delta x$.

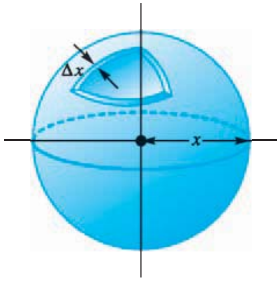


Figura 10

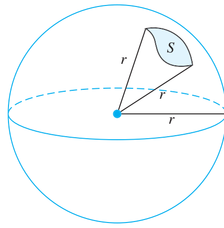


Figura 11

25. Considere una región de área S en la superficie de una esfera de radio r. Encuentre el volumen del sólido que resulta cuando cada punto de esta región se conecta con el centro de la esfera mediante un segmento de recta (véase la figura 11). *Sugerencia:* utilice el método de cascarones esféricos mencionado en el problema 24.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $2\pi x f(x)\,\Delta x$ **2.** $2\pi \int_0^2 x^2\,dx;\ \pi \int_0^2 (4 - y^2)\,dy$ **3.** $2\pi \int_0^2 (1 + x)x\,dx$ **4.** $2\pi \int_0^2 (1 + y)(2 - y)\,dy$

5.4 Longitud de una curva plana

¿Cuál es la longitud de la curva espiral que se muestra en la figura 1? Si fuese un pedazo de cuerda, la mayoría de nosotros la estiraríamos y la mediríamos con una regla. Pero si es la gráfica de una ecuación, resulta más difícil de hacer.

Un poco de reflexión sugiere una pregunta previa. ¿Qué es una curva plana? Hasta ahora hemos utilizado el término *curva* de manera informal, con frecuencia, en referencia a la gráfica de una función. Éste es el momento de ser más precisos, aun para curvas que no son gráficas de funciones. Comenzaremos con varios ejemplos.

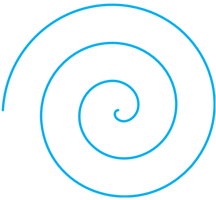


Figura 1

La gráfica de $y = \operatorname{sen} x, 0 \le x \le \pi$ es una curva plana (véase la figura 2). También lo es la gráfica de $x = y^2, -2 \le y \le 2$ (véase la figura 3). En ambos casos, la curva es la gráfica de una función, la primera de la forma $y = f(x)$, la segunda de la forma $x = g(y)$. Sin embargo, la curva espiral no se ajusta a ninguno de estos patrones. Tampoco la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, aunque en este caso podríamos considerarla como la gráfica combinada de las dos funciones $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ y $y = g(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}$.

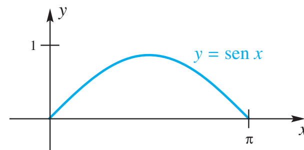


Figura 2

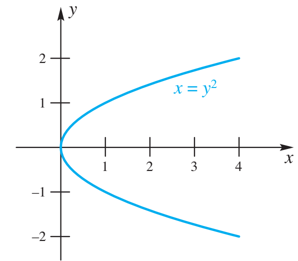
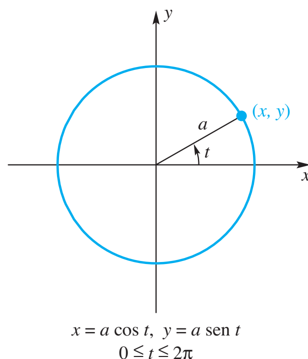


Figura 3

La circunferencia sugiere otra manera de pensar con respecto a las curvas. De trigonometría, recuerde que

$$x = a\cos t, \quad y = a\operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

describen la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ (véase la figura 4). Considere a t como el tiempo y que x y y dan la posición de una partícula en el instante t. La variable t se denomina **parámetro**. Tanto x como y se expresan en términos de este parámetro. Decimos que $x = a\cos t, y = a\operatorname{sen} t, 0 \le t \le 2\pi$, son **ecuaciones paramétricas** que describen a la circunferencia.



$x = a\cos t,\ y = a\operatorname{sen} t$
$0 \le t \le 2\pi$

Figura 4

Si tuviésemos que graficar las ecuaciones paramétricas $x = t\cos t, y = t\operatorname{sen} t, 0 \le t \le 5\pi$, obtendríamos una curva parecida a la espiral con la que iniciamos. Incluso, podemos pensar en la curva seno (figura 2) y la parábola (figura 3) en forma paramétrica. Escribimos

$$x = t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le \pi$$

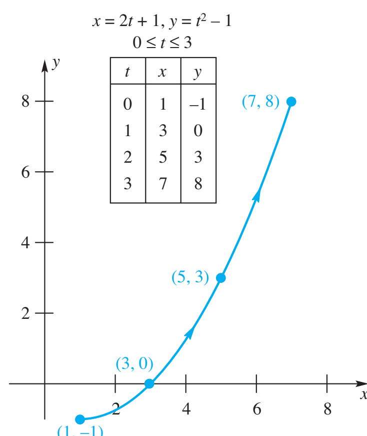


Figura 5

y

$$x = t^2, \qquad y = t, \qquad -2 \le t \le 2$$

Así, para nosotros, una **curva plana** está determinada por un par de ecuaciones paramétricas $x = f(t), y = g(t), a \le t \le b$, en donde suponemos que f y g son continuas en el intervalo dado. Conforme t aumenta de a a b, el punto (x, y) traza una curva en el plano. He aquí otro ejemplo.

EJEMPLO 1 Dibuje la curva determinada por las ecuaciones paramétricas $x = 2t + 1, y = t^2 - 1, 0 \le t \le 3$.

SOLUCIÓN Construimos una tabla de valores, con tres columnas, después trazamos las parejas ordenadas (x, y), y por último conectamos estos puntos en el orden creciente de t, como se muestra en la figura 5. Para producir tal gráfica, puede utilizarse una calculadora gráfica o un CAS (del inglés computer algebra sistem: sistema de álgebra computacional). Por lo regular, tal software produce una gráfica creando una tabla, al igual que nosotros, y conecta los puntos. ■

En realidad, la definición que hemos dado es demasiado amplia para los propósitos que tenemos en mente, así que de inmediato nos restringiremos a lo que se denomina *curva suave*. El adjetivo *suave* se eligió para indicar eso como un objeto que se mueve a lo largo de la curva, de modo que su posición en el instante *t,* que es (x, y), no sufrirá cambios repentinos de dirección (la continuidad de f' y de g', aseguran esto) y no se detiene ni regresa por la misma curva (esto se asegura si $f'(t)$ y $g'(t)$ no son cero de manera simultánea).

Definición

Una curva plana es **suave** si está determinada por un par de ecuaciones paramétricas $x = f(t), y = g(t)$, $a \le t \le b$, en donde f' y g' existen y son continuas en $[a, b]$, y $f'(t)$ y $g'(t)$ no son cero de manera simultánea en (a, b).

La forma en que una curva se parametriza, esto es, la forma en que se eligen las funciones $f(t)$ y $g(t)$ y el dominio para t, determina una *dirección positiva*. Por ejemplo, cuando $t = 0$, en el ejemplo 1 (figura 5), la curva está en el punto $(1, -1)$, y cuando $t = 1$, la curva está en $(3, 0)$. Cuando t aumenta desde $t = 0$ hasta $t = 3$, la curva sigue una trayectoria de $(1, -1)$ a $(7, 8)$. Esta dirección, que a menudo se indica por medio de una flecha en la curva, como se muestra en la figura 5, se denomina la **orientación** de la curva. La orientación de una curva es irrelevante para la determinación de su longitud, pero en problemas que encontraremos más adelante en el texto, la orientación es importante.

$x = t - \operatorname{sen} t, y = 1 - \cos t$
$0 \le t \le 4\pi$

t	$x(t)$	$y(t)$
0	0.00	0
$\pi/2$	0.57	1
π	3.14	2
$3\pi/2$	5.71	1
2π	6.28	0
$5\pi/2$	6.85	1
3π	9.42	2
$7\pi/2$	10.00	1
4π	12.57	0

Figura 6

EJEMPLO 2 Dibuje la curva determinada por medio de las ecuaciones paramétricas $x = t - \operatorname{sen} t, y = 1 - \cos t, 0 \le t \le 4\pi$. Indique la orientación. ¿La curva es suave?

SOLUCIÓN La tabla que muestra los valores de x y y para varios valores de t, desde 0 hasta 4π, guía a la gráfica de la figura 6. Esta curva no es suave aunque x y y son funciones diferenciables de t. El problema es que $dx/dt = 1 - \cos t$ y $dy/dt = \operatorname{sen} t$ son 0 de forma simultánea cuando $t = 2\pi$. El objeto baja lentamente hasta detenerse en el instante $t = 2\pi$, luego empieza a subir en una nueva dirección. ■

La curva descrita en el ejemplo 2 se denomina **cicloide**. Describe la trayectoria de un punto fijo en el borde de una rueda de radio 1, cuando la rueda se hace rodar a lo largo del eje x. (Véase el problema 18 para una deducción de este resultado).

Longitud de arco Por último, estamos preparados para la pregunta principal. ¿Qué significa la longitud de la curva suave dada de forma paramétrica por $x = f(t)$, $y = g(t), a \le t \le b$?

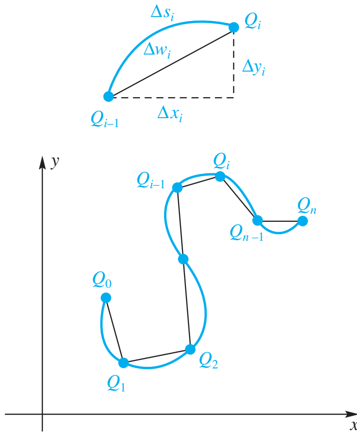


Figura 7

Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos por medio de los puntos t_i:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

Esto corta a la curva en n pedazos con correspondientes puntos extremos Q_0, Q_1, $Q_2, \ldots, Q_{n-1}, Q_n$, como se muestra en la figura 7.

Nuestra idea es aproximar la curva por medio del segmento de línea poligonal indicada, calcular su longitud total y después tomar el límite cuando la norma de la partición tiende a cero. En particular, aproximamos la *longitud* Δs_i del i-ésimo segmento (véase la figura 7) por

$$\begin{aligned}\Delta s_i \approx \Delta w_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}\end{aligned}$$

Del teorema del valor medio para derivadas (teorema 3.6A), sabemos que existen puntos $\bar{t}_i$ y $\hat{t}_i$ en (t_{i-1}, t_i) tales que

$$\begin{aligned}f(t_i) - f(t_{i-1}) &= f'(\bar{t}_i)\,\Delta t_i \\ g(t_i) - g(t_{i-1}) &= g'(\hat{t}_i)\,\Delta t_i\end{aligned}$$

en donde $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Delta w_i &= \sqrt{[f'(\bar{t}_i)\,\Delta t_i]^2 + [g'(\hat{t}_i)\,\Delta t_i]^2} \\ &= \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2}\,\Delta t_i\end{aligned}$$

y la longitud total del segmento de línea poligonal es

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta w_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2}\,\Delta t_i$$

La última expresión es casi una suma de Riemann, la única dificultad es que $\bar{t}_i$ y $\hat{t}_i$ no parecen ser el mismo punto. Sin embargo, se demuestra en textos de cálculo avanzado que en el límite (cuando la norma de la partición tiende a 0) esto no importa. Por esto, podemos definir la **longitud de arco** L de la curva como el límite de la expresión anterior cuando la norma de la partición tiende a cero; es decir,

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Dos casos especiales son de gran interés. Si la curva está dada por $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, tratamos a x como el parámetro y el resultado del recuadro toma la forma

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

De manera análoga, si la curva está dada por $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$, consideramos a y como el parámetro, obteniendo

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

Estas fórmulas dan los resultados conocidos para círculos y segmentos de recta, como lo ilustran los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 3 Encuentre el perímetro de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

SOLUCIÓN Escribimos la ecuación de la circunferencia en forma paramétrica: $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$. Entonces $dx/dt = -a \operatorname{sen} t$, $dy/dt = a \cos t$, y por la primera de nuestras fórmulas,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} a\, dt = \Big[at\Big]_0^{2\pi} = 2\pi a$$ ■

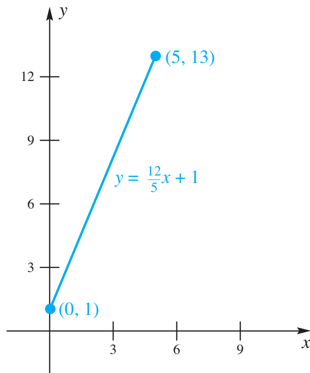


Figura 8

EJEMPLO 4 Encuentre la longitud del segmento de recta de $A(0, 1)$ a $B(5, 13)$.

SOLUCIÓN El segmento de recta dado se muestra en la figura 8. Observe que la ecuación de la recta correspondiente es $y = \frac{12}{5}x + 1$, de modo que $dy/dx = \frac{12}{5}$; y así, por la segunda de las tres fórmulas para la longitud,

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2}\, dx = \int_0^5 \sqrt{\frac{5^2 + 12^2}{5^2}}\, dx = \frac{13}{5}\int_0^5 1\, dx$$

$$= \left[\frac{13}{5}x\right]_0^5 = 13$$

Esto coincide con el resultado que se obtiene por medio de la fórmula de distancia. ■

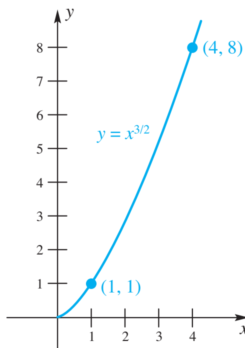


Figura 9

EJEMPLO 5 Encuentre la longitud del arco de la curva $y = x^{3/2}$, desde el punto $(1, 1)$ hasta el punto $(4, 8)$ (véase la figura 9).

≈ **SOLUCIÓN** Empezamos por estimar esta longitud encontrando la longitud del segmento que va de $(1, 1)$ a $(4, 8)$: $\sqrt{(4-1)^2 + (8-1)^2} = \sqrt{58} \approx 7.6$. La longitud real debe ser un poco mayor.

Para el cálculo exacto, observamos que $dy/dx = \frac{3}{2}x^{1/2}$, de modo que

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$$

Sea $u = 1 + \frac{9}{4}x$; entonces $du = \frac{9}{4}dx$. De aquí que,

$$\int \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{4}{9}\int \sqrt{u}\, du = \frac{4}{9}\frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$= \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} + C$$

Por lo tanto,

$$\int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \left[\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_1^4 = \frac{8}{27}\left(10^{3/2} - \frac{13^{3/2}}{8}\right) \approx 7.63$$ ■

Para la mayor parte de los problemas de longitud de arco es fácil configurar la integral definida que proporciona la longitud. Sólo es cosa de sustituir las derivadas necesarias en la fórmula. Sin embargo, con frecuencia es difícil, si no imposible, evaluar estas integrales por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, a consecuencia de la dificultad de determinar las antiderivadas. Para muchos problemas debemos recurrir a una técnica numérica tal como la regla de la parábola, descrita en la sección 4.6, para obtener una aproximación a la integral definida.

EJEMPLO 6 Dibuje la gráfica de la curva dada de forma paramétrica por $x = 2 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le \pi$. Establezca una integral definida que proporcione la longitud del arco y aproxime esta integral definida por medio de la regla de la parábola con $n = 8$.

$x = 2\cos t,\ y = 4\,\mathrm{sen}\,t$
$0 \le t \le \pi$

t	x	y
0	2	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}$	2
$\pi/3$	1	$2\sqrt{3}$
$\pi/2$	0	4
$2\pi/3$	-1	$2\sqrt{3}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$	2
π	-2	0

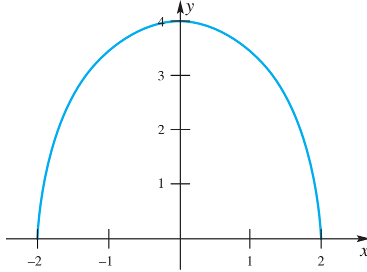


Figura 10

SOLUCIÓN La gráfica (véase la figura 10) se dibujó, como en los ejemplos anteriores, construyendo primero una tabla de valores con tres columnas. La integral definida que proporciona la longitud del arco es

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{(-2\,\mathrm{sen}\,t)^2 + (4\cos t)^2}\, dt \\ &= \int_0^{\pi} 2\sqrt{\mathrm{sen}^2\, t + 4\cos^2 t}\, dt \\ &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{1 + 3\cos^2 t}\, dt \end{aligned}$$

Esta integral definida no puede evaluarse por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. Sea $f(t) = \sqrt{1 + 3\cos^2 t}$. La aproximación por medio de la regla de la parábola con $n = 8$ es

$$\begin{aligned} L &\approx 2\frac{\pi - 0}{3\cdot 8}\left[f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2f\left(\frac{2\pi}{8}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 2f\left(\frac{4\pi}{8}\right)\right. \\ &\qquad \left. + 4f\left(\frac{5\pi}{8}\right) + 2f\left(\frac{6\pi}{8}\right) + 4f\left(\frac{7\pi}{8}\right) + f(\pi)\right] \\ &\approx 2\frac{\pi}{24}[2.0 + 4\cdot 1.8870 + 2\cdot 1.5811 + 4\cdot 1.1997 + 2\cdot 1.0 \\ &\qquad + 4\cdot 1.1997 + 2\cdot 1.5811 + 4\cdot 1.8870 + 2.0)] \\ &\approx 9.6913 \end{aligned}$$

■

Diferencial de la longitud de arco Sea f continuamente diferenciable en $[a, b]$. Para cada x en (a, b), defínase $s(x)$ como

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(u)]^2}\, du$$

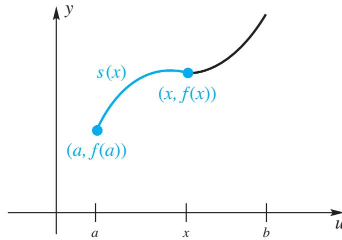


Figura 11

Entonces, $s(x)$ da la longitud del arco de la curva $y = f(u)$ desde el punto $(a, f(a))$ hasta $(x, f(x))$ (véase la figura 11). Por medio del Primer Teorema Fundamental del Cálculo (teorema 4.3A),

$$s'(x) = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Por lo que ds, la **diferencial de la longitud del arco**, puede escribirse como

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

En efecto, dependiendo de cómo se parametrice una gráfica, llegamos a tres fórmulas para ds:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

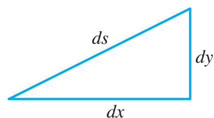


Figura 12

Algunas personas prefieren recordar estas fórmulas escribiendo (véase la figura 12)

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

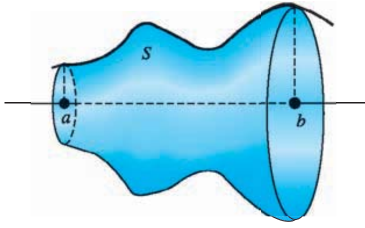


Figura 13

Las tres formas surgen de dividir y multiplicar el lado derecho por $(dx)^2$, $(dy)^2$ y $(dt)^2$, respectivamente. Por ejemplo,

$$(ds)^2 = \left[\frac{(dx)^2}{(dx)^2} + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right](dx)^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right](dx)^2$$

que da la primera de las tres fórmulas.

Área de una superficie de revolución Si se hace girar una curva plana suave alrededor de un eje en su plano, genera una superficie de revolución, como se ilustra en la figura 13. Nuestra meta es determinar el área de tal superficie.

Para empezar, introducimos la fórmula para el área de un tronco o cono truncado. Un **tronco o cono truncado** es la parte de la superficie de un cono comprendida entre dos planos perpendiculares al eje del cono (sombreado en la figura 14). Si un cono truncado tiene radios de sus bases r_1 y r_2, y altura oblicua l, entonces su área A está dada por

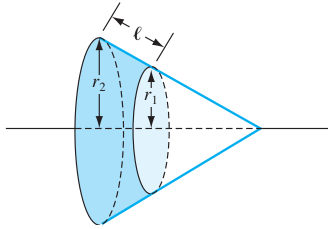


Figura 14

$$A = 2\pi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)\ell = 2\pi(\text{radio promedio})\cdot(\text{altura oblicua})$$

La deducción de este resultado sólo depende de la fórmula para el área de un círculo (véase el problema 31).

Supóngase que $y = f(x)$, $a \le x \le b$ determina una curva suave en la mitad superior del plano xy, como se muestra en la figura 15. Divídase el intervalo $[a, b]$ en n pedazos por medio de los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, y por ello también se divide a la curva en n partes. Denótese con Δs_i a la longitud del i-ésimo pedazo y sea y_i la ordenada de un punto de ese pedazo. Cuando la curva se hace girar alrededor del eje x, genera una superficie y el pedazo representativo genera una banda angosta. El "área" de esta banda podría aproximarse a la de un cono truncado, esto es, aproximadamente $2\pi y_i \Delta s_i$. Cuando sumamos las contribuciones de todos los pedazos y tomamos el límite cuando la norma de la partición tiende a cero, obtenemos lo que definimos como el área de la superficie de revolución. Todo esto está indicado en la figura 16. Así, el área de la superficie es

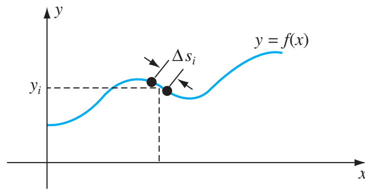


Figura 15

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i \, \Delta s_i \\ &= 2\pi \int_a^b y \, ds \\ &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \end{aligned}$$

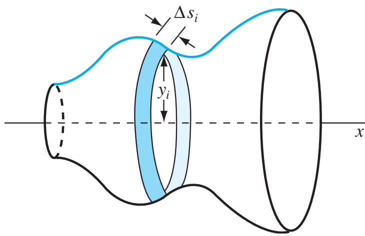


Figura 16

EJEMPLO 7 Encuentre el área de la superficie de revolución generada al hacer girar la curva $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$, en torno al eje x (véase la figura 17).

SOLUCIÓN Aquí, $f(x) = \sqrt{x}$ y $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$. Así,

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x + 1}{4x}}\, dx \\ &= \pi \int_0^4 \sqrt{4x + 1}\, dx = \left[\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}(4x + 1)^{3/2}\right]_0^4 \\ &= \frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 1^{3/2}) \approx 36.18 \end{aligned}$$

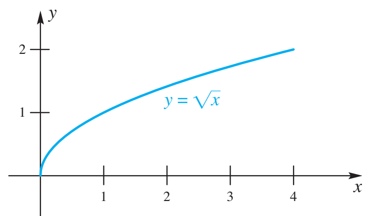


Figura 17

Si la curva se da en forma paramétrica por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, entonces la fórmula para el área de la superficie se transforma en

$$A = 2\pi \int_a^b y \, ds = 2\pi \int_a^b g(t)\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

■

Revisión de conceptos

1. La gráfica de las ecuaciones paramétricas $x = 4\cos t$, $y = 4$ sen t, $0 \le t \le 2\pi$, es una curva denominada ________.

2. La curva determinada por $y = x^2 + 1$, $0 \le x \le 4$, puede ponerse en forma paramétrica mediante x como el parámetro al escribir x = ________, y = ________.

3. La fórmula para la longitud L de la curva $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, es L = ________.

4. La demostración de la fórmula para la longitud de una curva depende fuertemente de un teorema anterior llamado ________.

Conjunto de problemas 5.4

≈ *En los problemas del 1 al 6 encuentre la longitud de la curva que se indica.*

1. $y = 4x^{3/2}$ entre $x = 1/3$ y $x = 5$

2. $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$ entre $x = 1$ y $x = 2$

3. $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$ entre $x = 1$ y $x = 8$

4. $y = (x^4 + 3)/(6x)$ entre $x = 1$ y $x = 3$

5. $x = y^4/16 + 1/(2y^2)$ entre $y = -3$ y $y = -2$ *Sugerencia:* observe los signos $\sqrt{u^2} = -u$ cuando $u < 0$.

6. $30xy^3 - y^8 = 15$ entre $y = 1$ y $y = 3$

En los problemas del 7 al 10 dibuje la gráfica de la ecuación paramétrica dada y determine su longitud.

7. $x = t^3/3$, $y = t^2/2$; $0 \le t \le 1$

8. $x = 3t^2 + 2$, $y = 2t^3 - 1/2$; $1 \le t \le 4$

9. $x = 4$ sen t, $y = 4\cos t - 5$; $0 \le t \le \pi$

10. $x = \sqrt{5}$ sen $2t - 2$, $y = \sqrt{5}\cos 2t - \sqrt{3}$; $0 \le t \le \pi/4$

11. Utilice una integración en x para determinar la longitud del segmento de la recta $y = 2x + 3$, entre $x = 1$ y $x = 3$. Verifique por medio de la fórmula de distancia.

12. Utilice una integración en y para encontrar la longitud del segmento de recta $2y - 2x + 3 = 0$, entre $y = 1$ y $y = 3$. Verifique por medio de la fórmula de distancia.

En los problemas del 13 al 16 establezca una integral definida que proporcione la longitud del arco de la curva dada. Aproxime la integral por medio de la regla de la parábola con n = 8.

13. $x = t$, $y = t^2$; $0 \le t \le 2$

14. $x = t^2$, $y = \sqrt{t}$; $1 \le t \le 4$

15. $x =$ sen t, $y = \cos 2t$; $0 \le t \le \pi/2$

16. $x = t$, $y = \tan t$; $0 \le t \le \pi/4$

17. Dibuje la gráfica de la *hipocicloide* de cuatro vértices $x = a$ sen$^3 t$, $y = a\cos^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$, y encuentre su longitud. *Sugerencia:* por simetría, usted puede multiplicar por cuatro la longitud de la parte en el primer cuadrante.

18. Inicialmente, un punto P en el borde de una rueda de radio a está en el origen. Conforme la rueda avanza a la derecha a lo largo del eje x, P describe una curva denominada *cicloide* (véase la figura 18). Deduzca las ecuaciones paramétricas para la cicloide, como sigue. El parámetro es θ.

(a) Demuestre que $\overline{OT} = a\theta$.

(b) Convénzase de que $\overline{PQ} = a$ sen θ, $\overline{QC} = a\cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi/2$.

(c) Demuestre que $x = a(\theta -$ sen $\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$.

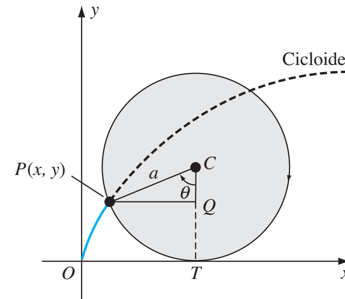


Figura 18

19. Encuentre la longitud de un arco de la cicloide del problema 18. *Sugerencia:* primero demuestre que

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 4a^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

20. Suponga que la rueda del problema 18 gira a una velocidad constante de $\omega = d\theta/dt$, donde t es el tiempo. Entonces $\theta = \omega t$.

(a) Demuestre que la rapidez ds/dt de P a lo largo de la cicloide es

$$\frac{ds}{dt} = 2a\omega\left|\operatorname{sen}\frac{\omega t}{2}\right|$$

(b) ¿Cuándo la rapidez es máxima y cuándo es mínima?

(c) Explique por qué un insecto en la rueda de un automóvil que va a 60 millas por hora, en algunos momentos viaja a 120 millas por hora.

21. Encuentre la longitud de cada curva.

(a) $y = \int_1^x \sqrt{u^3 - 1}\, du$, $1 \le x \le 2$

(b) $x = t -$ sen t, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 4\pi$

22. Encuentre la longitud de cada curva.

(a) $y = \int_{\pi/6}^x \sqrt{64 \operatorname{sen}^2 u \cos^4 u - 1}\, du$, $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3}$

(b) $x = a\cos t + at$ sen t, $y = a$ sen $t - at\cos t$, $-1 \le t \le 1$

En los problemas del 23 al 30 encuentre el área de la superficie generada al hacer girar la curva dada alrededor del eje x.

23. $y = 6x$, $0 \le x \le 1$

24. $y = \sqrt{25 - x^2}$, $-2 \le x \le 3$

25. $y = x^3/3$, $1 \le x \le \sqrt{7}$

26. $y = (x^6 + 2)/(8x^2)$, $1 \le x \le 3$

27. $x = t$, $y = t^3$, $0 \le t \le 1$

28. $x = 1 - t^2, y = 2t, 0 \le t \le 1$

29. $y = \sqrt{r^2 - x^2}, -r \le x \le r$

30. $x = r \cos t, y = r \operatorname{sen} t, 0 \le t \le \pi$

31. Si la superficie de un cono de altura oblicua ℓ y radio de la base r se corta a lo largo de un lado y se extiende en el plano, se convierte en el sector de un círculo de radio ℓ y ángulo central θ (véase la figura 19).

(a) Demuestre que $\theta = 2\pi r/\ell$ radianes.

(b) Utilice la fórmula $\frac{1}{2}\ell^2\theta$ para el área de un sector de radio ℓ y ángulo central θ para demostrar que el área de la superficie lateral de un cono es $\pi r \ell$.

(c) Utilice el resultado de la parte (b) para obtener la fórmula $A = 2\pi[(r_1 + r_2)/2]/\ell$ para el área lateral de un cono truncado con radios de las bases r_1 y r_2 y altura oblicua ℓ.

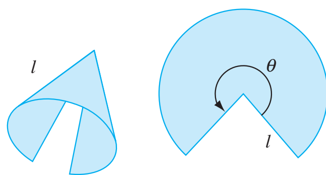


Figura 19

32. Demuestre que el área de la parte de la superficie de una esfera de radio a entre dos planos paralelos separados h unidades ($h < 2a$) es $2\pi ah$. Así, demuestre que si un cilindro circular recto está circunscrito alrededor de una esfera, entonces dos planos paralelos a la base del cilindro acotan regiones de la misma área en la esfera y en el cilindro.

33. La figura 20 muestra un arco de una cicloide. Sus ecuaciones paramétricas (véase el problema 18) están dadas por

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

(a) Demuestre que cuando esta curva se hace girar alrededor del eje x el área de la superficie generada es

$$A = 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{3/2}\, dt$$

(b) Con la ayuda de la fórmula para la mitad de un ángulo, $1 - \cos t = 2 \operatorname{sen}^2(t/2)$, evalúe A.

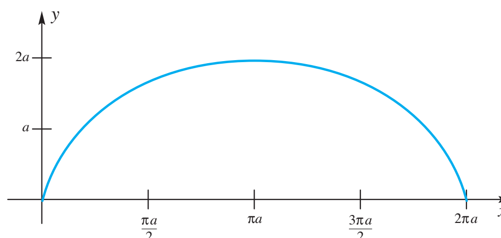


Figura 20

34. La circunferencia $x = a \cos t, y = a \operatorname{sen} t, 0 \le t \le 2\pi$ se hace girar en torno a la recta $x = b, 0 < a < b$, con lo que genera un toro (dona). Encuentre el área de su superficie.

GC **35.** Dibuje las gráficas de cada una de las siguientes ecuaciones paramétricas.

(a) $x = 3 \cos t, y = 3 \operatorname{sen} t, 0 \le t \le 2\pi$

(b) $x = 3 \cos t, y = \operatorname{sen} t, 0 \le t \le 2\pi$

(c) $x = t \cos t, y = t \operatorname{sen} t, 0 \le t \le 6\pi$

(d) $x = \cos t, y = \operatorname{sen} 2t, 0 \le t \le 2\pi$

(e) $x = \cos 3t, y = \operatorname{sen} 2t, 0 \le t \le 2\pi$

(f) $x = \cos t, y = \operatorname{sen} \pi t, 0 \le t \le 40$

CAS **36.** Encuentre las longitudes de cada una de las curvas del problema 35. Primero tiene que formular la integral apropiada y después utilizar una computadora para evaluarla.

CAS **37.** Con el uso de los mismos ejes dibuje las gráficas de $y = x^n$ en $[0, 1]$ para $n = 1, 2, 4, 10$ y 100. Encuentre la longitud de cada una de estas curvas. Haga una conjetura de la longitud cuando $n = 10{,}000$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** circunferencia **2.** $x; x^2 + 1$ **3.** $\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$ **4.** teorema del valor medio para derivadas.

5.5 Trabajo y fuerza de un fluido

En física aprendimos que si un objeto se mueve una distancia d, a lo largo de una línea, mientras se encuentra sujeto a una fuerza *constante* F en la dirección del movimiento, entonces el **trabajo realizado por la fuerza** es

$$\text{Trabajo} = (\text{Fuerza})\cdot(\text{Distancia})$$

Esto es

$$W = F \cdot D$$

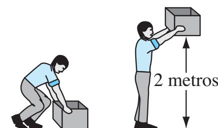


Figura 1

Si la fuerza se mide en newtons (fuerza que se requiere para darle a una masa de 1 kilogramo una aceleración de 1 metro por segundo por segundo), entonces el trabajo está en *newton–metros*, también llamados *joules*. Si la fuerza se mide en libras y la distancia en pies, entonces el trabajo está en *libras–pie*. Por ejemplo, una persona que levanta un peso (fuerza) de 3 newtons una distancia de 2 metros, realiza $3 \cdot 2 = 6$ joules de trabajo (véase la figura 1). (Hablando estrictamente, se necesita una fuerza ligeramente mayor que 3 newtons para una distancia corta a fin de que el paquete se man-

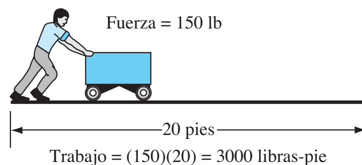


Figura 2

tenga en movimiento hacia arriba; y cuando el paquete está cerca de los 2 metros, se necesita una fuerza un poco menor que 3 newtons para hacer que se detenga en una distancia pequeña. Incluso en este caso, el trabajo es de 6 newtons, pero es difícil de demostrar). De forma análoga, un trabajador que empuja un carro con una fuerza constante de 150 libras (para vencer la fricción) una distancia de 20 pies, realiza $150 \cdot 20 = 3000$ libras-pie de trabajo (véase la figura 2).

En muchas situaciones prácticas, la fuerza no es constante, sino que varía conforme el objeto se mueve a lo largo de la línea. Suponga que el objeto se está moviendo a lo largo del eje x desde a hasta b sujeto a una fuerza variable de magnitud $F(x)$ en el punto x, en donde F es una función continua. Entonces, ¿cuánto trabajo se hizo? Una vez más, la estrategia de *rebane, aproxime* e *integre* nos lleva a la respuesta. Aquí, *rebanar* significa dividir el intervalo $[a, b]$ en pedazos pequeños. *Aproximar* significa suponer que, en una parte representativa de x a $x + \Delta x$, la fuerza es constante con valor $F(x)$. Si la fuerza es constante (con valor $F(x_i)$) en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, entonces el trabajo requerido para mover el objeto desde x_{i-1} a x_i es $F(x_i)(x_i - x_{i-1})$ (véase la figura 3). *Integrar* significa sumar todos los pequeños trabajos y después tomar el límite cuando la longitud de los pedazos tiende a cero. De esta manera, el trabajo realizado al mover el objeto desde a hasta b es

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i)\,\Delta x = \int_a^b F(x)\,dx$$

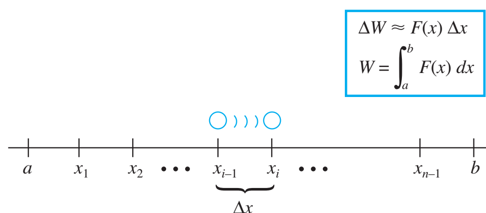


Figura 3

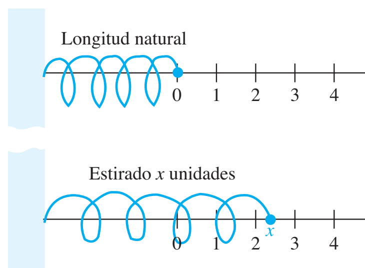


Figura 4

Aplicación a resortes De acuerdo con la Ley de Hooke en física, la fuerza $F(x)$ necesaria para mantener un resorte estirado (o comprimido) x unidades alargado (o acortado) de su longitud natural (véase la figura 4) está dada por

$$F(x) = kx$$

Aquí, la constante k, la *constante del resorte*, es positiva y depende del resorte particular bajo consideración. Entre más rígido sea el resorte mayor será el valor de k.

EJEMPLO 1 Si la longitud natural de un resorte es 0.2 metros y si es necesaria una fuerza de 12 newtons para mantenerlo estirado 0.04 metros, encuentre el trabajo realizado al estirar el resorte de su longitud natural a una longitud de 0.3 metros.

SOLUCIÓN Por la Ley de Hooke, la fuerza requerida para mantener el resorte estirado x pulgadas está dada por $F(x) = kx$. Para evaluar la constante del resorte, k, para este resorte en particular, observamos que $F(0.04) = 12$. Por lo que $k \cdot 0.04 = 12$, o $k = 300$, de modo que

$$F(x) = 300x$$

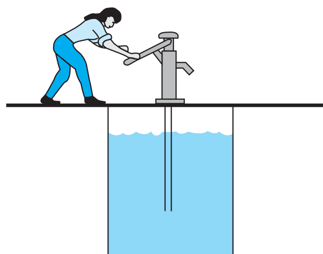


Figura 5

Cuando el resorte tiene su longitud natural de 0.2 metros, $x = 0$; cuando tiene una longitud de 0.3 metros, $x = 0.1$. Por lo tanto, el trabajo hecho al estirar el resorte es

$$W = \int_0^{0.1} 300x\,dx = \left[150x^2\right]_0^{0.1} = 1.5 \text{ joules}$$ ■

Aplicación al bombeo de un líquido Para bombear agua de un tanque se requiere trabajo, como lo sabrá cualquiera que ha utilizado una bomba de mano (véase la figura 5). Pero, ¿cuánto trabajo? La respuesta a esta pregunta tiene como base los mismos principios básicos que se presentaron en el análisis anterior.

EJEMPLO 2 Un depósito, con forma de un cono circular recto (véase la figura 6), está lleno de agua. Si la altura del tanque es de 10 pies y el radio en la parte superior es de 4 pies, encuentre el trabajo hecho (a) al bombear el agua hasta el borde superior del depósito, y (b) al bombear el agua hasta una altura de 10 pies por encima del borde superior del depósito.

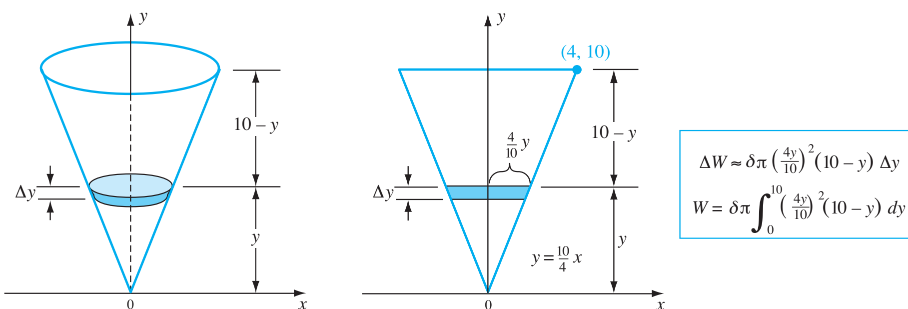


Figura 6

SOLUCIÓN

(a) Coloque el depósito en un sistema de coordenadas, como se muestra en la figura 6. Se muestran las vistas en tres dimensiones y una sección transversal en dos dimensiones. Imagine que se rebana el agua en delgados discos horizontales, cada uno de los cuales debe elevarse al borde del depósito. Un disco de grosor Δy a la altura y tiene radio $4y/10$ (por triángulos semejantes). Así, su volumen es aproximadamente $\pi(4y/10)^2\Delta y$ pies cúbicos, y su peso es alrededor de $\delta\pi(4y/10)^2\Delta y$, en donde $\delta = 62.4$ es la densidad (peso) del agua en libras por pie cúbico. La fuerza necesaria para elevar este disco de agua es igual a su peso, y el disco debe elevarse una distancia de $10 - y$ pies. Así que el trabajo ΔW hecho sobre este disco es aproximadamente

$$\Delta W = (\text{fuerza}) \cdot (\text{distancia}) \approx \delta\pi\left(\frac{4y}{10}\right)^2 \Delta y \cdot (10 - y)$$

Por lo tanto,

$$W = \int_0^{10} \delta\pi\left(\frac{4y}{10}\right)^2 (10 - y)\,dy = \delta\pi\frac{4}{25}\int_0^{10}(10y^2 - y^3)\,dy$$

$$= \frac{(4\pi)(62.4)}{25}\left[\frac{10y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^{10} \approx 26{,}138 \text{ libras-pie}$$

(b) Esta parte es igual a la parte (a), excepto que cada disco de agua ahora debe elevarse una distancia de $20 - y$, en lugar de $10 - y$. Por lo tanto,

$$W = \delta\pi\int_0^{10}\left(\frac{4y}{10}\right)^2 (20 - y)\,dy = \delta\pi\frac{4}{25}\int_0^{10}(20y^2 - y^3)\,dy$$

$$= \frac{(4\pi)(62.4)}{25}\left[\frac{20y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^{10} \approx 130{,}690 \text{ libras-pie}$$

Observe que los límites aún son 0 y 10 (no 0 y 20). ¿Por qué? ■

EJEMPLO 3 Encuentre el trabajo realizado al bombear agua hasta el borde superior de un depósito, que es de 50 pies de largo y tiene extremos semicirculares de radio 10 pies, si el depósito está lleno hasta una profundidad de 7 pies (véase la figura 7).

SOLUCIÓN Colocamos el extremo del tanque en un sistema de coordenadas, como se muestra en la figura 8. Una rebanada horizontal representativa se muestra en este dibujo de dos dimensiones y en la de tres dimensiones de la figura 7. Esta rebanada es aproximadamente una caja delgada, de modo que calculamos su volumen multiplicando su largo, ancho y grosor. Su peso es su densidad, $\delta = 62.4$, por su volumen. Por último, notamos que esta rebanada debe elevarse una distancia de $-y$ (el signo de menos resulta del hecho que, en nuestro diagrama, y es negativa).

$$\begin{aligned} W &= \delta \int_{-10}^{-3} 100\sqrt{100 - y^2}(-y)\, dy \\ &= 50\delta \int_{-10}^{-3} (100 - y^2)^{1/2}(-2y)\, dy \\ &= \left[(50\delta)\left(\tfrac{2}{3}\right)(100 - y^2)^{3/2}\right]_{-10}^{-3} \\ &= \tfrac{100}{3}(91)^{3/2}\delta \approx 1{,}805{,}616 \text{ libras}-\text{pie} \end{aligned}$$

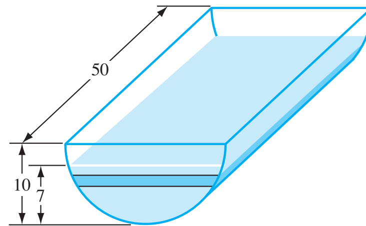


Figura 7

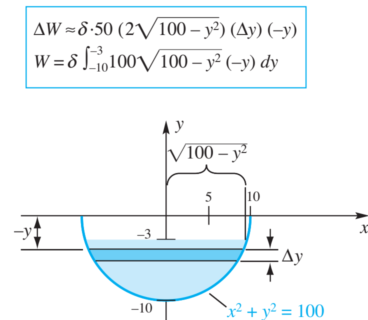


Figura 8 ■

Fuerza de un fluido Imagine que el depósito mostrado en la figura 9 se llenará a una profundidad h con un fluido de densidad δ. Entonces, la fuerza ejercida por el fluido sobre un rectángulo horizontal de área A en la parte inferior es igual al peso de la columna del fluido que está directamente por encima de ese rectángulo (figura 10), esto es $F = \delta hA$.

Es un hecho, que estableció por primera vez Blaise Pascal (1623-1662), que la presión (fuerza por unidad de área) ejercida por un fluido es la misma en todas direcciones. Por lo tanto, la presión en todos los puntos de la superficie, si esa superficie es horizontal, vertical o en otro ángulo, es la misma, siempre que los puntos se encuentren a la misma profundidad. En particular, la fuerza contra cada uno de los tres pequeños

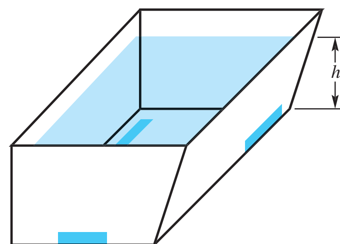


Figura 9

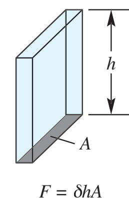


Figura 10

rectángulos de la figura 9 es aproximadamente la misma (suponiendo que tienen la misma área). Decimos "aproximadamente la misma", ya que no todos los puntos de los dos lados de rectángulo están a la misma profundidad; aunque entre más estrechos sean estos rectángulos, esto está más cercano de ser verdadero. Esta aproximación es la que nos permite calcular la fuerza total ejercida por el fluido contra un extremo del depósito.

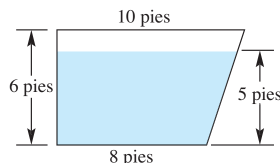


Figura 11

EJEMPLO 4 Suponga que el extremo vertical del depósito en la figura 9 tiene la forma que se muestra en la figura 11 y que el depósito está lleno con agua ($\delta = 62.4$ libras por pie cúbico) con una profundidad de 5 pies. Determine la fuerza total ejercida por el agua contra el extremo del depósito.

SOLUCIÓN Coloque el extremo del depósito en el sistema de coordenadas que se muestra en la figura 12. Observe que el lado recto tiene pendiente 3 y, por lo tanto, tiene ecuación $y - 0 = 3(x - 8)$ o, de forma equivalente, $x = \frac{1}{3}y + 8$. La fuerza en contra de un rectángulo angosto a una profundidad de $5 - y$ es aproximadamente $\delta h A = \delta(5 - y)\left(\frac{1}{3}y + 8\right)\Delta y$.

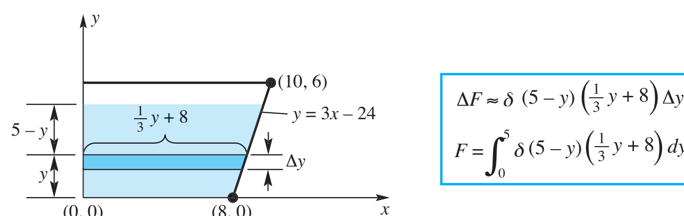


Figura 12

$$F = \delta \int_0^5 \left(40 - \tfrac{19}{3}y - \tfrac{1}{3}y^2\right) dy = \delta\left[40y - \tfrac{19}{6}y^2 - \tfrac{1}{9}y^3\right]_0^5$$

$$= 62.4\left(200 - \tfrac{475}{6} - \tfrac{125}{9}\right) \approx 6673 \text{ libras}$$

■

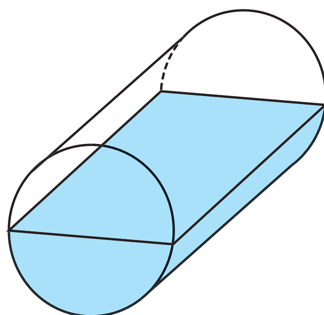


Figura 13

EJEMPLO 5 Un barril lleno de petróleo hasta la mitad descansa de lado (figura 13). Si cada extremo es circular, de 8 pies de diámetro, determine la fuerza total ejercida por el petróleo contra un extremo. Suponga que la densidad de petróleo es $\delta = 50$ libras por pie cúbico.

SOLUCIÓN Coloque el extremo circular en el sistema de coordenadas, como se muestra en la figura 14. Luego proceda como en el ejemplo 4.

$$F = \delta \int_{-4}^{0} (16 - y^2)^{1/2}(-2y\,dy) = \delta\left[\tfrac{2}{3}(16 - y^2)^{3/2}\right]_{-4}^{0}$$

$$= (50)\left(\tfrac{2}{3}\right)(16)^{3/2} \approx 2133 \text{ libras}$$

■

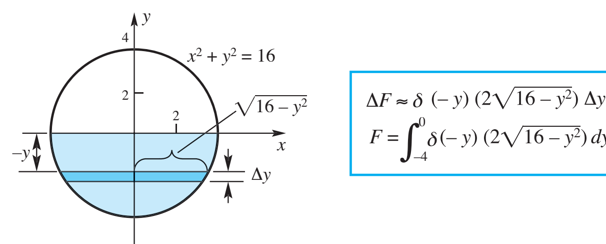


Figura 14

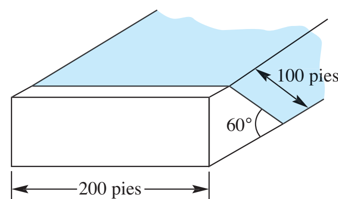


Figura 15

EJEMPLO 6 El lado del agua de una presa es un rectángulo inclinado a 60° respecto a la horizontal, con dimensiones de 200 por 100 pies, como se muestra en la figura 15. Determine la fuerza total ejercida por el agua contra la presa, cuando el nivel del agua llega a la parte superior de la presa.

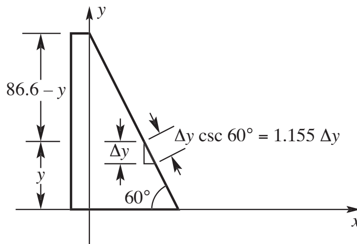


Figura 16

SOLUCIÓN Coloque el extremo de la presa en el sistema de coordenadas, como se muestra en la figura 16. Observe que la altura vertical de la presa es 100 sen 60° ≈ 86.6 pies.

$$F = (62.4)(200)(1.155)\int_0^{86.6} (86.6 - y)\, dy$$

$$= (62.4)(200)(1.155)\left[86.6y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{86.6}$$

$$\approx 54{,}100{,}000 \text{ libras}$$

■

Revisión de conceptos

1. El trabajo realizado por una fuerza F, al mover un objeto a lo largo de una línea recta desde a hasta b, es ________, si F es constante; pero es ________ si $F = F(x)$ es variable.

2. El trabajo realizado al levantar un objeto, que pesa 30 libras, desde el nivel del suelo hasta una altura de 10 pies es ________ libras-pie.

3. La fuerza ejercida sobre una parte pequeña de una superficie dada por un fluido, sólo depende de ________.

4. El peso de una columna de fluido sobre una región con área A a una profundidad de h es ________.

Conjunto de problemas 5.5

1. Se requiere una fuerza de 6 libras para mantener estirado un resorte $\frac{1}{2}$ pie de su longitud normal. Encuentre el valor de la constante del resorte y el trabajo realizado al estirar el resorte $\frac{1}{2}$ pie de su longitud normal.

2. Para el resorte del problema 1, ¿cuánto trabajo se realiza al estirarlo 2 pies?

3. Se requiere una fuerza de 0.6 newtons para mantener un resorte, de longitud natural de 0.08 metros, comprimido a una longitud de 0.07 metros. Encuentre el trabajo realizado para comprimir el resorte de su longitud natural a la longitud de 0.06 metros. (La Ley de Hooke se aplica a la compresión, igual que al estiramiento).

4. Se requieren 0.05 joules (newtons–metro) de trabajo para estirar un resorte desde una longitud de 8 a 9 centímetros, y otros 0.10 joules para estirarlo de 9 a 10 centímetros. Determine la constante del resorte y encuentre la longitud natural del resorte.

5. Para cualquier resorte que cumple la Ley de Hooke, demuestre que el trabajo realizado para estirar el resorte una distancia d está dado por $W = \frac{1}{2}kd^2$.

6. Para cierto tipo de resorte no lineal, la fuerza requerida para mantenerlo estirado una distancia s está dada por la fórmula $F = ks^{4/3}$. Si la fuerza requerida para mantenerlo estirado 8 pulgadas es de 2 libras, ¿cuánto trabajo se realiza para estirar 27 pulgadas este resorte?

7. Un resorte es tal que la fuerza requerida para mantenerlo estirado s pies está dada por $F = 9s$ libras. ¿Cuánto trabajo se hace para estirarlo 2 pies?

8. Dos resortes similares S_1 y S_2, cada uno de 3 pies de longitud, son tales que la fuerza requerida para mantener a cualquiera de ellos estirado una distancia de s pies es $F = 6s$ libras. Un extremo de uno de los resortes se sujeta a un extremo del otro, y la combinación se estira entre las paredes de un cuarto de 10 pies de ancho (véase la figura 17). ¿Cuánto trabajo se hace al mover el punto medio, P, un pie hacia la derecha?

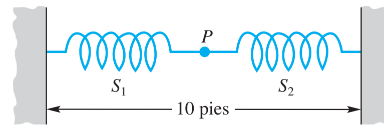
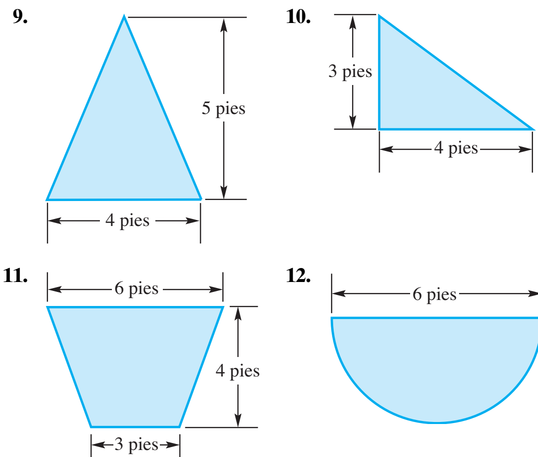


Figura 17

En cada uno de los problemas del 9 al 12 se muestra una sección transversal vertical de un depósito. Supóngase que el depósito tiene 10 pies de largo, está lleno de agua y se bombea este líquido hasta una altura de 5 pies por encima del borde superior del depósito. Encuentre el trabajo hecho para vaciar el tanque.



13. Encuentre el trabajo realizado al bombear todo el aceite (densidad $\delta = 50$ libras por pie cúbico) sobre el borde de un depósito cilíndrico que está apoyado sobre una de sus bases. Suponga que el radio de la base es de 4 pies, la altura es de 10 pies y el tanque está lleno de aceite.

14. Resuelva el problema 13, suponiendo que el depósito tiene secciones transversales circulares de radio $4 + x$ pies a la altura de x pies por arriba de la base.

15. Un volumen v de gas está confinado en un cilindro, un extremo del cual está cerrado por medio de un pistón móvil. Si A es el área en pulgadas cuadradas de la cara del pistón y x es la distancia en pulgadas desde la cabeza del cilindro al pistón, entonces $v = Ax$. La presión del gas confinado es una función continua p del volumen, $p(v) = p(Ax)$ se denotará por $f(x)$. Demuestre que el trabajo hecho por el pistón al comprimir el gas desde un volumen $v_1 = Ax_1$ a un volumen $v_2 = Ax_2$ es

$$W = A\int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx$$

Sugerencia: la fuerza total en la cara del pistón es $p(v) \cdot A = p(Ax) \cdot A = A \cdot f(x)$.

C **16.** Un cilindro y pistón, cuya área de sección transversal es de 1 pulgada cuadrada, contiene 16 pulgadas cúbicas de gas bajo una presión de 40 libras por pulgada cuadrada. Si la presión y el volumen del gas se relacionan de manera adiabática (es decir, sin pérdida de calor) por la ley $pv^{1.4} = c$ (una constante), ¿cuánto trabajo hace el pistón al comprimir el gas a 2 pulgadas cúbicas?

C **17.** Encuentre el trabajo realizado por el pistón del problema 16, si el área de la cara del pistón es de 2 pulgadas cuadradas.

18. Un pie cúbico de aire bajo una presión de 80 libras por pulgada cuadrada se expande adiabáticamente a 4 pies cúbicos, de acuerdo con la ley $pv^{1.4} = c$. Encuentre el trabajo realizado por el gas.

19. Un cable que pesa 2 libras por pie se utiliza para levantar una carga de 200 libras hasta la parte superior de un pozo que tiene 500 pies de profundidad. ¿Cuánto trabajo se realiza?

20. Un mono de 10 libras cuelga del extremo inferior de una cadena de 20 pies, la cual pesa $\frac{1}{2}$ libra por pie. ¿Cuánto trabajo realiza al trepar por la cadena hasta su extremo superior? Suponga que el extremo inferior de la cadena está sujeto al mono.

21. Una cápsula espacial que pesa 5000 libras es impulsada a una altura de 200 millas por arriba de la superficie de la Tierra. ¿Cuánto trabajo se realiza en contra de la fuerza de gravedad? Suponga que la Tierra es una esfera de radio de 4000 millas y que la fuerza de gravedad es $f(x) = -k/x^2$, en donde x es la distancia desde el centro de la Tierra a la cápsula (ley inversa del cuadrado). Por lo tanto, la fuerza de elevación que se requiere es k/x^2, y ésta es igual a 5000 cuando $x = 4000$.

22. De acuerdo con la Ley de Coulomb, dos cargas eléctricas iguales se repelen entre sí con una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Si la fuerza de repulsión es de 10 dinas (1 dina $= 10^{-5}$ newton) cuando están separadas 2 centímetros, encuentre el trabajo realizado para llevar las cargas de una separación de 5 centímetros a una separación de 1 centímetro.

23. Un depósito con peso de 100 libras se llena con arena, la cual pesa 500 libras. Una grúa levanta el depósito desde el piso hasta un punto a 80 pies a una velocidad de 2 pies por segundo, pero al mismo tiempo la arena sale por un agujero a razón de 3 libras por segundo. Sin tomar en cuenta la fricción ni el peso del cable, determine cuánto trabajo se realiza. *Sugerencia:* comience por estimar ΔW, el trabajo requerido para elevar el depósito desde y hasta $y + \Delta y$.

C **24.** Ciudad Central acaba de construir una nueva torre de agua (véase la figura 18). Sus elementos principales consisten en un tanque esférico que tiene un radio interno de 10 pies y un tubo de 30 pies de largo para llenar. El tubo para llenar es cilíndrico con diámetro interno de 1 pie. Suponga que se bombea agua desde el nivel del piso hasta el tanque, por medio del tubo. ¿Cuánto trabajo se realiza para llenar el tubo y el tanque con agua?

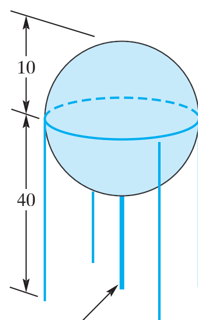
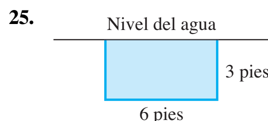


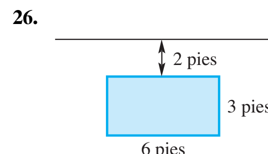
Figura 18

En los problemas del 25 al 30 suponga que la región sombreada es parte de un lado vertical de un depósito con agua (δ = 62.4 libras por pie cúbico) en el nivel que se muestra. Determine la fuerza total ejercida por el agua contra esta región.

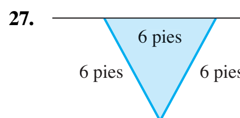
25.



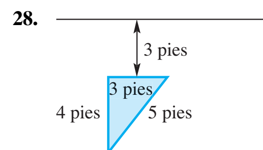
26.



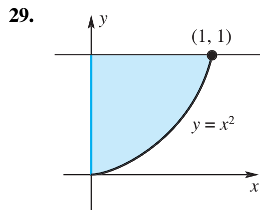
27.



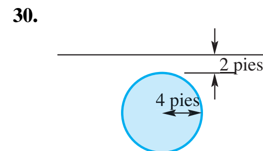
28.



29.



30.



31. Demuestre que si una presa vertical, con forma rectangular, se divide a la mitad, por medio de una diagonal, la fuerza total ejercida por el agua sobre la mitad de la presa es el doble que en la otra mitad. Suponga que el lado superior de la presa está al mismo nivel que la superficie del agua.

32. Determine la fuerza total ejercida por el agua sobre todos los lados de un cubo, con lado de 2 pies de longitud, si su tapa es horizontal y 100 pies debajo de la superficie de un lago.

33. Determine la fuerza total ejercida por el agua contra la parte inferior de la alberca que se muestra en la figura 19, suponiendo que está llena de agua.

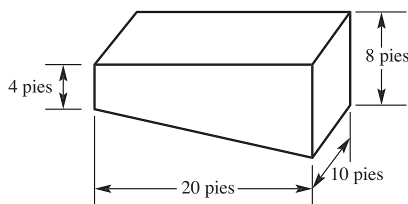


Figura 19

34. Determine la fuerza total ejercida por el fluido contra la superficie lateral de un cilindro circular recto, con altura de 6 pies, que está apoyado sobre su base circular con 5 pies de radio, si está lleno de aceite ($\delta = 50$ libras por pie cúbico).

35. Una boya cónica pesa m libras y flota con su vértice V hacia abajo y h pies por debajo de la superficie del agua (véase la figura 20). Un bote grúa eleva la boya hasta la cubierta, de modo que V está 15 pies por arriba de la superficie del agua. ¿Cuánto trabajo se realiza? Su*gerencia:* utilice el principio de Arquímedes, el cual dice que la fuerza requerida para mantener la boya y pies por arriba de su posición original ($0 \le y \le h$) es igual a su peso menos el peso del agua desplazada por la boya.

36. Al principio, el depósito inferior en la figura 21 estaba lleno de agua y el tanque de arriba estaba vacío. Encuentre el trabajo realizado al bombear toda el agua al tanque de arriba. Las dimensiones están en pies.

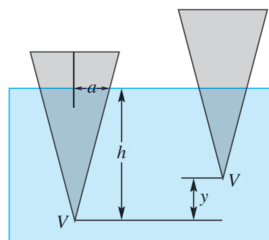


Figura 20

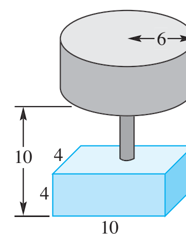


Figura 21

37. En lugar de elevar la boya del problema 35 y figura 20 fuera del agua, suponga que intentamos empujarla hasta que su extremo superior esté al ras del nivel del agua. Suponga que $h = 8$, que el extremo superior originalmente está a 2 pies por arriba del nivel del agua, y que la boya pesa 300 libras. ¿Cuánto trabajo se requiere? *Sugerencia:* no necesita conocer a (el radio al nivel del agua), pero es útil saber que $\delta\left(\frac{1}{3}\pi a^2\right)(8) = 300$. El principio de Arquímedes implica que la fuerza necesaria para mantener la boya z pies ($0 \le z \le 2$) por debajo de su posición de flotación es igual al peso del agua adicional desplazada.

Respuestas a la revisión de conceptos:

1. $F \cdot (b - a)$; $\int_a^b F(x)\,dx$ **2.** 300 **3.** la profundidad de esa parte con respecto a la superficie **4.** $\delta h A$

5.6 Momentos y centro de masa

Supóngase que dos masas de tamaños m_1 y m_2 se colocan en un sube y baja a distancias respectivas d_1 y d_2 del punto de apoyo (fulcro) y en lados opuestos a él (véase la figura 1). El sube y baja se equilibrará si y sólo si $d_1 m_1 = d_2 m_2$.

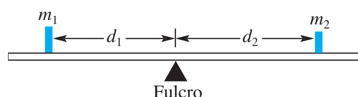


Figura 1

Un buen modelo matemático para esta situación se obtiene al reemplazar el sube y baja por un eje coordenado horizontal que tenga su origen en el fulcro (véase la figura 2). Entonces la coordenada x (abscisa) de m_1 es $x_1 = -d_1$, la de m_2 es $x_2 = d_2$, y la condición de equilibrio es

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 = 0$$

El producto de la masa m de una partícula por su distancia *dirigida* desde un punto (su brazo de palanca) se denomina **momento** de la partícula respecto a ese punto (véase la figura 3). Asimismo, mide la tendencia de la masa a producir una rotación alrededor de ese punto. La condición para que dos masas a lo largo de esta recta estén en equilibrio es que la suma de sus momentos con respecto al punto sea cero.

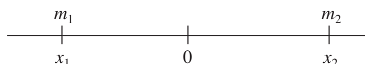


Figura 2

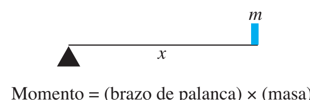


Figura 3

La situación que se acaba de describir puede generalizarse. El momento total M (con respecto al origen) de un sistema de n masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ubicados en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a lo largo del eje x es la suma de los momentos individuales; esto es,

$$M = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$$

La condición para el equilibrio en el origen es que $M = 0$. Por supuesto, no debemos esperar equilibrio en el origen, excepto en circunstancias especiales. Pero seguramente un sistema de masas se equilibrará en alguna parte. La pregunta es dónde. ¿Cuál es la abscisa del punto en donde el fulcro debe colocarse para que el sistema en la figura 4 esté en equilibrio?

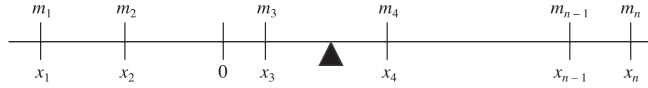


Figura 4

Llámese $\overline{x}$ a la coordenada deseada. El momento total con respecto a ésta debe ser cero; esto es,

$$(x_1 - \overline{x})m_1 + (x_2 - \overline{x})m_2 + \cdots + (x_n - \overline{x})m_n = 0$$

o

$$x_1m_1 + x_2m_2 + \cdots + x_nm_n = \overline{x}m_1 + \overline{x}m_2 + \cdots + \overline{x}m_n$$

Cuando despejamos a $\overline{x}$, obtenemos

$$\overline{x} = \frac{M}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

El punto $\overline{x}$, que se denomina **centro de masa**, es el punto de equilibrio. Observe que sólo es el momento total con respecto al origen dividido entre la masa total.

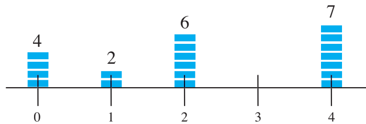


Figura 5

EJEMPLO 1 En los puntos 0, 1, 2 y 4, a lo largo del eje x, hay masas de 4, 2, 6 y 7 kilogramos, respectivamente (véase la figura 5). Encuentre el centro de masa.

SOLUCIÓN

$$\overline{x} = \frac{(0)(4) + (1)(2) + (2)(6) + (4)(7)}{4 + 2 + 6 + 7} = \frac{42}{19} \approx 2.21$$

≈ Su intuición debe confirmarle que $x = 2.21$ es casi el punto de equilibrio correcto. ■

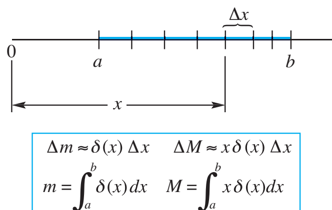


Figura 6

Distribución continua de masa a lo largo de una recta Ahora considere un segmento recto de un alambre delgado de densidad variable (masa por unidad de longitud) para el que queremos encontrar el punto de equilibrio. Colocamos un eje coordenado a lo largo del alambre y seguimos nuestro procedimiento usual de *rebanar, aproximar* e *integrar*. Suponiendo que la densidad en x es $\delta(x)$, primero obtenemos la masa total m y después el momento total M con respecto al origen (véase la figura 6). Esto lleva a la fórmula

$$\overline{x} = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x\delta(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)\,dx}$$

Son pertinentes dos comentarios. Primero, recuérdese esta fórmula por analogía con la fórmula para masas puntuales:

$$\frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} \sim \frac{\sum x\, \Delta m}{\sum \Delta m} \sim \frac{\int x\, \delta(x)\, dx}{\int \delta(x)\, dx}$$

Segundo, observe que hemos supuesto que los momentos de todos los pedazos pequeños de alambre se suman para obtener el momento total, tal como en el caso de las masas puntuales. Esto debe parecerle razonable si imagina que la masa del pedazo representativo de longitud Δx está concentrada en el punto x.

EJEMPLO 2 La densidad $\delta(x)$ de un alambre en el punto a x centímetros de uno de los extremos está dada por $\delta(x) = 3x^2$ gramos por centímetro. Encuentre el centro de masa del pedazo entre $x = 0$ y $x = 10$.



Figura 7

SOLUCIÓN Esperamos que $\bar{x}$ sea más cercana a 10 que a 0, ya que el alambre es mucho más pesado (denso) hacia el extremo derecho (véase la figura 7).

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{10} x \cdot 3x^2\, dx}{\int_0^{10} 3x^2\, dx} = \frac{\left[3x^4/4\right]_0^{10}}{\left[x^3\right]_0^{10}} = \frac{7500}{1000} = 7.5 \text{ cm}$$ ■

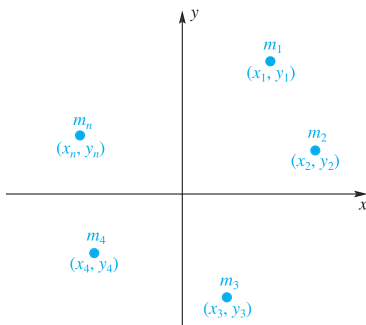


Figura 8

Distribuciones de masa en un plano

Considere n masas puntuales de magnitudes $m_1, m_2, \ldots, m_n$ situadas en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ en el plano coordenado (véase la figura 8). Entonces, los momentos totales M_y y M_x respecto al eje y y al eje x, respectivamente, están dados por

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \qquad M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i$$

Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa (punto de equilibrio) son

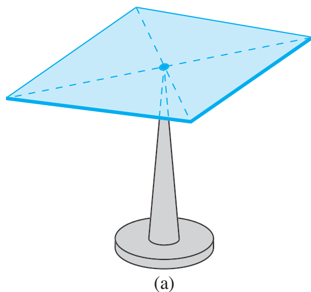
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

EJEMPLO 3 Cinco partículas de masas 1, 4, 2, 3 y 2 unidades, están colocadas en los puntos (6, –1), (2, 3), (–4, 2), (–7, 4) y (2, –2), respectivamente. Encuentre el centro de masa.

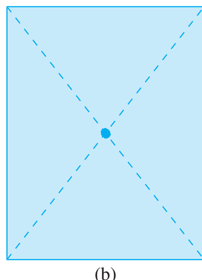
SOLUCIÓN

$$\bar{x} = \frac{(6)(1) + (2)(4) + (-4)(2) + (-7)(3) + (2)(2)}{1 + 4 + 2 + 3 + 2} = -\frac{11}{12}$$

$$\bar{y} = \frac{(-1)(1) + (3)(4) + (2)(2) + (4)(3) + (-2)(2)}{1 + 4 + 2 + 3 + 2} = \frac{23}{12}$$ ■



(a)



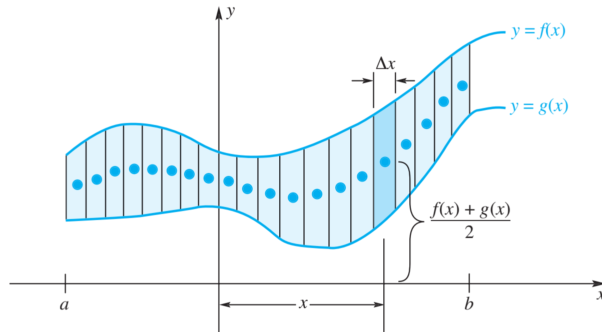
(b)

Figura 9

Ahora consideramos el problema de encontrar el centro de masa de una *lámina* (hoja plana delgada). Por simplicidad, suponemos que es homogénea; esto es, tiene densidad constante δ. Para una hoja rectangular homogénea, el centro de masa (en ocasiones denominado centro de gravedad) está en el centro geométrico, como lo sugieren los diagramas (a) y (b) en la figura 9.

Considere la lámina homogénea acotada por $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ y $y = g(x)$, con $g(x) \leq f(x)$. *Rebane* esta lámina en delgadas tiras paralelas al eje y, las cuales por lo tanto tienen forma casi rectangular, e imagine la masa de cada tira concentrada en su centro geométrico. Después *aproxime* e *integre* (véase la figura 10). Con base en esto podemos calcular las coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ del centro de masa utilizando las fórmulas

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{m}$$



$\Delta m \approx \delta\,[f(x) - g(x)]\,\Delta x$	$\Delta M_y \approx x\,\delta\,[f(x) - g(x)]\,\Delta x$	$\Delta M_x \approx \frac{\delta}{2}\,[(f(x))^2 - (g(x))^2]\,\Delta x$
$m = \delta\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$	$M_y = \delta\int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\,dx$	$M_x = \frac{\delta}{2}\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\,dx$

Figura 10

Cuando lo hacemos, se cancela el factor δ del numerador y del denominador, y obtenemos

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx}{\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\int_a^b \frac{f(x) + g(x)}{2}[f(x) - g(x)]\,dx}{\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx} = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]\,dx}{\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$

Algunas veces, rebanar en dirección paralela al eje x funciona mejor que rebanar en dirección paralela al eje y. Esto conduce a fórmulas para $\overline{x}$ y $\overline{y}$ en la que y es la variable de integración. No intente memorizar todas estas fórmulas. Es mucho mejor recordar cómo se dedujeron.

El centro de masa de una lámina homogénea no depende de su masa o densidad, sino sólo de la forma de la región correspondiente en el plano. Así que nuestro problema se convierte en un problema geométrico en lugar de uno físico. En consecuencia, frecuentemente hablamos del **centroide** de una región plana en lugar del centro de masa de una lámina homogénea.

EJEMPLO 4 Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y = x^3$ y $y = \sqrt{x}$.

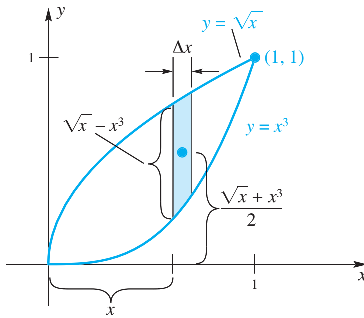


Figura 11

SOLUCIÓN Observe el diagrama en la figura 11.

$$\overline{x} = \frac{\int_0^1 x(\sqrt{x} - x^3)\,dx}{\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)\,dx} = \frac{\left[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1}{\left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{25}$$

$$\overline{y} = \frac{\int_0^1 \frac{1}{2}(\sqrt{x} + x^3)(\sqrt{x} - x^3)\,dx}{\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)\,dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 \left[(\sqrt{x})^2 - (x^3)^2\right] dx}{\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)\,dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{5}{28}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{7}$$

El centroide se muestra en la figura 12. ■

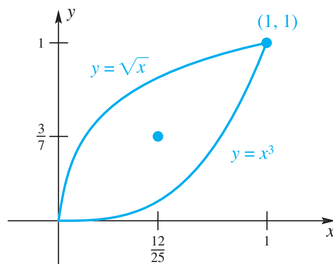


Figura 12

EJEMPLO 5 Encuentre el centroide de la región bajo la curva $y = \operatorname{sen} x, 0 \le x \le \pi$ (véase la figura 13).

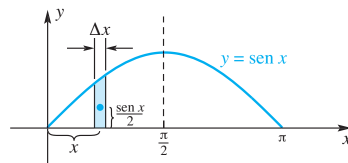


Figura 13

SOLUCIÓN Esta región es simétrica respecto a la recta $x = \pi/2$, de lo cual concluimos (sin integrar) que $\overline{x} = \pi/2$. En efecto, es tanto intuitivamente obvio como cierto que si una región tiene una recta vertical u horizontal de simetría, entonces el centroide estará en esa recta.

Su intuición también debe decirle que $\overline{y}$ será menor a $\frac{1}{2}$, ya que una mayor cantidad de la región está por debajo de $\frac{1}{2}$ que por encima de $\frac{1}{2}$. Pero para encontrar de manera exacta este número, debemos calcular

$$\overline{y} = \frac{\int_0^\pi \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x\,dx}{\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\,dx}{\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx}$$

El denominador es fácil de calcular, tiene valor 2. Para calcular el numerador, utilizamos la fórmula del ángulo medio $\operatorname{sen}^2 x = (1 - \cos 2x)/2$.

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi 1\,dx - \int_0^\pi \cos 2x\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

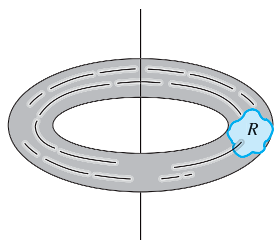


Figura 14

Por lo tanto,

$$\overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{8} \approx 0.39$$ ■

El teorema de Pappus Alrededor de 300 a. C., el geómetra griego Pappus estableció un novedoso resultado, el cual relaciona centroides con volúmenes de sólidos de revolución (véase la figura 14).

Teorema A Teorema de Pappus

Si una región R, que está de un lado de una recta en su plano, se hace girar alrededor de esa recta, el volumen del sólido resultante es igual al área de R multiplicada por la distancia recorrida por su centroide.

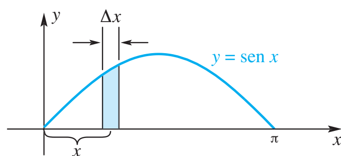


Figura 15

En lugar de demostrar este teorema, que en realidad es muy sencillo (véase el problema 28), lo ilustraremos.

EJEMPLO 6 Verifique el teorema de Pappus para la región bajo $y = \text{sen } x$, $0 \leq x \leq \pi$, cuando se hacer girar alrededor del eje x (véase la figura 15).

SOLUCIÓN Ésta es la región del ejemplo 5, para la cual $\bar{y} = \pi/8$. El área A de esta región es

$$A = \int_0^{\pi} \text{sen } x\, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2$$

El volumen V del sólido de revolución correspondiente es

$$V = \pi \int_0^{\pi} \text{sen}^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} [1 - \cos 2x]\, dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\text{sen } 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

Para verificar el teorema de Pappus, debemos demostrar que

$$A \cdot (2\pi\bar{y}) = V$$

Pero esto equivale a demostrar que

$$2\left(2\pi\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi^2}{2}$$

que claramente es cierto. ■

Revisión de conceptos

1. Un objeto de masa 4 está en $x = 1$ y un segundo objeto de masa 6 está en $x = 3$. La simple intuición geométrica nos dice que el centro de masa estará a la ______ de $x = 2$. De hecho, está en $\bar{x} =$ ______.

2. Un alambre homogéneo se encuentra a lo largo del eje x, entre $x = 0$ y $x = 5$, se balanceará en $\bar{x} =$ ________. Sin embargo, si el alambre tiene densidad $\delta(x) = 1 + x$, se equilibrará a la ________ de 2.5. De hecho, se equilibrará en $\bar{x}$, donde $\bar{x} = \int_0^5$ ____ $dx \Big/ \int_0^5$ _____ dx.

3. La lámina homogénea rectangular con vértices en los puntos (0, 0), (2, 0), (2, 6) y (0, 6) se equilibrará en $\bar{x} =$ _____, $\bar{y} =$ _____.

4. Una lámina rectangular con vértices en (2, 0), (4, 0), (4, 2) y (2, 2) está sujeta a la lámina de la pregunta 3. Suponiendo que ambas láminas tienen la misma densidad constante, la lámina resultante en forma de L se equilibrará en $\bar{x} =$ _____, $\bar{y} =$ _____.

Conjunto de problemas 5.6

1. Partículas con masas $m_1 = 5$, $m_2 = 7$ y $m_3 = 9$, están ubicadas en $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ y $x_3 = 1$ a lo largo de una recta. ¿En dónde está el centro de masa?

2. Juan y María pesan 180 y 110 libras, respectivamente, se sientan en extremos opuestos de un sube y baja de 12 pies de largo, con el fulcro a la mitad. ¿En dónde debe sentarse su hijo Tom, de 80 libras, para que se equilibre el sube y baja?

3. Un alambre recto de 7 unidades de largo tiene densidad $\delta(x) = \sqrt{x}$ en un punto a x unidades de un extremo. Encuentre la distancia desde este extremo al centro de masa.

4. Resuelva el problema 3 si $\delta(x) = 1 + x^3$.

5. Las masas y las coordenadas de un sistema de partículas en el plano coordenado están dadas por: 2, (1, 1); 3, (7, 1); 4, (−2, −5); 6, (−1, 0); 2, (4, 6). Encuentre los momentos de este sistema respecto a los ejes coordenados y encuentre las coordenadas del centro de masa.

6. Las masas y coordenadas de un sistema de partículas están dadas por: 5, (−3, 2); 6, (−2, −2); 2, (3, 5); 7, (4, 3); 1, (7, −1). Encuentre los momentos de este sistema respecto a los ejes coordenados y encuentre las coordenadas del centro de masa.

7. Verifique las expresiones para ΔM_y, ΔM_x, M_y y M_x en el recuadro que está en la parte inferior de la figura 10.

En los problemas del 8 al 16 encuentre el centroide de la región acotada por las curvas dadas. Haga un dibujo y, cuando sea posible, utilice simetría.

8. $y = 2 - x$, $y = 0$, $x = 0$

9. $y = 2 - x^2$, $y = 0$

10. $y = \frac{1}{3}x^2$, $y = 0$, $x = 4$

11. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$

12. $y = \frac{1}{2}(x^2 - 10)$, $y = 0$, y entre $x = -2$ y $x = 2$

13. $y = 2x - 4$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 1$

14. $y = x^2$, $y = x + 3$

15. $x = y^2$, $x = 2$

16. $x = y^2 - 3y - 4$, $x = -y$

17. Para cada lámina homogénea R_1 y R_2 que se muestra en la figura 16, encuentre m, M_y, M_x, $\bar{x}$, y $\bar{y}$.

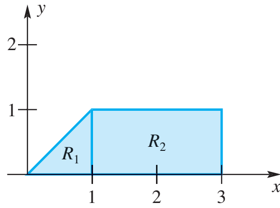


Figura 16

18. Para la lámina homogénea que se muestra en la figura 17, encuentre m, M_y, M_x, $\bar{x}$, y $\bar{y}$.

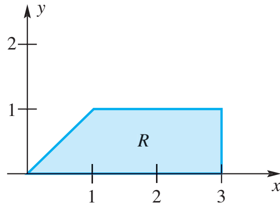


Figura 17

19. Considere las láminas homogéneas R_1 y R_2, que se muestran en la figura 18, y la lámina homogénea R_3, que es la unión de R_1 y R_2. Para $i = 1, 2, 3$, sean $m(R_i)$, $M_y(R_i)$ y $M_x(R_i)$ denote la masa, el momento respecto al eje y y el momento con respecto al eje x, respectivamente, de R_i. Demuestre que

$$m(R_3) = m(R_1) + m(R_2)$$
$$M_y(R_3) = M_y(R_1) + M_y(R_2)$$
$$M_x(R_3) = M_x(R_1) + M_x(R_2)$$

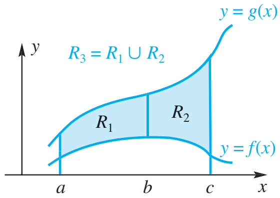


Figura 18

20. Repita el problema 19 para las láminas R_1 y R_2 que se muestran en la figura 19.

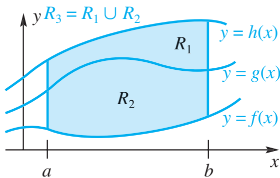
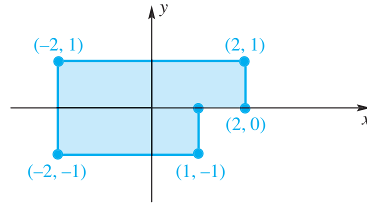


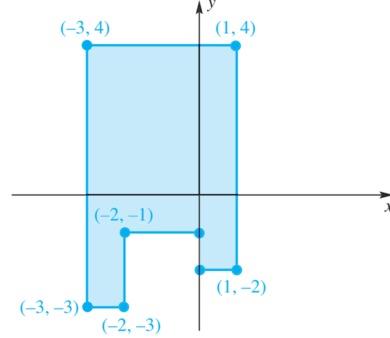
Figura 19

En los problemas del 21 al 24 divida la región que se muestra en piezas rectangulares y suponga que los momentos M_x y M_y de toda la región pueden determinarse sumando los momentos correspondientes de las piezas. (Véanse los problemas 19 y 20.) Utilice esto para determinar el centroide de cada región.

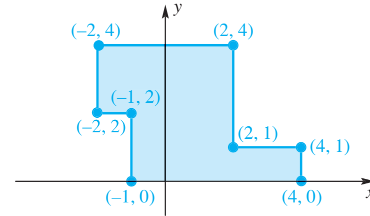
21.



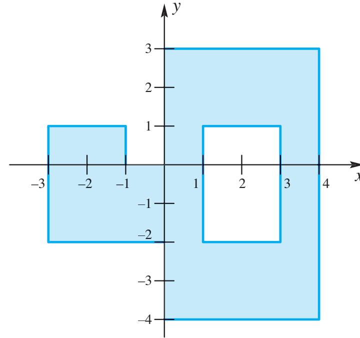
22.



23.



24.



25. Utilice el teorema de Pappus para encontrar el volumen del sólido obtenido cuando la región acotada por $y = x^3$, $y = 0$ y $x = 1$ se hace girar alrededor del eje y (véase el problema 11 para el centroide). Resuelva el mismo problema por medio del método de los cascarones cilíndricos para verificar su respuesta.

26. Utilice el teorema de Pappus para encontrar el volumen del toro que se obtiene cuando la región dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ se hace girar alrededor de la recta $x = 2a$.

27. Utilice el teorema de Pappus junto con el volumen conocido de una esfera para determinar el centroide de una región semicircular de radio a.

28. Demuestre el teorema de Pappus suponiendo que la región de área A, en la figura 20, se hace girar alrededor del eje y. *Sugerencia:* $V = 2\pi\int_a^b xh(x)\,dx$ y $\overline{x} = \int_a^b (xh(x)\,dx)/A$.

29. La región de la figura 20 se hace girar alrededor de la recta $y = K$, generando un sólido.

(a) Utilice cascarones cilíndricos para escribir una fórmula para el volumen en términos de $\omega(y)$.

(b) Demuestre que la fórmula de Pappus, cuando se simplifica, proporciona el mismo resultado.

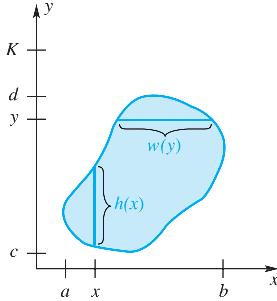


Figura 20

30. Considere el triángulo T de la figura 21.

(a) Demuestre que $\overline{y} = h/3$ (y, por lo tanto, que el centroide de un triángulo está en la intersección de las medianas).

(b) Encuentre el volumen del sólido que se obtiene cuando T se hace girar alrededor de $y = k$ (teorema de Pappus).

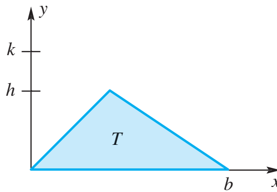


Figura 21

31. Un polígono regular P con $2n$ lados está inscrito en un círculo de radio r.

(a) Encuentre el volumen del sólido que se obtiene cuando P se hace girar alrededor de uno de sus lados.

(b) Verifique su respuesta haciendo $n \to \infty$.

32. Sea f una función continua y no negativa en $[0, 1]$.

(a) Demuestre que $\int_0^\pi xf(\operatorname{sen} x)\,dx = (\pi/2)\int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\,dx$.

(b) Utilice la parte (a) para evaluar $\int_0^\pi x \operatorname{sen} x \cos^4 x\,dx$.

33. Sea $0 \le f(x) \le g(x)$ para toda x en $[0, 1]$, y sean R y S las regiones bajo las gráficas de f y g, respectivamente. Demuestre o refute que $\overline{y}_R \le \overline{y}_S$.

C **34.** Aproxime el centroide de la lámina que se muestra en la figura 22. Todas las medidas están en centímetros y las medidas horizontales están separadas 5 centímetros una de la otra.

C **35.** Se taladra un agujero con radio de 2.5 centímetros en la lámina que se describe en el problema 34. La ubicación del agujero se muestra en la figura 23. Encuentre el centroide de la lámina resultante.

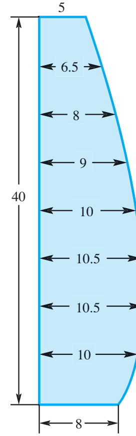


Figura 22

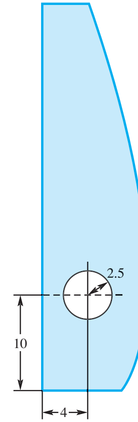


Figura 23

C **36.** El **centro geográfico** de una región (condado, estado, país) se define como el centroide de esa región. Utilice el mapa de la figura 24 para aproximar el centro geográfico de Illinois. Todas las distancias están aproximadas y están en millas. Las distancias dadas, este-oeste, están separadas 20 millas. También necesitará las distancias entre la frontera este del estado y la línea que va de norte a sur, la cual forma la frontera este en el centro del estado. Comenzando con las dimensiones situadas más al norte, las distancias son de 13 y 10 millas; e iniciando con las dimensiones ubicadas más al sur, las distancias son 85 (en la punta sur), 50, 30, 25, 15 y 10 millas. Suponga que las demás dimensiones este–oeste se miden a partir de la frontera que está más al este.

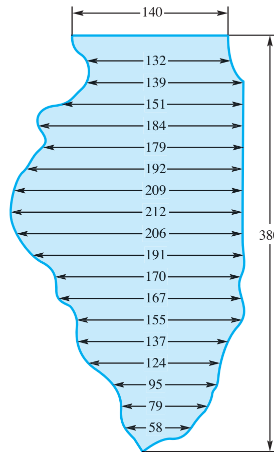


Figura 24

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** derecha; $(4 \cdot 1 + 6 \cdot 3)/(4 + 6) = 2.2$ **2.** 2.5; derecha; $x(1 + x)$; $(1 + x)$ **3.** 1; 3 **4.** $\frac{24}{16}$, $\frac{40}{16}$

5.7 Probabilidad y variables aleatorias

En muchas situaciones, el resultado de un experimento varía de un ensayo al siguiente. Por ejemplo, al lanzar una moneda algunas veces caerá cara y otras, cruz; un lanzador de las ligas mayores puede lanzar 2 entradas en un juego y 7 en otro; una batería de un automóvil puede durar 20 meses y otra, 40 meses. Decimos que el resultado de un experimento es **aleatorio** si el resultado varía de un ensayo a otro, pero que a la larga, esto es, después de un número grande de repeticiones, existe una distribución regular de los resultados.

Algunos resultados ocurren de forma frecuente, tal como la llegada segura a su destino después de un vuelo, mientras que algunos eventos ocurren rara vez, como ganar en la lotería. Utilizamos la probabilidad para medir qué tan probables son los resultados o eventos (conjunto de resultados). Un evento que es casi seguro que suceda tiene una probabilidad cercana a 1. Un evento que raramente ocurre tiene probabilidad cercana a cero. Un evento que es tan probable que suceda como de que no ocurra, como obtener una cara en el lanzamiento de una moneda balanceada, tendrá una probabilidad de $\frac{1}{2}$. En general, la probabilidad de un evento es la proporción de veces que el evento ocurrirá en una sucesión grande de ensayos. Si A es un evento, esto es, un conjunto de posibles resultados, entonces denotamos la probabilidad de A por $P(A)$. Las probabilidades deben satisfacer las siguientes propiedades:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo evento A.
2. Si S es el conjunto de todos los resultados posibles, denominado **espacio muestral**, entonces $P(S) = 1$.
3. Si los eventos A y B son **disjuntos**, esto es, no tienen resultados en común, entonces $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$. (En realidad, se requiere una condición más fuerte, pero por ahora esto funcionará).

Con estos enunciados podemos deducir lo siguiente: si A^c denota al complemento del evento A, esto es, el conjunto de todos los resultados en el espacio muestral S que no están en el evento A, entonces $P(A^c) = 1 - P(A)$. Además, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son disjuntos, entonces $P(A_1 \text{ o } A_2 \text{ o } \cdots \text{ o } A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$.

Una regla que asigna un valor numérico al resultado de un experimento se denomina **variable aleatoria**. Es costumbre utilizar letras mayúsculas para denotar a las variables aleatorias y letras minúsculas para denotar valores posibles o reales para las variables aleatorias. Por ejemplo, nuestro experimento podría ser el lanzamiento de tres monedas balanceadas. En este caso, el espacio muestral es el conjunto {*HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT*}. Podríamos definir la variable aleatoria X como el número de caras en los tres lanzamientos. La **distribución de probabilidad** de X, esto es, una lista de todos los valores posibles de X, junto con sus probabilidades correspondientes, se mostrará en una tabla como la siguiente.

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Un concepto importante en probabilidad y estadística es el de la esperanza de una variable aleatoria. Para motivar la definición, que se dará más adelante, considere el siguiente experimento. Imagine el lanzamiento repetido de tres monedas a la vez. Para ilustrar esto, suponga que las tres monedas se lanzarán 10,000 veces. Por medio de nuestra definición de probabilidad, "esperamos" ver cero caras un octavo de las veces en los ensayos, esto es $\frac{1}{8} \cdot 10{,}000 = 1250$ veces en una secuencia de 10,000. De forma análoga, esperaríamos $\frac{3}{8} \cdot 10{,}000 = 3750$ ocurrencias de una cara, $\frac{3}{8} \cdot 10{,}000 = 3750$ ocurrencias de dos caras y $\frac{1}{8} \cdot 10{,}000 = 1250$ ocurrencias de tres caras. ¿Cuántas caras en total esperaríamos ver en 10,000 lanzamientos de 3 monedas? Esperaríamos

cero caras 1250 veces, para un total de 0 caras,
una cara 3750 veces, para un total de 3750 caras,
dos caras 3750 veces, para un total de 7500 caras,
tres caras 1250 veces, para un total de 3750 caras.

En total, esperaríamos 0 + 3759 + 7500 + 3750 = 15,000 caras. Por lo tanto, esperamos 15,000/10,000 = 1.5 caras por ensayo (lanzamiento de tres monedas). Un poco de reflexión sobre los cálculos sugiere que 10,000 es arbitrario y que se eliminará de todos modos. Multiplicamos cada probabilidad por 10,000 para obtener la frecuencia esperada, pero luego dividimos entre 10,000. Esto es,

$$\begin{aligned}1.5 &= \frac{15{,}000}{10{,}000}\\ &= \frac{1}{10{,}000}[0P(X=0)\,10{,}000 + 1P(X=1)\,10{,}000\\ &\qquad + 2P(X=2)\,10{,}000 + 3P(X=3)\,10{,}000]\\ &= 0P(X=0) + 1P(X=1) + 2P(X=2) + 3P(X=3)\end{aligned}$$

Esta última línea es lo que queremos decir con esperanza.

Definición **Esperanza de una variable aleatoria**

Si X es una variable aleatoria con distribución de probabilidad

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

entonces la **esperanza** de X, denotada por $E(X)$, que también se denomina **media** de X y se denota con μ, es

$$\mu = E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

Como $\sum_{i=1}^{n} p_i$ (todas las probabilidades deben sumar 1), la fórmula para $E(X)$ es la misma para el centro de masa de un conjunto finito de partículas que tienen masas p_1, $p_2, \ldots, p_n$ ubicadas en las posiciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\text{Centro de masa} = \frac{M}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_ip_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_ip_i}{1} = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i = E(X)$$

EJEMPLO 1 Se fabrican 20 piezas de plástico a la vez, por medio de la inyección de plástico a un molde. Se inspeccionan las 20 piezas para buscar defectos tales como huecos (burbujas dentro de la pieza) y fracturas. Suponga que la distribución de probabilidad para el número de piezas defectuosas de las 20 está dada en la siguiente tabla.

x_i	0	1	2	3
p_i	0.90	0.06	0.03	0.01

Determine (a) la probabilidad de que un lote de 20 piezas tenga al menos una pieza defectuosa y (b) el número esperado de piezas defectuosas por lote de 20.

SOLUCIÓN

(a) $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$= 0.06 + 0.03 + 0.01 = 0.10$

(b) El valor esperado para el número de piezas defectuosas es

$$E(X) = 0 \cdot 0.90 + 1 \cdot 0.06 + 2 \cdot 0.03 + 3 \cdot 0.01 = 0.15$$

Por lo tanto, en promedio esperaríamos 0.15 piezas defectuosas por lote. ■

Modelos

Una vez, un famoso estadístico dijo: "Ningún modelo es correcto, pero muchos son útiles". Los modelos probabilísticos, como los de esta sección, deben considerarse como aproximaciones al mundo real, no como representaciones perfectamente exactas del mundo real.

Hasta ahora, en esta sección hemos tratado con variables aleatorias en donde el número de valores posibles es finito; esta situación es análoga a tener masas puntuales en la sección anterior. Existen otras situaciones en donde hay un número infinito de posibles resultados. Si el conjunto de valores posibles de una variable aleatoria X es finito, tal como $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, o es infinito, pero puede ponerse en una lista, tal como $\{x_1, x_2, \ldots\}$, entonces se dice que la variable aleatoria X es **discreta**. Si una variable aleatoria X puede tomar cualquier valor en algún intervalo de números reales, entonces decimos que X es una variable aleatoria **continua**. Existe una gran cantidad de situaciones en donde, al menos teóricamente, el resultado puede ser cualquier número real en un intervalo: por ejemplo, el tiempo de espera para la luz de alto, la masa de una pieza moldeada o el tiempo de vida de una batería. En la práctica, por supuesto, cada medida se redondea; por ejemplo, al segundo, miligramo, día, etcétera, más cercano. En situaciones como ésta, la variable aleatoria en realidad es discreta (con muchos posibles resultados), pero, con frecuencia, una variable aleatoria continua es una buena aproximación.

Las variables aleatorias continuas se estudian de una manera análoga a la distribución continua de masa de la sección anterior. Para una variable aleatoria continua debemos especificar la función de densidad de probabilidad (FDP). Una FDP para una variable aleatoria X que toma valores en el intervalo $[A, B]$ es una función que satisface

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_A^B f(x)\,dx = 1$
3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$ para toda a, b $(a \leq b)$ en el intervalo $[A, B]$

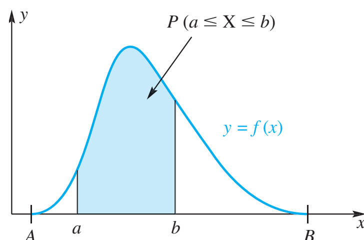


Figura 1

La tercera propiedad dice que podemos determinar probabilidades para una variable aleatoria continua determinando áreas bajo la FDP (véase la figura 1). Es costumbre definir a la FDP como cero fuera del intervalo $[A, B]$.

El **valor esperado,** o **media**, de una variable aleatoria continua X es

$$\mu = E(X) = \int_A^B x\,f(x)\,dx$$

Al igual que en el caso de las variables aleatorias discretas, ésta es análoga al centro de masa de un objeto con densidad variable:

$$\text{Centro de masa} = \frac{M}{m} = \frac{\int_A^B x\,f(x)\,dx}{\int_A^B f(x)\,dx} = \frac{\int_A^B x\,f(x)\,dx}{1} = \int_A^B xf(x)\,dx = E(X)$$

EJEMPLO 2 Una variable aleatoria continua X tiene FDP

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine (a) $P(1 \leq X \leq 9)$ (b) $P(X \geq 4)$ (c) $E(X)$.

SOLUCIÓN La variable aleatoria X toma valores en $[0, 10]$.

(a) $P(1 \leq X \leq 9) = \int_1^9 \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10} \cdot 8 = \frac{4}{5}$

(b) $P(X \geq 4) = \int_4^{10} \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10} \cdot 6 = \frac{3}{5}$

(c) $E(X) = \int_0^{10} x\frac{1}{10}\,dx = \left[\frac{x^2}{20}\right]_0^{10} = 5$

≈ ¿Son razonables estas respuestas? La variable aleatoria X se distribuye de manera uniforme en el intervalo $[0, 10]$, por lo que 80% de la probabilidad debe estar entre 1 y 9, al igual que 80% de la masa de una varilla uniforme estaría entre 1 y 9. Por simetría, esperaríamos que la media, o esperanza, de X sea 5, al igual que esperaríamos que el centro de masa de una barra uniforme de longitud 10 se encuentre a 5 unidades de cualquiera de los extremos. ■

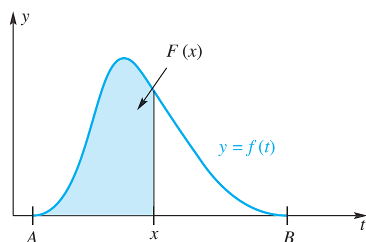


Figura 2

Una función relacionada estrechamente con la FDP es la **función de distribución acumulada** (FDA) que, para una variable aleatoria X, es la función F definida por

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Esta función está definida tanto para variables aleatorias discretas como continuas. Para una variable aleatoria discreta como la dada en el ejemplo 1, la FDA es una función escalonada que da un salto de $p_i = P(X = x_i)$ en el valor x_i (véase el problema 33). Para una variable aleatoria continua X que toma valores en el intervalo $[A, B]$ y que tiene FDP $f(x)$, la FDA es igual a la integral definida (véase la figura 2),

$$F(x) = \int_A^x f(t)\,dt, \quad A \leq x \leq B$$

Para $x < A$, la FDA $F(x)$ es cero, ya que la probabilidad de que sea menor o igual a un valor menor que A es cero. De forma análoga, para $x > B$, la FDA es uno, ya que la probabilidad de que sea menor o igual a un valor que es mayor a B es uno.

En el capítulo 4 utilizamos el término *función de acumulación* para referirnos a una función definida de esta manera. La FDA se define como el área acumulada bajo la FDP, por lo que es una función de acumulación. El siguiente teorema da varias propiedades de la FDA. Las demostraciones son sencillas y se dejan como ejercicios. (Véase el problema 19).

Teorema A

Sea X una variable aleatoria continua que toma valores en el intervalo $[A, B]$ y que tiene FDP $f(x)$ y FDA $F(x)$. Entonces

1. $F'(x) = f(x)$
2. $F(A) = 0$ y $F(B) = 1$
3. $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

EJEMPLO 3 En teoría de confiabilidad, con frecuencia la variable aleatoria es el tiempo de vida de algún artículo, tal como la batería de una laptop. La FDP puede usarse para determinar las probabilidades y esperanzas respecto al tiempo de vida. Entonces, suponga que el tiempo de vida, en horas, de una batería es una variable aleatoria continua X que tiene FDP

$$f(x) = \begin{cases} \frac{12}{625}x^2(5 - x), & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Verifique que esto es una FDP válida y dibuje su gráfica.
(b) Determine la probabilidad de que la batería dure al menos tres horas.
(c) Determine el valor esperado del tiempo de vida.
(d) Determine y dibuje una gráfica de la FDA.

SOLUCIÓN Una calculadora gráfica o un CAS puede ser un auxiliar en la evaluación de las integrales de este problema.

(a) Para toda x, $f(x)$ es no negativa y

$$\int_0^5 \frac{12}{625}x^2(5 - x)\,dx = \frac{12}{625}\int_0^5 (5x^2 - x^3)\,dx = \frac{12}{625}\left[\frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^5 = 1$$

Una gráfica de la FDP se da en la figura 3.

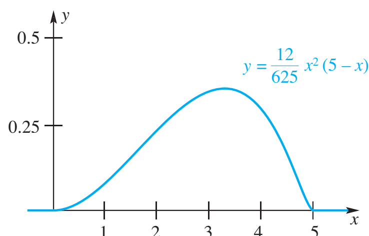


Figura 3

(b) La probabilidad se determina por medio de integración:

$$P(X \geq 3) = \int_3^5 \frac{12}{625}x^2(5 - x)\,dx = \frac{12}{625}\left[\frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_3^5 = \frac{328}{625} = 0.5248$$

(c) El tiempo de vida esperado es

$$E(X) = \int_0^5 x\left[\frac{12}{625}x^2(5-x)\right]dx$$
$$= \frac{12}{625}\int_0^5 (5x^3 - x^4)\,dx$$
$$= \frac{12}{625}\left[\frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^5 = 3 \text{ horas}$$

(d) Para x entre 0 y 5,

$$F(x) = \int_0^x \frac{12}{625}t^2(5-t)\,dt$$
$$= \frac{4}{125}x^3 - \frac{3}{625}x^4$$

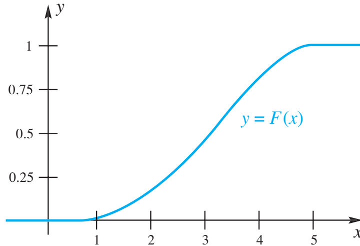


Figura 4

Para $x < 0$, $F(x) = 0$ y para $x > 5$, $F(x) = 1$. Se da una gráfica en la figura 4. ■

Revisión de conceptos

1. Una variable aleatoria cuyo conjunto de posibles resultados es finito, o puede ponerse en una lista infinita, se denomina variable aleatoria _______. Una variable aleatoria, cuyo conjunto de posibles resultados lo constituye un intervalo de números reales se denomina variable aleatoria ______.

2. Para variables aleatorias discretas, las probabilidades y esperanzas se determinan evaluando un(a) _______, mientras que para variables aleatorias continuas, las probabilidades y esperanzas se determinan mediante la evaluación de un(a) ________.

3. Si una variable aleatoria continua X toma valores en $[0, 20]$ y tiene FDP $f(x)$, entonces $P(X \le 5)$ se determina evaluando ________.

4. La función de acumulación $\int_A^x f(t)\,dt$, que acumula la probabilidad (área bajo la FDP), se denomina la (el) _________.

Conjunto de problemas 5.7

En los problemas del 1 al 8 se da una distribución de probabilidades discretas para una variable aleatoria X. Utilice la distribución dada para determinar (a) $P(X \ge 2)$ y (b) $E(X)$.

1.

x_i	0	1	2	3
p_i	0.80	0.10	0.05	0.05

2.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0.70	0.15	0.05	0.05	0.05

3.

x_i	−2	−1	0	1	2
p_i	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

4.

x_i	−2	−1	0	1	2
p_i	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

5.

x_i	1	2	3	4
p_i	0.4	0.2	0.2	0.2

6.

x_i	−0.1	100	1000
p_i	0.980	0.018	0.002

7. $p_i = (5 - i)/10,\ x_i = i,\ i = 1, 2, 3, 4$

8. $p_i = (2 - i)^2/10,\ x_i = i,\ i = 0, 1, 2, 3, 4$

En los problemas del 9 al 18 se da una FDP para una variable aleatoria continua X. Utilice la FDP para determinar (a) $P(X \ge 2)$, (b) $E(X)$ y (c) la FDA.

9. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{40}, & \text{si } -20 \le x \le 20 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{256}x(8-x), & \text{si } 0 \le x \le 8 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4000}x(20-x), & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{64}x^2(4-x), & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} (8-x)/32, & \text{si } 0 \le x \le 8 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{8}\sin(\pi x/4), & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{8}\cos(\pi x/8), & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x^{-2}, & \text{si } 1 \le x \le 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} \frac{81}{40}x^{-3}, & \text{si } 1 \le x \le 9 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

19. Demuestre las tres propiedades de la FDA en el teorema A.

20. Se dice que una variable aleatoria continua X tiene **distribución uniforme** en el intervalo $[a, b]$, si la FDP tiene la

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{si } a \le x \le b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Encuentre la probabilidad de que el valor de X sea más cercano a a que a b.

(b) Determine el valor esperado de X.

(c) Determine la FDA de X.

21. La **mediana** de una variable aleatoria continua X es un valor x_0 tal que $P(X \le x_0) = 0.5$. Determine la mediana de una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[a, b]$.

22. Sin realizar integración alguna, determine la mediana de la variable aleatoria que tiene FDP $f(x) = \frac{15}{512}x^2(4 - x)^2$, $0 \le x \le 4$. *Sugerencia:* utilice simetría.

23. Determine el valor de k que hace a $f(x) = kx(5 - x)$, $0 \le x \le 5$, una FDP válida. *Sugerencia:* la FDP debe tener integral igual a 1.

24. Determine el valor de k que hace a $f(x) = kx^2(5 - x)^2$, $0 \le x \le 5$, una FDP válida.

25. El tiempo, en minutos, que le toma a un trabajador completar una tarea es una variable aleatoria con FDP, $f(x) = k(2 - |x - 2|)$, $0 \le x \le 4$.

(a) Determine el valor de k, que hace de $f(x)$ una FDP válida.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde más de 3 minutos en completar la tarea?

(c) Determine el valor esperado del tiempo en completar la tarea.

(d) Determine la FDA, $F(x)$.

(e) Denótese con Y el tiempo requerido, en segundos, para completar la tarea. ¿Cuál es la FDA de Y? *Sugerencia:* $P(Y \le y) = P(60X \le y)$.

26. El índice diario de calidad del aire en verano (ICA) en San Luis, Missouri, es una variable aleatoria cuya FDP es $f(x) = kx^2(180 - x)$, $0 \le x \le 180$.

(a) Determine el valor de k que hace de $f(x)$ una FDP válida.

(b) Cierto día es de "alerta anaranjada", si el ICA está entre 100 y 150. ¿Cuál es la probabilidad de que un día de verano sea de alerta anaranjada?

(c) Determine el valor esperado del ICA de verano.

CAS **27.** Los agujeros que se perforan por medio de una máquina tienen un diámetro, medido en milímetros, que es una variable aleatoria con FDP $f(x) = kx^6(0.6 - x)^8$, $0 \le x \le 0.6$.

(a) Determine el valor de k para que $f(x)$ sea una FDP válida.

(b) Ciertas especificaciones requieren que el diámetro del agujero esté entre 0.35 y 0.45 mm. Se desechan las unidades que no cumplen con este requisito. ¿Cuál es la probabilidad de que una unidad sea desechada?

(c) Determine el valor esperado del diámetro del agujero.

(d) Determine la FDA, $F(x)$.

(e) Denótese con Y al diámetro del agujero en pulgadas (1 pulgada = 25.4 mm). ¿Cuál es la FDA de Y?

CAS **28.** Una compañía monitorea el total de impurezas en los lotes de productos químicos que recibe. La FDP para el total de impurezas X en un lote, medido en partes por millón (PPM), tiene la FDP $f(x) = kx^2(200 - x)^8$, $0 \le x \le 200$.

(a) Determine el valor de k que hace de $f(x)$ una FDP válida.

(b) La compañía no acepta lotes cuyo total de impurezas sea 100 o superior. ¿Cuál es la probabilidad de que un lote no sea aceptado?

(c) Determine el valor esperado del total de impurezas en PPM.

(d) Determine la FDA, $F(x)$.

(e) Denótese con Y al total de impurezas, en porcentaje, en lugar de PPM. ¿Cuál es la FDA de Y?

29. Suponga que X es una variable aleatoria que tiene distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$. (Véase el problema 20.) Se traza el punto $(1, X)$ en el plano. Sea Y la distancia de $(1, X)$ al origen. Determine la FDA y la FDP de la variable aleatoria Y. *Sugerencia:* primero determine la FDP.

30. Suponga que X es una variable aleatoria continua. Explique por qué $P(X = x) = 0$. ¿Cuáles de las siguientes probabilidades son iguales? Explique.

$P(a < X < b)$, $P(a \le X \le b)$,

$P(a < X \le b)$, $P(a \le X < b)$

31. Demuestre que si A^c es el complemento de A, esto es, el conjunto de todos los resultados en el espacio muestral S que no están en A, entonces $P(A^c) = 1 - P(A)$.

32. Utilice el resultado del problema 31 para determinar $P(X \ge 1)$ en los problemas 1, 2 y 5.

33. Si X es una variable aleatoria discreta, entonces la FDA es una función escalonada. Considerando los valores de x menores que cero, entre 0 y 1, etcétera, determine y grafique la FDA para la variable aleatoria X del problema 1.

34. Determine y grafique la FDA de la variable aleatoria X del problema 2.

35. Suponga que una variable aleatoria Y tiene FDA

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y < 0 \\ 2y/(y+1), & \text{si } 0 \le y \le 1 \\ 1, & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

Determine cada uno de lo siguiente:

(a) $P(Y < 2)$

(b) $P(0.5 < Y < 0.6)$

(c) la FDP de Y

(d) Utilice la regla de la parábola, con $n = 8$, para aproximar $E(Y)$.

36. Suponga que una variable aleatoria Z tiene FDA

$$F(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < 0 \\ z^2/9, & \text{si } 0 \le z \le 3 \\ 1, & \text{si } z > 3 \end{cases}$$

Determine cada uno de lo siguiente:

(a) $P(Z > 1)$

(b) $P(1 < Z < 2)$

(c) la PDF de Z

(d) $E(Z)$

CAS **37.** El valor esperado de una función $g(X)$ de una variable aleatoria continua X, que tiene FDP $f(x)$, se define como $E[g(X)] = \int_A^B g(x)f(x)\,dx$. Si la FDP de X es $f(x) = \frac{15}{512}x^2(4-x)^2, 0 \le x \le 4$, determine $E(X)$ y $E(X^2)$.

CAS **38.** Una variable aleatoria continua X tiene FDP $f(x) = \frac{3}{256}x(8-x), 0 \le x \le 8$. Determine $E(X^2)$ y $E(X^3)$.

CAS **39.** La **varianza** de una variable aleatoria continua, denotada con $V(X)$ o σ^2, se define como $V(X) = E[(X-\mu)^2]$, en donde μ es el valor esperado, o media de la variable aleatoria X. Determine la varianza de la variable aleatoria del problema 37.

CAS **40.** Determine la varianza de la variable aleatoria del problema 38.

41. Demuestre que la varianza de una variable aleatoria es igual a $E(X^2) - \mu^2$ y utilice este resultado para determinar la varianza de la variable aleatoria del problema 37.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** discreta; continua **2.** suma; integral **3.** $\int_0^5 f(x)\,dx$ **4.** función de distribución acumulada

5.8 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

1. El área de la región acotada por $y = \cos x, y = 0, x = 0$ y $x = \pi$ es $\int_0^\pi \cos x\,dx$.

2. El área de un círculo de radio a es $4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

3. El área de la región acotada por $y = f(x), y = g(x), x = a$ y $x = b$ es $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ o bien su negativo.

4. Todos los cilindros rectos cuyas bases tienen la misma área y cuyas alturas son las mismas tienen volúmenes idénticos.

5. Si dos sólidos con bases en el mismo plano tienen secciones transversales de la misma área en todos los planos paralelos a sus bases, entonces tienen el mismo volumen.

6. Si el radio de la base de un cono se duplica, mientras la altura se divide entre dos, entonces el volumen permanecerá constante.

7. Para calcular el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región acotada por $y = -x^2 + x$ y $y = 0$ alrededor del eje y, uno debe utilizar el método de las arandelas, de preferencia sobre del método de los cascarones.

8. Los sólidos que se obtienen al hacer girar la región del problema 7 alrededor de $x = 0$ y $x = 1$ tiene el mismo volumen.

9. Cualquier curva suave en el plano que se encuentre por completo dentro del círculo unitario tendrá longitud finita.

10. El trabajo que se requiere para estirar un resorte 2 pulgadas más de su longitud normal es el doble del que se necesita para estirarlo una pulgada (supóngase que se cumple la Ley de Hooke).

11. Se requerirá la misma cantidad de trabajo para vaciar un depósito de forma cónica y un depósito cilíndrico de agua, bombeándola hasta su borde superior si ambos depósitos tienen la misma altura y volumen.

12. Un bote tiene ventanas circulares de radio de 6 pulgadas que están bajo la superficie del agua. La fuerza ejercida por el agua sobre una ventana es la misma sin importar la profundidad.

13. Si $\bar{x}$ es el centro de masa de un sistema de masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ distribuidas a lo largo de una recta en los puntos con coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente, entonces $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})m_i = 0$.

14. El centroide de la región acotada por $y = \cos x, y = 0, x = 0$ y $x = 2\pi$ está en $(\pi, 0)$.

15. De acuerdo con el teorema de Pappus, el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región (de área 2) acotada por $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0, x = 0$ y $x = \pi$ alrededor del eje y es $2(2\pi)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi^2$.

16. El área de la región acotada por $y = \sqrt{x}, y = 0, y = 0$ y $x = 9$ es $\int_0^3 (9 - y^2)\,dy$.

17. Si la densidad de un alambre es proporcional al cuadrado de la distancia a su punto medio, entonces su centro de masa está en el punto medio.

18. El centroide de un triángulo con base en el eje x tiene ordenada (coordenada y) igual a un tercio de la altura del triángulo.

19. Una variable aleatoria que toma sólo un número finito de valores es una variable aleatoria discreta.

20. Considere un alambre con densidad $\delta(x), 0 \le x \le a$ y una variable aleatoria con FDP $f(x), 0 \le x \le a$. Si $\delta(x) = f(x)$ para toda x en $[0, a]$, entonces el centro de masa del alambre será igual a la esperanza de la variable aleatoria.

21. Una variable aleatoria que toma el valor 5 con probabilidad uno tendrá esperanza igual a 5.

22. Si $F(x)$ es la FDA de una variable aleatoria continua X, entonces $F'(x)$ es igual a la FDP $f(x)$.

23. Si X es una variable aleatoria continua, entonces $P(X = 1) = 0$.

Problemas de examen

Los problemas del 1 al 7 se refieren a la región plana R acotada por la curva $y = x - x^2$ y el eje x (véase la figura 1).

1. Encuentre el área de R.

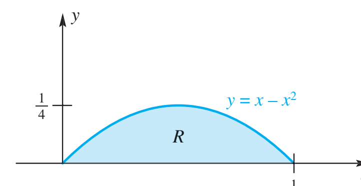


Figura 1

2. Encuentre el volumen del sólido S_1, generado al hacer girar la región R alrededor del eje x.

3. Utilice el método de los cascarones para determinar el volumen del sólido S_2, generado al hacer girar R alrededor del eje y.

4. Encuentre el volumen del sólido S_3, generado al hacer girar R alrededor de la recta $y = -2$.

5. Encuentre el volumen del sólido S_4 generado al hacer girar R alrededor de la recta $x = 3$.

6. Encuentre las coordenadas del centroide de R.

7. Utilice el teorema de Pappus y los problemas del 1 al 6 para determinar los volúmenes de los sólidos S_1, S_2, S_3 y S_4 anteriores.

8. La longitud natural de cierto resorte es de 16 pulgadas, y se requiere de una fuerza de 8 libras para mantenerlo estirado 8 pulgadas. Encuentre el trabajo realizado en cada caso.

(a) Estirarlo desde una longitud de 18 pulgadas a una longitud de 24 pulgadas.

(b) Comprimirlo desde su longitud natural hasta una longitud de 12 pulgadas.

9. Un tanque cilíndrico vertical tiene 10 pies de diámetro y 10 pies de altura. Si el agua del tanque tiene una profundidad de 6 pies, ¿cuánto trabajo se realiza al bombear toda el agua hasta el borde superior del depósito?

10. Un objeto que pesa 200 libras está suspendido desde la parte superior de un edificio por medio de un cable uniforme. Si el cable es de 100 pies de largo y pesa 120 libras, ¿cuánto trabajo se hace al tirar del objeto y del cable hasta lo alto?

11. Una región R está acotada por la recta $y = 4x$ y la parábola $y = x^2$. Encuentre el área de R:

(a) considerando a x como la variable de integración, y

(b) tomando a y como la variable de integración.

12. Encuentre el centroide de R en el problema 11.

13. Determine el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar la región R del problema 11 alrededor del eje x. Verifique mediante el teorema de Pappus.

14. Encuentre la fuerza total ejercida por el agua dentro de un cilindro circular recto con altura de 3 pies y radio de 8 pies

(a) sobre la superficie lateral, y

(b) sobre la superficie inferior.

15. Encuentre la longitud del arco de la curva $y = x^3/3 + 1/(4x)$ desde $x = 1$ hasta $x = 3$.

16. Bosqueje la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2, \qquad y = \tfrac{1}{3}(t^3 - 3t)$$

Después encuentre la longitud del rizo de la curva resultante.

17. Un sólido con base semicircular acotada por $\sqrt{9 - x^2}$ y $y = 0$ tiene secciones transversales perpendiculares al eje x que son cuadrados. Encuentre el volumen de este sólido.

En los problemas del 18 al 23 escriba una expresión que incluya integrales para representar el concepto requerido. Haga referencia a la figura 2.

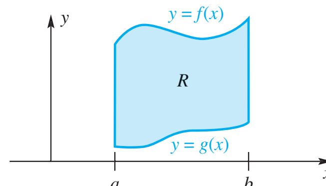


Figura 2

18. El área de R.

19. El volumen del sólido obtenido cuando R se hace girar alrededor del eje x.

20. El volumen del sólido obtenido cuando R se hace girar alrededor de $x = a$.

21. Los momentos M_x y M_y de una lámina homogénea con forma R, suponiendo que su densidad es δ.

22. La longitud *total* de la frontera de R.

23. El área de la superficie *total* del sólido del problema 19.

24. Sea X una variable aleatoria continua con FDP

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{8 - x^3}{12}, & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Determine $P(X \ge 1)$.

(b) Determine la probabilidad de que X esté más cerca de 0 que de 1.

(c) Determine $E(X)$.

(d) Determine la FDA de X.

25. Una variable aleatoria X tiene FDA

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{(6 - x)^2}{36}, & \text{si } 0 \le x \le 6 \\ 1, & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

(a) Determine $P(X \le 3)$.

(b) Determine la FDP $f(x)$.

(c) Determine $E(X)$.

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

Determine las siguientes antiderivadas.

1. $\int \frac{1}{x^2}\,dx$

2. $\int \frac{1}{x^{1.5}}\,dx$

3. $\int \frac{1}{x^{1.01}}\,dx$

4. $\int \frac{1}{x^{0.99}}\,dx$

Para los problemas del 5 al 8 defina $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ *y determine lo siguiente.*

5. $F(1)$

6. $F'(x)$

7. $D_x F(x^2)$

8. $D_x F(x^3)$

En los problemas del 9 al 12 evalúe las expresiones en los valores dados.

9. $(1 + h)^{1/h}; h = 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

10. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; n = 1, 10, 100, 1000$

11. $\left(1 + \frac{h}{2}\right)^{2/h}; h = 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$

12. $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n/2}; n = 1, 10, 100, 1000$

En los problemas del 13 al 16 determine todos los valores de x que satisfacen la relación dada.

13. $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

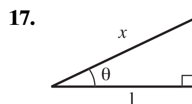
14. $\cos x = -1$

15. $\tan x = 1$

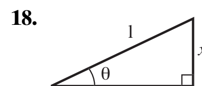
16. $\sec x = 0$

Para los triángulos que se muestran en los problemas del 17 al 20 determine todo lo siguiente, en términos de x: $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ *y* $\csc\theta$.

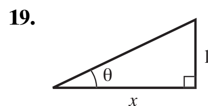
17.



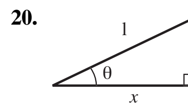
18.



19.



20.



En los problemas 21 y 22 resuelva la ecuación diferencial sujeta a la condición dada.

21. $y' = xy^2$, $y = 1$ cuando $x = 0$

22. $y' = \frac{\cos x}{y}$, $y = 4$ cuando $x = 0$

CAPÍTULO 6

Funciones trascendentales

6.1 La función logaritmo natural

La potencia del cálculo, tanto de derivadas como de integrales, ya ha sido demostrada ampliamente. Aunque sólo hemos empezado a tratar el problema de aplicaciones potenciales. Para ahondar, necesitamos expandir la clase de funciones con las que podemos trabajar. Ése es el objetivo de este capítulo.

Comenzamos pidiéndole que observe un vacío peculiar en nuestro conocimiento de derivadas.

$$D_x\left(\frac{x^2}{2}\right) = x^1,\ D_x(x) = x^0,\ D_x(??) = x^{-1},\ D_x\left(-\frac{1}{x}\right) = x^{-2},\ D_x\left(-\frac{x^{-2}}{2}\right) = x^{-3}$$

¿Existe una función cuya derivada sea $1/x$? De manera alternativa, ¿existe una antiderivada $\int 1/x\, dx$? El Primer Teorema Fundamental del Cálculo establece que la función de acumulación

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

es una función cuya derivada es $f(x)$, con tal que f sea continua en un intervalo I que contenga a a y a x. En este sentido, podemos encontrar una antiderivada de *cualquier* función continua. La existencia de una antiderivada no significa que la antiderivada pueda expresarse en términos de funciones que hemos estudiado hasta el momento. En este capítulo introduciremos y estudiaremos varias funciones nuevas.

Nuestra primera función nueva se elige para llenar el hueco observado anteriormente. Le llamamos **función logaritmo natural** y tiene que ver con el logaritmo estudiado en álgebra, pero esta relación sólo aparecerá más adelante. Por el momento, sólo acepte el hecho de que vamos a definir una *nueva* función y estudiaremos sus propiedades.

Definición Función logaritmo natural

La **función logaritmo natural**, denotada por ln, se define por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \qquad x > 0$$

El dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de los números reales positivos.

Los diagramas en la figura 1 indican el significado geométrico de ln x. La función logaritmo natural (o log natural) mide el área debajo de la curva $y = 1/t$ entre 1 y x, si $x > 1$ y el negativo del área si $0 < x < 1$. El logaritmo natural es una función de acumulación, ya que acumula el área bajo la curva $y = 1/t$. Claramente, ln x está bien definida

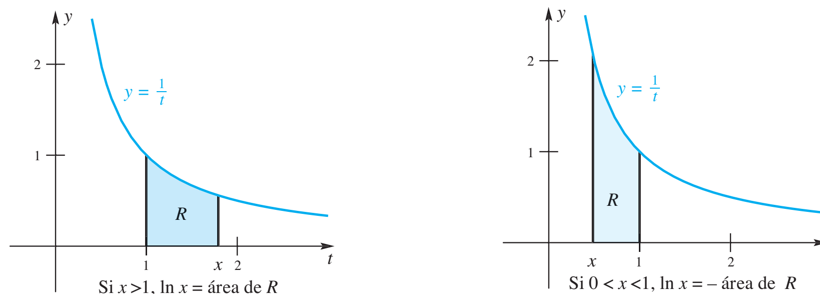


Figura 1

para $x > 0$; $\ln x$ no está definida para $x \leq 0$ porque esta integral definida no existe en un intervalo que incluya a 0.

¿Y cuál es la derivada de esta nueva función? Esto es exactamente lo que queremos.

Derivada de la función logaritmo natural Con base en el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos

$$D_x \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = D_x \ln x = \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

Esto puede combinarse con la regla de la cadena. Si $u = f(x) > 0$ y si f es derivable, entonces

$$D_x \ln u = \frac{1}{u} D_x u$$

EJEMPLO 1 Encuentre $D_x \ln \sqrt{x}$.

SOLUCIÓN Sea $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$. Entonces

$$D_x \ln \sqrt{x} = \frac{1}{x^{1/2}} \cdot D_x(x^{1/2}) = \frac{1}{x^{1/2}} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2x}$$ ■

EJEMPLO 2 Encuentre $D_x \ln(x^2 - x - 2)$.

SOLUCIÓN Este problema tiene sentido, siempre que $x^2 - x - 2 > 0$. Ahora $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$, que es positiva con tal que $x < -1$ o $x > 2$. Así, el dominio de $\ln(x^2 - x - 2)$ es $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$. En este dominio,

$$D_x \ln(x^2 - x - 2) = \frac{1}{x^2 - x - 2} D_x(x^2 - x - 2) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2}$$ ■

EJEMPLO 3 Demuestre que

$$D_x \ln|x| = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$$

SOLUCIÓN Se deben considerar dos casos. Si $x > 0$, $|x| = x$, y

$$D_x \ln|x| = D_x \ln x = \frac{1}{x}$$

Si $x < 0$, $|x| = -x$, y así

$$D_x \ln|x| = D_x \ln(-x) = \frac{1}{-x} D_x(-x) = \left(\frac{1}{-x}\right)(-1) = \frac{1}{x}$$ ■

Sabemos que para cada fórmula de derivación existe una fórmula correspondiente de integración. Por esto, el ejemplo 3 implica que

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C, \qquad x \neq 0$$

o, con u reemplazando a x,

$$\int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C, \qquad u \neq 0$$

Esto llena el viejo hueco en la regla de la potencia: $\int u^r\, du = u^{r+1}/(r + 1)$, de la cual habíamos excluido el exponente $r = -1$.

EJEMPLO 4 Encuentre $\int \frac{5}{2x + 7}\, dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = 2x + 7$, por lo que $du = 2\, dx$. Entonces

$$\int \frac{5}{2x + 7}\, dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{2x + 7}\, 2\, dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{u}\, du$$

$$= \frac{5}{2}\ln|u| + C = \frac{5}{2}\ln|2x + 7| + C$$

■

EJEMPLO 5 Evalúe $\int_{-1}^{3} \frac{x}{10 - x^2}\, dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = 10 - x^2$, por lo que $du = 2x\, dx$. Entonces

$$\int \frac{x}{10 - x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{10 - x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\, du$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|u| + C = -\frac{1}{2}\ln|10 - x^2| + C$$

Así, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_{-1}^{3} \frac{x}{10 - x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{2}\ln|10 - x^2|\right]_{-1}^{3} = -\frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{2}\ln 9 = \frac{1}{2}\ln 9$$

Para que los cálculos anteriores sean válidos, $10 - x^2$ nunca debe ser cero en el intervalo $[-1, 3]$. Es fácil verificar que esto es cierto. ■

Cuando el integrando es el cociente de dos polinomios (esto es, una función racional) y el numerador es de grado igual o mayor que el denominador, siempre *divida primero el denominador entre el numerador*.

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ x + 1 & x^2 - x \\ & x^2 + x \\ \hline & -2x \\ & -2x - 2 \\ \hline & 2 \end{array}$$

Figura 2

EJEMPLO 6 Determine $\int \frac{x^2 - x}{x + 1}\, dx$.

SOLUCIÓN Mediante una división larga (véase la figura 2),

$$\frac{x^2 - x}{x + 1} = x - 2 + \frac{2}{x + 1}$$

De aquí que,

$$\int \frac{x^2 - x}{x + 1}\, dx = \int (x - 2)\, dx + 2\int \frac{1}{x + 1}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + 2\int \frac{1}{x + 1}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x + 1| + C$$

■

> **Logaritmos comunes**
>
> Las propiedades (ii) y (iii) de los **logaritmos comunes** (logaritmos de base 10) fueron las que motivaron la invención de los logaritmos. John Napier (1550-1617) quería simplificar los complicados cálculos que surgían en astronomía y navegación. Su objetivo era reemplazar multiplicación por suma y división por sustracción, exactamente lo que realizan (ii) y (iii). Durante 350 años, los logaritmos comunes fueron una ayuda esencial en los cálculos, pero ahora, para este propósito utilizamos calculadoras y computadoras. Sin embargo, los logaritmos naturales conservan su importancia por otras razones, como verá.

Propiedades del logaritmo natural El siguiente teorema lista varias propiedades importantes de la función logaritmo natural.

> **Teorema A**
>
> Si a y b son números positivos y r es cualquier número racional, entonces
>
> (i) $\ln 1 = 0$; (ii) $\ln ab = \ln a + \ln b$;
>
> (iii) $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; (iv) $\ln a^r = r\ln a$.

Demostración

(i) $\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0.$

(ii) Ya que para $x > 0$,

$$D_x \ln ax = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

y

$$D_x \ln x = \frac{1}{x}$$

se deduce, con base en el teorema acerca de dos funciones con la misma derivada (teorema 3.6B), que

$$\ln ax = \ln x + C$$

Para determinar C, hágase $x = 1$, obteniéndose $\ln a = C$. Por lo tanto,

$$\ln ax = \ln x + \ln a$$

Por último, sea $x = b$.

(iii) Reemplace a por $1/b$ en (ii) para obtener

$$\ln\frac{1}{b} + \ln b = \ln\left(\frac{1}{b} \cdot b\right) = \ln 1 = 0$$

Así,

$$\ln\frac{1}{b} = -\ln b$$

Aplicando (ii), nuevamente, obtenemos

$$\ln\frac{a}{b} = \ln\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$

(iv) Como, para $x > 0$,

$$D_x(\ln x^r) = \frac{1}{x^r} \cdot rx^{r-1} = \frac{r}{x}$$

y

$$D_x(r \ln x) = r \cdot \frac{1}{x} = \frac{r}{x}$$

se deduce, por el teorema 3.6B que se utilizó en (ii), que

$$\ln x^r = r \ln x + C$$

Sea $x = 1$, lo cual da $C = 0$. Por lo que

$$\ln x^r = r \ln x$$

Por última, sea $x = a$. ■

EJEMPLO 7 Encuentre dy/dx, si $y = \ln \sqrt[3]{(x - 1)/x^2}$, $x > 1$.

SOLUCIÓN Nuestra tarea es más sencilla, si primero utilizamos las propiedades del logaritmo natural para simplificar y.

$$y = \ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right)^{1/3} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln(x - 1) - \ln x^2\right] = \frac{1}{3}\left[\ln(x - 1) - 2 \ln x\right]$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x}\right] = \frac{2-x}{3x(x-1)}$$ ■

Derivación logarítmica Con frecuencia, el trabajo de derivar expresiones que incluyan cocientes, productos o potencias se puede reducir de manera sustancial aplicando primero la función logaritmo y usando sus propiedades. Este método, denominado **derivación logarítmica**, se ilustra en el ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Derive $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{2/3}}$.

SOLUCIÓN Primero tomamos logaritmo natural; después derivamos implícitamente con respecto a x (recuerde la sección 2.7).

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(1-x^2) - \frac{2}{3}\ln(x+1)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2(1-x^2)} - \frac{2}{3(x+1)} = \frac{-(x+2)}{3(1-x^2)}$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y(x+2)}{3(1-x^2)} = \frac{-\sqrt{1-x^2}\,(x+2)}{3(x+1)^{2/3}(1-x^2)}$$

$$= \frac{-(x+2)}{3(x+1)^{2/3}(1-x^2)^{1/2}}$$ ■

El ejemplo 8 podría haberse hecho de manera directa sin haber tomado logaritmos, y le sugerimos que lo intente. Usted debe ser capaz de hacer que coincidan las dos respuestas.

La gráfica del logaritmo natural El dominio de $\ln x$ consiste en el conjunto de todos los números reales positivos, de modo que la gráfica de $y = \ln x$ está en el semiplano de la derecha. Además, para $x > 0$,

$$D_x \ln x = \frac{1}{x} > 0$$

y

$$D_x^2 \ln x = -\frac{1}{x^2} < 0$$

La primera fórmula nos dice que la función logaritmo natural es continua (¿por qué?) y crece cuando x aumenta; la segunda nos dice que la gráfica es cóncava hacia abajo en todas partes. En los problemas 43 y 44 se le pide demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

Por último, $\ln 1 = 0$. Estos hechos implican que la gráfica de $y = \ln x$ sea similar, en forma, a la que se muestra en la figura 3.

Si su calculadora tiene un botón ln, los valores para el logaritmo natural los tiene al alcance de la mano. Por ejemplo,

$$\ln 2 \approx 0.6931$$
$$\ln 3 \approx 1.0986$$

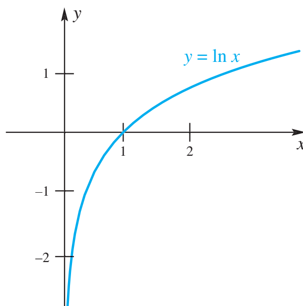


Figura 3

Integrales trigonométricas Algunas integrales trigonométricas pueden evaluarse por medio de la función logaritmo natural.

EJEMPLO 9 Evalúe $\int \tan x\, dx$.

SOLUCIÓN Como $\tan x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$, podemos hacer la sustitución $u = \cos x$, $du = -\text{sen } x\, dx$, para obtener

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\text{sen } x}{\cos x} dx = \int \frac{-1}{\cos x}(-\text{sen } x\, dx) = -\ln|\cos x| + C \quad \blacksquare$$

De forma análoga, $\int \cot x\, dx = \ln|\text{sen } x|$.

EJEMPLO 10 Evalúe $\int \sec x \csc x\, dx$.

SOLUCIÓN Para ésta, utilizamos la identidad trigonométrica $\sec x \csc x = \tan x + \cot x$. Entonces

$$\int \sec x \csc x\, dx = \int (\tan x + \cot x)\, dx = -\ln|\cos x| + \ln|\text{sen } x| + C \quad \blacksquare$$

Revisión de conceptos

1. La función ln se define por $\ln x =$ _______. El dominio de esta función es _______ y su rango es _______.

2. Con base en la definición anterior, se deduce que $D_x \ln x =$ _______ para $x > 0$.

3. Con mayor generalidad, para $x \neq 0$, $D_x \ln|x| =$ ______ y así $\int (1/x)\, dx =$ ______.

4. Algunas propiedades comunes de ln son $\ln(xy) =$ _______, $\ln(x/y) =$ _______ y $\ln(x^r) =$ _______.

Conjunto de problemas 6.1

1. Utilice las aproximaciones $\ln 2 \approx 0.693$ y $\ln 3 \approx 1.099$, junto con las propiedades establecidas en el teorema A, para calcular aproximaciones a cada uno de los logaritmos siguientes. Por ejemplo, $\ln 6 = \ln(2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 3 = 0.693 + 1.099 = 1.792$.

(a) $\ln 6$ (b) $\ln 1.5$ (c) $\ln 81$

(d) $\ln \sqrt{2}$ (e) $\ln\left(\frac{1}{36}\right)$ (f) $\ln 48$

2. Utilice su calculadora para hacer los cálculos del problema 1 de manera directa.

En los problemas del 3 al 14 encuentre la derivada que se indica (véanse los ejemplos 1 y 2). En cada caso, suponga que x está restringida de modo que ln está definida.

3. $D_x \ln(x^2 + 3x + \pi)$

4. $D_x \ln(3x^3 + 2x)$

5. $D_x \ln(x - 4)^3$

6. $D_x \ln \sqrt{3x - 2}$

7. $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = 3 \ln x$

8. $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = x^2 \ln x$

9. $\dfrac{dz}{dx}$ si $z = x^2 \ln x^2 + (\ln x)^3$

10. $\dfrac{dr}{dx}$ si $r = \dfrac{\ln x}{x^2 \ln x^2} + \left(\ln \dfrac{1}{x}\right)^3$

11. $g'(x)$ si $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

12. $h'(x)$ si $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

13. $f'(81)$ si $f(x) = \ln \sqrt[3]{x}$

14. $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ si $f(x) = \ln(\cos x)$

En los problemas del 15 al 26 encuentre las integrales (véanse los ejemplos 4, 5 y 6).

15. $\displaystyle\int \frac{1}{2x + 1}\, dx$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{1 - 2x}\, dx$

17. $\displaystyle\int \frac{6v + 9}{3v^2 + 9v}\, dv$

18. $\displaystyle\int \frac{z}{2z^2 + 8}\, dz$

19. $\displaystyle\int \frac{2 \ln x}{x}\, dx$

20. $\displaystyle\int \frac{-1}{x(\ln x)^2}\, dx$

21. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^4}{2x^5 + \pi}\, dx$

22. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t + 1}{2t^2 + 4t + 3}\, dt$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x - 1}\, dx$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2 + x}{2x - 1}\, dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x + 4}\, dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^3 + x^2}{x + 2}\, dx$

En los problemas del 27 al 30 utilice el teorema A para escribir las expresiones como el logaritmo de una sola cantidad.

27. $2 \ln(x + 1) - \ln x$

28. $\frac{1}{2}\ln(x - 9) + \frac{1}{2}\ln x$

29. $\ln(x - 2) - \ln(x + 2) + 2 \ln x$

30. $\ln(x^2 - 9) - 2 \ln(x - 3) - \ln(x + 3)$

En los problemas del 31 al 34 encuentre dy/dx por medio de la diferenciación logarítmica (véase el ejemplo 8).

31. $y = \dfrac{x + 11}{\sqrt{x^3 - 4}}$

32. $y = (x^2 + 3x)(x - 2)(x^2 + 1)$

33. $y = \dfrac{\sqrt{x + 13}}{(x - 4)\sqrt[3]{2x + 1}}$

34. $y = \dfrac{(x^2 + 3)^{2/3}(3x + 2)^2}{\sqrt{x + 1}}$

En los problemas del 35 al 38 haga uso de la gráfica conocida de y = ln x para esbozar las gráficas de las ecuaciones.

35. $y = \ln|x|$

36. $y = \ln\sqrt{x}$

37. $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

38. $y = \ln(x - 2)$

39. Haga un dibujo de la gráfica de $y = \ln\cos x + \ln\sec x$ en $(-\pi/2, \pi/2)$, pero piense antes de comenzar.

40. Explique por qué $\lim_{x\to 0} \ln\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$.

41. Encuentre todos los valores extremos locales de $f(x) = 2x^2 \ln x - x^2$ en su dominio.

42. La velocidad de transmisión en un cable telegráfico se observa que es proporcional a $x^2 \ln(1/x)$, donde x es la razón del radio del núcleo al grosor del aislante $(0 < x < 1)$. ¿Qué valor de x da la máxima velocidad de transmisión?

43. Utilice el hecho de que $\ln 4 > 1$ para demostrar que $\ln 4^m > m$ para $m > 1$. Concluya que $\ln x$ puede hacerse tan grande como se quiera seleccionando a x suficientemente grande. ¿Qué implica esto con respecto a $\lim_{x\to\infty} \ln x$?

44. Utilice el hecho de que $\ln x = -\ln(1/x)$ y el problema 43 para demostrar que $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

45. Despeje x de: $\int_{1/3}^{x} \frac{1}{t}\,dt = 2\int_{1}^{x} \frac{1}{t}\,dt$.

46. Demuestre las siguientes proposiciones.

(a) Como $1/t < 1/\sqrt{t}$ para $t > 1$, $\ln x < 2(\sqrt{x} - 1)$ para $x > 1$.

(b) $\lim_{x\to\infty} (\ln x)/x = 0$.

47. Calcule

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right]$$

escribiendo la expresión entre corchetes como

$$\left[\frac{1}{1 + 1/n} + \frac{1}{1 + 2/n} + \cdots + \frac{1}{1 + n/n}\right]\frac{1}{n}$$

y reconociendo lo último como una suma de Riemann.

C **48.** Un teorema famoso (el de los números primos) dice que el número de primos menores que n, para n grande, es aproximadamente $n/(\ln n)$. Aproximadamente, ¿cuántos primos menores que 1,000,000 hay?

49. Encuentre y simplifique $f'(1)$.

(a) $f(x) = \ln\left(\frac{ax - b}{ax + b}\right)^c$, donde $c = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$.

(b) $f(x) = \int_1^u \cos^2 t\,dt$, donde $u = \ln(x^2 + x - 1)$.

50. Evalúe $\int_0^{\pi/3} \tan x\,dx$.

51. Evalúe $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sec x \csc x\,dx$.

52. Evalúe $\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}\,dx$.

53. La región acotada por $y = (x^2 + 4)^{-1}$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 4$, se hace girar alrededor del eje y, generando un sólido. Encuentre su volumen.

54. Encuentre la longitud de la curva $y = x^2/4 - \ln\sqrt{x}$, $1 \le x \le 2$.

55. Teniendo como base la gráfica de $y = 1/x$, demuestre que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

56. Demuestre la **desigualdad de Napier**, la cual dice que, para $0 < x < y$,

$$\frac{1}{y} < \frac{\ln y - \ln x}{y - x} < \frac{1}{x}$$

CAS **57.** Sea $f(x) = \ln(1.5 + \operatorname{sen} x)$.

(a) Encuentre los puntos extremos absolutos en $[0, 3\pi]$.

(b) Encuentre los puntos de inflexión que haya en $[0, 3\pi]$.

(c) Evalúe $\int_0^{3\pi} \ln(1.5 + \operatorname{sen} x)\,dx$.

CAS **58.** Sea $f(x) = \cos(\ln x)$.

(a) Encuentre los puntos extremos absolutos en $[0.1, 20]$.

(b) Encuentre los puntos extremos absolutos en $[0.01, 20]$.

(c) Evalúe $\int_{0.1}^{20} \cos(\ln x)\,dx$.

CAS **59.** Dibuje las gráficas de $f(x) = x\ln(1/x)$ y $g(x) = x^2\ln(1/x)$ en $(0, 1]$.

(a) Encuentre el área de la región entre estas curvas en $(0, 1]$.

(b) Encuentre el valor máximo absoluto de $|f(x) - g(x)|$ en $(0, 1]$.

CAS **60.** Siga las instrucciones del problema 59 para $f(x) = x\ln x$ y $g(x) = \sqrt{x}\ln x$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\int_1^x (1/t)\,dt$; $(0, \infty)$; $(-\infty, \infty)$ **2.** $1/x$ **3.** $1/x$; $\ln|x| + C$ **4.** $\ln x + \ln y$; $\ln x - \ln y$; $r\ln x$

6.2 Funciones inversas y sus derivadas

El objetivo de este capítulo es ampliar el número de funciones en nuestro repertorio. Una forma de construir nuevas funciones es tomar las antiguas e "invertirlas". Cuando hacemos esto para la función logaritmo natural, iremos a la función exponencial natural, el tema de la sección 6.3. En esta sección estudiamos el problema general de invertir una función. He aquí la idea.

Una función f toma un número x de su dominio D y le asigna un solo valor y de su rango R. Si tenemos suerte, como en el caso de las dos funciones graficadas en las

figuras 1 y 2, podemos invertir a f; esto es, para cualquier y en R, podemos regresar sin ambigüedades y encontrar la x de la cual provino. Esta nueva función que toma a y y le asigna x se denota por f^{-1}. Observe que su dominio es R y su rango es D. Se denomina la **inversa** de f, o simplemente f inversa. Aquí hemos utilizado el superíndice –1 de una manera. El símbolo f^{-1} no denota a $1/f$, como podría haber esperado. Nosotros, y todos los matemáticos, la usamos para nombrar a la función inversa.

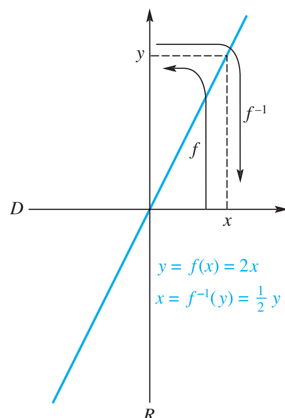


Figura 1

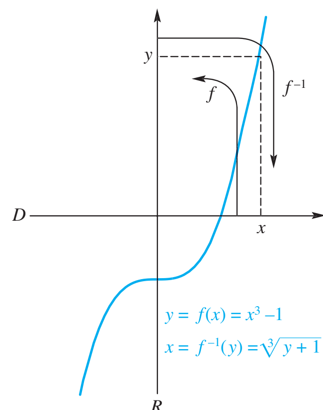
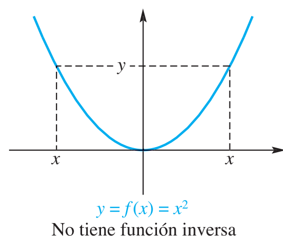
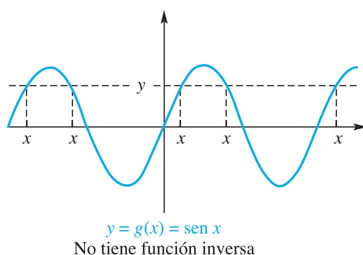


Figura 2



No tiene función inversa

Figura 3



No tiene función inversa

Figura 4

En ocasiones, podemos dar una fórmula para f^{-1}. Si $y = f(x) = 2x$, entonces $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y$ (véase la figura 1). De manera análoga, si $y = f(x) = x^3 - 1$, entonces $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y+1}$ (véase la figura 2). En cada caso, sólo despejamos la ecuación que determina f para x en términos de y. El resultado es $x = f^{-1}(y)$.

Pero la vida es más complicada que estos dos ejemplos. No toda función puede invertirse de una manera carente de ambigüedades. Por ejemplo, considere $y = f(x) = x^2$. Para una y dada existen *dos* x que le corresponden (véase la figura 3). La función $y = g(x) = \operatorname{sen} x$ es aún peor. Para cada y existe una infinidad de x que le corresponden (véase la figura 4). Tales funciones no tienen inversas; no es así, a menos que restrinjamos de algún modo el conjunto de valores de x, un tema que abordaremos más adelante.

Existencia de funciones inversas Sería bueno tener un criterio sencillo para decidir si una función f tiene inversa. Tal criterio es que la función sea **uno a uno**; es decir, $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$. Esto equivale a la condición geométrica de que toda recta horizontal corte a la gráfica de $y = f(x)$ en a lo más un punto. Pero, en una situación dada, este criterio puede ser muy difícil de aplicar, ya que exige que tengamos un conocimiento completo de la gráfica. Un criterio más práctico que cubre la mayoría de los ejemplos que surgen en este texto es que una función sea **estrictamente monótona**. Por esto queremos decir que sea creciente o decreciente en su dominio. (Véanse las definiciones en la sección 3.2).

Teorema A

Si f es estrictamente monótona en su dominio, entonces f tiene una inversa.

Demostración Sean x_1 y x_2 números distintos en el dominio de f, con $x_1 < x_2$. Como f es estrictamente$f(x_1) < f(x_2)$ o bien $f(x_1) > f(x_2)$. De cualquier forma, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por lo tanto, $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$, lo cual significa que f es uno a uno y por lo tanto tiene una inversa. ■

Éste es un resultado práctico, ya que tenemos una manera sencilla de decidir si una función diferenciable f es estrictamente monótona. Sólo examinamos el signo de f'.

EJEMPLO 1 Demuestre que $f(x) = x^5 + 2x + 1$ tiene una inversa.

SOLUCIÓN $f'(x) = 5x^4 + 2 > 0$ para toda x. Así, f es creciente en toda la recta real, de modo que tiene una inversa allí. ■

No afirmamos que siempre podamos dar una fórmula para f^{-1}. En el ejemplo que se acaba de considerar, esto requeriría que fuésemos capaces de despejar a x de $y = x^5 + 2x + 1$. Aunque podríamos utilizar un CAS (del inglés computer algebra sistem: sistema de álgebra computacional) o una calculadora gráfica para despejar a x en esta ecuación, para un valor particular de y, no existe una fórmula simple que nos dé x en términos de y para una y arbitraria.

Existe una manera de salvar la noción de inversa para funciones que no tienen inversas en sus dominios naturales. Simplemente *restringimos el dominio* a un conjunto en el que la gráfica sea creciente o decreciente. Así, para $y = f(x) = x^2$, podemos restringir el dominio a $x \geq 0$ ($x \leq 0$ también funcionaría). Para $y = g(x) = \operatorname{sen} x$, restringimos el dominio al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Entonces, ambas funciones tienen inversas (véase la figura 5) e incluso podemos dar una fórmula para la primera: $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

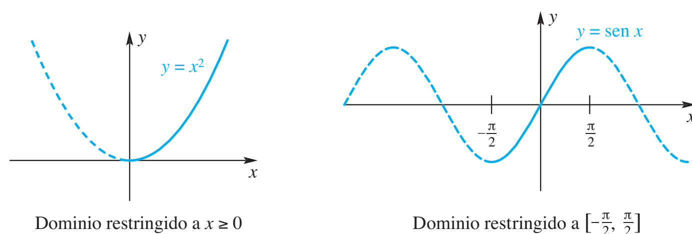


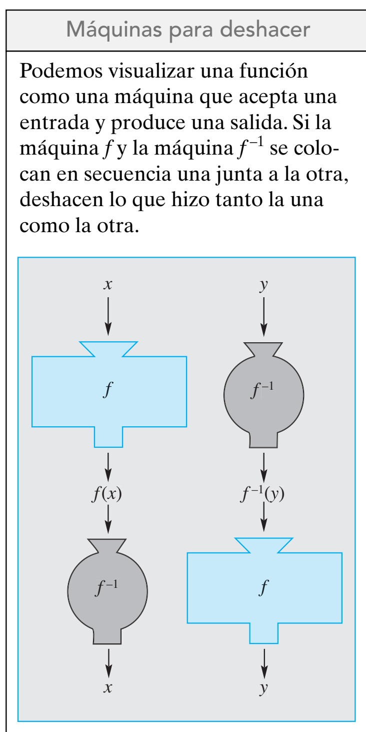
Figura 5

Si f tiene una inversa f^{-1}, entonces f^{-1} también tiene una inversa, a saber, f. Así, podemos llamar a f y f^{-1} un par de funciones inversas. Una función deshace (invierte) lo que la otra hizo; es decir,

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

Máquinas para deshacer

Podemos visualizar una función como una máquina que acepta una entrada y produce una salida. Si la máquina f y la máquina f^{-1} se colocan en secuencia una junta a la otra, deshacen lo que hizo tanto la una como la otra.



EJEMPLO 2 Demuestre que $f(x) = 2x + 6$ tiene una inversa, encuentre una fórmula para $f^{-1}(y)$, y verifique los resultados del recuadro anterior.

SOLUCIÓN Como f es una función creciente, tiene una inversa. Para encontrar $f^{-1}(y)$, resolvemos $y = 2x + 6$ para x, lo cual da $x = (y - 6)/2 = f^{-1}(y)$. Por último, observe que

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x + 6) = \frac{(2x + 6) - 6}{2} = x$$

y

$$f(f^{-1}(y)) = f\left(\frac{y - 6}{2}\right) = 2\left(\frac{y - 6}{2}\right) + 6 = y$$ ■

La gráfica de $y = f^{-1}(x)$ Supóngase que f tiene una inversa. Entonces

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

En consecuencia, $y = f(x)$ y $x = f^{-1}(y)$ determinan el mismo par (x, y) y por lo tanto tienen gráficas idénticas. Sin embargo, es convencional utilizar a x como la variable del dominio para funciones, de modo que ahora preguntaremos por la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ (observe que hemos intercambiando los papeles de x y y). Un poco de reflexión nos convence de que intercambiar los papeles de x y y en una gráfica es reflejar la gráfica

con respecto a la recta $y = x$. *Por esto, la gráfica de* $y = f^{-1}(x)$ *es sólo la reflexión de la gráfica de* $y = f(x)$ *respecto a la recta* $y = x$ (véase la figura 6).

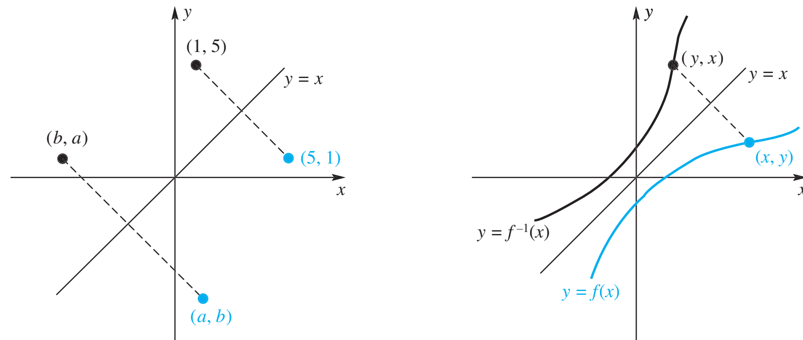


Figura 6

Un tema relacionado es el de encontrar una fórmula para $f^{-1}(x)$. Para hacerlo, primero encontramos $f^{-1}(y)$ y luego reemplazamos y por x en la fórmula resultante. Así, proponemos el siguiente proceso de tres pasos para determinar $f^{-1}(x)$.

Paso 1: Despeje a x en términos de y, de la ecuación $y = f(x)$.

Paso 2: Utilice $f^{-1}(y)$ para denominar a la expresión resultante en y.

Paso 3: Sustituya y por x a fin de obtener la fórmula para $f^{-1}(x)$.

Antes de intentar el proceso de tres pasos en una función particular f, usted podría pensar en que debemos verificar primero que f tenga una inversa. No obstante, si en realidad llevamos a cabo el primer paso y obtenemos una sola x para cada y, entonces f^{-1} existe. (Observe que cuando intentamos esto para $y = f(x) = x^2$ obtuvimos $x = \pm\sqrt{y}$, que de manera inmediata muestra que f^{-1} no existe, a no ser que, por supuesto, hayamos restringido el dominio para eliminar uno de los dos signos + o −).

EJEMPLO 3 Encuentre una fórmula para $f^{-1}(x)$, si $y = f(x) = x/(1 - x)$.

SOLUCIÓN Aquí están los tres pasos para este ejemplo.

Paso 1:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{1 - x} \\ (1 - x)y &= x \\ y - xy &= x \\ x + xy &= y \\ x(1 + y) &= y \\ x &= \frac{y}{1 + y} \end{aligned}$$

Paso 2: $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1 + y}$

Paso 3: $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1 + x}$ ■

Derivadas de funciones inversas Concluimos esta sección investigando el vínculo entre la derivada de una función y la derivada de su inversa. Primero considere lo que le sucede a una recta l_1 cuando se refleja con respecto a la recta $y = x$. Como es

claro en la mitad izquierda de la figura 7, l_1 se refleja para dar la recta l_2; además, sus pendientes respectivas, m_1 y m_2, están relacionadas por $m_2 = 1/m_1$, siempre que $m_1 \neq 0$. Si sucede que l_1 tiene una recta tangente a la gráfica de f en el punto (c, d), entonces l_2 es la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en el punto (d, c) (véase la mitad de la derecha de la figura 7). Llegamos a la conclusión de que

$$(f^{-1})'(d) = m_2 = \frac{1}{m_1} = \frac{1}{f'(c)}$$

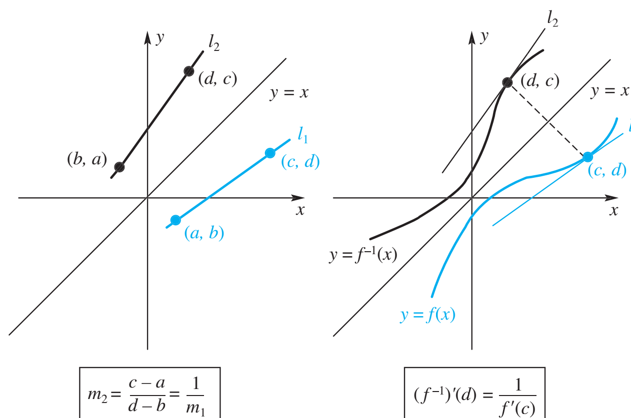


Figura 7

Algunas veces los dibujos son engañosos, de modo que sólo podemos afirmar haber hecho plausible el siguiente resultado. Para una demostración formal, véase cualquier texto de cálculo avanzado.

Teorema B **Teorema de la función inversa**

Sea f derivable y estrictamente monótona en un intervalo I. Si $f'(x) \neq 0$ en cierto x en I, entonces f^{-1} es derivable en el punto correspondiente $y = f(x)$ en el rango de f y

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Con frecuencia, la conclusión del teorema B se escribe de manera simbólica como

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

EJEMPLO 4 Sea $y = f(x) = x^5 + 2x + 1$, como en el ejemplo 1. Encuentre $(f^{-1})'(4)$.

SOLUCIÓN Aunque en este caso no podemos encontrar una fórmula para f^{-1}, notamos que $y = 4$ corresponde a $x = 1$, y como $f'(x) = 5x^4 + 2$,

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5+2} = \frac{1}{7}$$ ■

Revisión de conceptos

1. Una función es uno a uno si $x_1 \neq x_2$ implica ________.

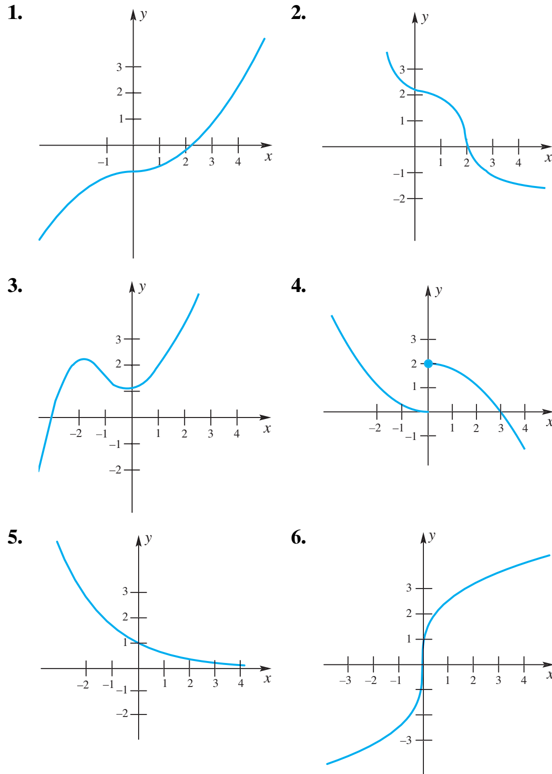
2. Una función f, uno a uno, tiene una inversa f^{-1} que satisface $f^{-1}(f(x)) =$ ________ y $f($________$) = y$.

3. Un criterio útil para que f sea uno a uno (y así tenga una inversa) en un dominio, es que f sea estrictamente ________ allí. Esto significa que f es ________ o bien ________.

4. Sea $y = f(x)$, en donde f tiene la inversa f^{-1}. La relación que conecta a las derivadas de f y f^{-1} es ________.

Conjunto de problemas 6.2

En los problemas del 1 al 6 se muestra la gráfica de $y = f(x)$. En cada caso, decida si f tiene una inversa y si es así, estime $f^{-1}(2)$.



En los problemas del 7 al 14 demuestre que f tiene una inversa revelando que es estrictamente monótona (véase el ejemplo 1).

7. $f(x) = -x^5 - x^3$

8. $f(x) = x^7 + x^5$

9. $f(\theta) = \cos\theta,\ 0 \le \theta \le \pi$

10. $f(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x},\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

11. $f(z) = (z-1)^2,\ z \ge 1$

12. $f(x) = x^2 + x - 6,\ x \ge 2$

13. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{t^4 + t^2 + 10}\, dt$

14. $f(r) = \displaystyle\int_r^1 \cos^4 t\, dt$

En los problemas del 15 al 28 encuentre una fórmula para $f^{-1}(x)$ y después verifique que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$ (véanse los ejemplos 2 y 3).

15. $f(x) = x + 1$

16. $f(x) = -\dfrac{x}{3} + 1$

17. $f(x) = \sqrt{x+1}$

18. $f(x) = -\sqrt{1-x}$

19. $f(x) = -\dfrac{1}{x-3}$

20. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-2}}$

21. $f(x) = 4x^2,\ x \le 0$

22. $f(x) = (x-3)^2,\ x \ge 3$

23. $f(x) = (x-1)^3$

24. $f(x) = x^{5/2},\ x \ge 0$

25. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

26. $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3$

27. $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^3+1}$

28. $f(x) = \left(\dfrac{x^3+2}{x^3+1}\right)^5$

29. Encuentre el volumen, V, de agua en el depósito cónico de la figura 8 como una función de la altura h. Después encuentre la altura h como una función del volumen V.

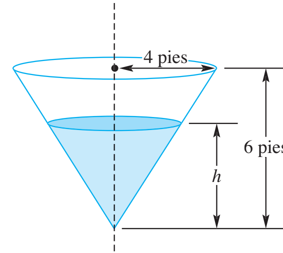


Figura 8

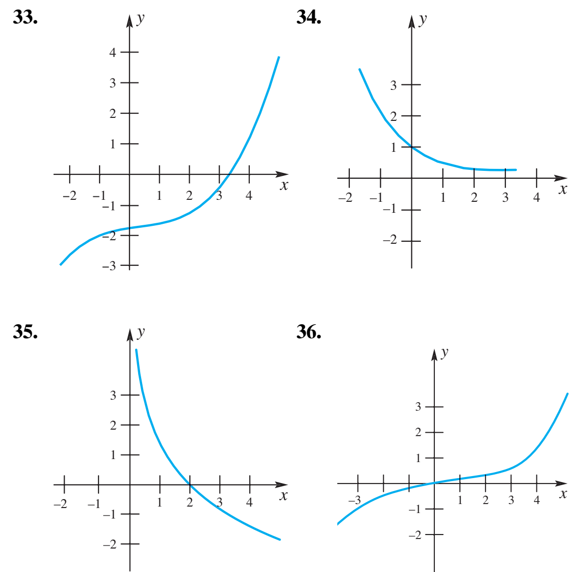
30. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con velocidad v_0. Encuentre la altura máxima H de la pelota como una función de v_0. Luego encuentre la velocidad v_0 que se requiere para alcanzar una altura H.

En los problemas 31 y 32 restrinja el dominio de f de modo que f tenga una inversa, pero mantenga su rango tan grande como sea posible. Después encuentre $f^{-1}(x)$. Sugerencia: primero haga una gráfica de f.

31. $f(x) = 2x^2 + x - 4$

32. $f(x) = x^2 - 3x + 1$

En cada uno de los problemas del 33 al 36 se muestra la gráfica de $y = f(x)$. Haga un bosquejo de la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ y estime $(f^{-1})'(3)$.



En los problemas del 37 al 40 encuentre $(f^{-1})'(2)$ mediante el teorema B (véase el ejemplo 4). Observe que por inspección usted puede determinar la x correspondiente a $y = 2$.

37. $f(x) = 3x^5 + x - 2$

38. $f(x) = x^5 + 5x - 4$

39. $f(x) = 2 \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

40. $f(x) = \sqrt{x + 1}$

41. Suponga que f y g tienen inversas y que $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Demuestre que h tiene una inversa dada por $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

42. Verifique el resultado del problema 41 para $f(x) = 1/x$, $g(x) = 3x + 2$.

43. Si $f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \cos^2 t}\, dt$, entonces f tiene una inversa. (¿Por qué?). Sea $A = f(\pi/2)$ y $B = f(5\pi/6)$. Encuentre

(a) $(f^{-1})'(A)$, (b) $(f^{-1})'(B)$,

(c) $(f^{-1})'(0)$.

44. Sea $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ y suponga que $bc - ad \neq 0$.

(a) Encuentre la fórmula para $f^{-1}(x)$.

(b) ¿Por qué es necesaria la condición $bc - ad \neq 0$?

(c) ¿Qué condición sobre a, b, c y d harán que $f = f^{-1}$?

45. Suponga que f es continua y estrictamente creciente en $[0, 1]$ con $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Si $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{2}{5}$, calcule $\int_0^1 f^{-1}(y)\, dy$. *Sugerencia:* haga un dibujo.

EXPL **46.** Sea f continua y estrictamente creciente en $[0, \infty)$ con $f(0) = 0$ y $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$. Utilice un razonamiento geométrico para establecer la **desigualdad de Young**. Para $a > 0, b > 0$,

$$ab \leq \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^b f^{-1}(y)\, dy$$

¿Cuál es la condición para que se cumpla como igualdad?

EXPL **47.** Sean $p > 1, q > 1$ y $1/p + 1/q = 1$. Demuestre que la inversa de $f(x) = x^{p-1}$ es $f^{-1}(y) = y^{q-1}$ y utilice esto junto con el problema 46 para demostrar la **desigualdad de Minkowski**:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad a > 0, b > 0$$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $f(x_1) \neq f(x_2)$ **2.** $x; f^{-1}(y)$ **3.** monótona; creciente; decreciente **4.** $(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)$

6.3 La función exponencial natural

La gráfica de $y = f(x) = \ln x$ se obtuvo al final de la sección 6.1 y se reproduce en la figura 1. La función logaritmo natural es derivable (y por lo tanto continua) y creciente en su dominio $D = (0, \infty)$; su rango es $R = (-\infty, \infty)$. De hecho, es precisamente la clase de función estudiada en la sección 6.2 y, por lo tanto, tiene una inversa $\ln^{-1}$ con dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $(0, \infty)$. Esta función es tan importante que se le da nombre y símbolo especiales.

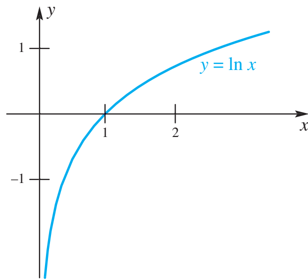


Figura 1

Definición

La inversa de ln se denomina **función exponencial natural** y se denota por exp. Así,

$$x = \exp y \quad \Leftrightarrow \quad y = \ln x$$

De inmediato, de esta definición se deduce que:

1. $\exp(\ln x) = x, \quad x > 0$
2. $\ln(\exp y) = y, \quad$ para toda y

Como exp y ln son funciones inversas, la gráfica de $y = \exp x$ es sólo la gráfica de $y = \ln x$ reflejada respecto a la recta $y = x$ (véase la figura 2).

Pero, ¿a qué se debe el nombre de *función exponencial*? Ya lo verá.

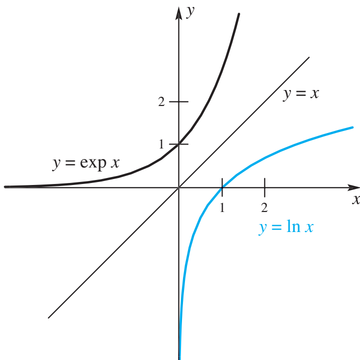


Figura 2

Propiedades de la función exponencial Empezamos por introducir una nuevo número, el cual, al igual que π, es tan importante en matemáticas que tiene un símbolo especial, e. La letra e es adecuada porque Leonardo Euler fue el primero en reconocer la importancia de este número.

Definición

La letra e denota al único número real positivo tal que $\ln e = 1$.

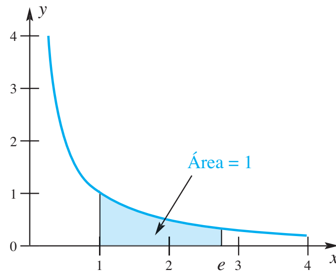


Figura 3

Definiciones de e

Los autores eligen diferentes formas para definir e.

1. $e = \ln^{-1} 1$ (nuestra definición)
2. $e = \lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h}$
3. $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$

En nuestro texto, las definiciones 2 y 3 se vuelven teoremas. (Véase la sección 6.5, teorema A.

La figura 3 ilustra esta definición; el área bajo la gráfica de $y = 1/x$ entre $x = 1$ y $x = e$ es 1. Ya que $\ln e = 1$ también es cierto que $\exp 1 = e$. El número e, al igual que π, es irracional. Se conocen miles de cifras decimales en su desarrollo decimal; los primeros dígitos son

$$e \approx 2.718281828459045$$

Ahora hacemos una observación crucial, una que depende sólo de hechos ya demostrados: la parte (1) anterior y el teorema 6.1A. Si r es cualquier número racional,

$$e^r = \exp(\ln e^r) = \exp(r \ln e) = \exp r$$

Hagamos énfasis en el resultado. Para r racional, $\exp r$ *es idéntico a* e^r. Lo que se introdujo de una manera más abstracta como la inversa del logaritmo natural, que a su vez se definió como una integral, resultó ser una simple potencia.

¿Pero qué sucede si r es irracional? Aquí le recordamos un hueco en todos los textos de álgebra elemental. Nunca se definen potencias irracionales mediante algún enfoque riguroso. ¿Qué significa $e^{\sqrt{2}}$? Usted tendrá momentos difíciles para precisar ese número con base en álgebra elemental. Pero se debe precisar si vamos a hablar de cosas como $D_x e^x$. Guiados por lo que aprendimos anteriormente, simplemente definimos e^x para toda x (racional e irracional) como

$$e^x = \exp x$$

Obsérvese que (1) y (2) al inicio de esta sección ahora toman la siguiente forma:

$$(1)' \quad e^{\ln x} = x, \qquad x > 0$$
$$(2)' \quad \ln(e^y) = y, \qquad \text{para toda } y$$

Asimismo, observe que (1)′ dice que $\ln x$ es el *exponente* que necesita ponerle a e para obtener x. Ésta es sólo la definición usual del logaritmo en la base e, como se da en la mayoría de los libros de precálculo.

Ahora, con facilidad podemos demostrar dos leyes conocidas de los exponentes.

Teorema A

Sean a y b cualesquiera números reales. Entonces $e^a e^b = e^{a+b}$ y $e^a/e^b = e^{a-b}$.

Demostración Para demostrar la primera, escribimos

$$\begin{aligned} e^a e^b &= \exp(\ln e^a e^b) && \text{(por (1))} \\ &= \exp(\ln e^a + \ln e^b) && \text{(Teorema 6.1A)} \\ &= \exp(a + b) && \text{(por (2)')} \\ &= e^{a+b} && \text{(ya que } \exp x = e^x\text{)} \end{aligned}$$

El segundo hecho se demuestra de manera análoga. ■

Un ave fénix

El número e aparece a lo largo de las matemáticas, pero su importancia radica seguramente más en su uso como la base para la función exponencial natural. Pero, ¿qué hace a esta función tan importante?

"¿Quién no se ha sorprendido al aprender que la función $y = e^x$, como un ave fénix que renace de sus cenizas, es su propia derivada?".

François Le Lionnais

La derivada de e^x Como exp y ln son inversas, del teorema 6.2B sabemos que $\exp x = e^x$ es derivable. A fin de encontrar una fórmula para $D_x e^x$, podríamos utilizar ese teorema. De manera alternativa, sea $y = e^x$ de modo que

$$x = \ln y$$

Ahora derivamos ambos lados con respecto a x. Al usar la regla de la cadena obtenemos

$$1 = \frac{1}{y} D_x y$$

Con lo que

$$D_x y = y = e^x$$

Hemos demostrado el hecho notable de que e^x es su propia derivada; es decir,

$$\boxed{D_x e^x = e^x}$$

Así, $y = e^x$ es una solución de la ecuación diferencial $y' = y$.

Si $u = f(x)$ es derivable, entonces la regla de la cadena da

$$D_x e^u = e^u D_x u$$

EJEMPLO 1 Encuentre $D_x e^{\sqrt{x}}$.

SOLUCIÓN Por medio de $u = \sqrt{x}$, obtenemos

$$D_x e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}} D_x \sqrt{x} = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Encuentre $D_x e^{x^2 \ln x}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} D_x e^{x^2 \ln x} &= e^{x^2 \ln x} D_x(x^2 \ln x) \\ &= e^{x^2 \ln x}\left(x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x \ln x\right) \\ &= x e^{x^2 \ln x}(1 + \ln x^2) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Sea $f(x) = xe^{x/2}$. Determine en dónde f es creciente y en dónde es decreciente; también, en dónde es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo. Además, identifique todos los valores extremos y los puntos de inflexión. Después haga un bosquejo de la gráfica de f.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \frac{xe^{x/2}}{2} + e^{x/2} = e^{x/2}\left(\frac{x+2}{2}\right)$$

y

$$f''(x) = \frac{e^{x/2}}{2} + \left(\frac{x+2}{2}\right)\frac{e^{x/2}}{2} = e^{x/2}\left(\frac{x+4}{4}\right)$$

Teniendo en mente que $e^{x/2} > 0$ para toda x, vemos que $f'(x) < 0$ para $x < -2$, $f'(-2) = 0$ y $f'(x) > 0$ para toda $x > -2$. Por lo que f es decreciente en $(-\infty, -2]$ y creciente en $[-2, \infty)$, y tiene su valor mínimo en $x = -2$, de $f(-2) = -2/e \approx -0.7$.

También, $f''(x) < 0$ para $x < -4$, $f''(-4) = 0$ y $f''(x) > 0$ para $x > -4$; de modo que la gráfica de f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -4)$ y cóncava hacia arriba en $(-4, \infty)$, y tiene un punto de inflexión en $(-4, -4e^{-2}) \approx (-4, -0.54)$. Como $\lim_{x \to -\infty} xe^{x/2} = 0$, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal. Esta información justifica la gráfica de la figura 4. $\blacksquare$

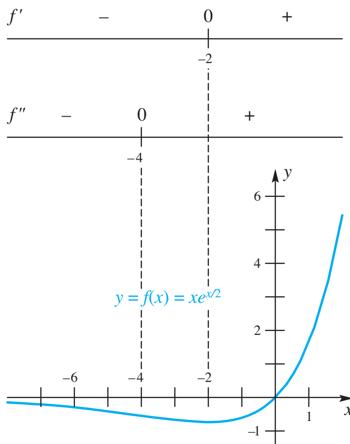


Figura 4

La fórmula de la derivada $D_x e^x = e^x$ de forma automática produce la fórmula de la integral $\int e^x\,dx = e^x + C$, o, con u en lugar de x.

$$\boxed{\int e^u\,du = e^u + C}$$

EJEMPLO 4 Evalúe $\int e^{-4x}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = -4x$, de modo que $du = -4\,dx$. Entonces

$$\int e^{-4x}\,dx = -\frac{1}{4}\int e^{-4x}(-4\,dx) = -\frac{1}{4}\int e^{u}\,du = -\frac{1}{4}e^{u} + C = -\frac{1}{4}e^{-4x} + C$$ ■

EJEMPLO 5 Evalúe $\int x^2 e^{-x^3}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = -x^3$, de modo que $du = -3x^2\,dx$. Entonces

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x^3}\,dx &= -\frac{1}{3}\int e^{-x^3}(-3x^2\,dx)\\ &= -\frac{1}{3}\int e^{u}\,du = -\frac{1}{3}e^{u} + C\\ &= -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 6 Evalúe $\int_1^3 xe^{-3x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = -3x^2$, por lo que $du = -6x\,dx$. Entonces

$$\begin{aligned}\int xe^{-3x^2}\,dx &= -\frac{1}{6}\int e^{-3x^2}(-6x\,dx) = -\frac{1}{6}\int e^{u}\,du\\ &= -\frac{1}{6}e^{u} + C = -\frac{1}{6}e^{-3x^2} + C\end{aligned}$$

Así, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_1^3 xe^{-3x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{6}e^{-3x^2}\right]_1^3 = -\frac{1}{6}(e^{-27} - e^{-3}) = \frac{e^{-3} - e^{-27}}{6} \approx 0.0082978$$

El último resultado puede obtenerse de manera directa con una calculadora. ■

EJEMPLO 7 Evalúe $\int \frac{6e^{1/x}}{x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Considere $\int e^{u}\,du$. Sea $u = 1/x$, por lo que $du = (-1/x^2)dx$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{6e^{1/x}}{x^2}\,dx &= -6\int e^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}dx\right) = -6\int e^{u}\,du\\ &= -6e^{u} + C = -6e^{1/x} + C\end{aligned}$$ ■

Aunque el símbolo e^y sustituirá en el resto del libro a exp y, éste aparece con frecuencia en la escritura científica, en especial cuando el exponente y es complicado. Por ejemplo, en estadística, muchas veces uno encuentra la función de densidad normal, que es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Revisión de conceptos

1. La función ln es ________ en $(0, \infty)$ y así tiene una inversa denotada por $\ln^{-1}$ o por ________.

2. El número e se define en términos de ln por ________; su valor con dos decimales es ________.

3. Como $e^x = \exp x = \ln^{-1} x$, se sigue que $e^{\ln x} =$ ________ para $x > 0$ y $\ln(e^x) =$ ________.

4. Dos hecho notables acerca de e^x son que $D_x(e^x) =$ ________ y $\int e^x\,dx =$ _____.

Conjunto de problemas 6.3

C **1.** Utilice su calculadora para computar cada una de las siguientes expresiones.
Nota: en algunas calculadoras existe un botón e^x. En otras usted debe presionar los botones INV (o 2nd) y ln x.

(a) e^3 (b) $e^{2.1}$

(c) $e^{\sqrt{2}}$ (d) $e^{\cos(\ln 4)}$

C **2.** Calcule lo siguiente y explique por qué sus respuestas no son sorprendentes.

(a) $e^{3 \ln 2}$ (b) $e^{(\ln 64)/2}$

En los problemas del 3 al 10 simplifique la expresión dada.

3. $e^{3 \ln x}$ **4.** $e^{-2 \ln x}$

5. $\ln e^{\cos x}$ **6.** $\ln e^{-2x-3}$

7. $\ln(x^3 e^{-3x})$ **8.** $e^{x - \ln x}$

9. $e^{\ln 3 + 2 \ln x}$ **10.** $e^{\ln x^2 - y \ln x}$

En los problemas del 11 al 22 encuentre $D_x y$ (véanse los ejemplos 1 y 2).

11. $y = e^{x+2}$ **12.** $y = e^{2x^2 - x}$

13. $y = e^{\sqrt{x+2}}$ **14.** $y = e^{-1/x^2}$

15. $y = e^{2 \ln x}$ **16.** $y = e^{x/\ln x}$

17. $y = x^3 e^x$ **18.** $y = e^{x^3 \ln x}$

19. $y = \sqrt{e^{x^2}} + e^{\sqrt{x^2}}$ **20.** $y = e^{1/x^2} + 1/e^{x^2}$

21. $e^{xy} + xy = 2$ *Sugerencia:* utilice derivación implícita.

22. $e^{x+y} = 4 + x + y$

23. Utilice su conocimiento de la gráfica de $y = e^x$ para hacer un dibujo de las gráficas de (a) $y = -e^x$ y (b) $y = e^{-x}$.

24. Explique por qué $a < b \Rightarrow e^{-a} > e^{-b}$.

En los problemas del 25 al 36 determine, primero, el dominio de la función que se da y luego determine en dónde es creciente, decreciente, y también en dónde es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo. Identifique todos los valores extremos y los puntos de inflexión. Después haga un bosquejo de la gráfica $y = f(x)$.

25. $f(x) = e^{2x}$ **26.** $f(x) = e^{-x/2}$

27. $f(x) = xe^{-x}$ **28.** $f(x) = e^x + x$

29. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ **30.** $f(x) = \ln(2x - 1)$

31. $f(x) = \ln(1 + e^x)$ **32.** $f(x) = e^{1-x^2}$

33. $f(x) = e^{-(x-2)^2}$ **34.** $f(x) = e^x - e^{-x}$

35. $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ **36.** $f(x) = \int_0^x te^{-t}\, dt$

En los problemas del 37 al 44 encuentre cada integral.

37. $\int e^{3x+1}\, dx$ **38.** $\int xe^{x^2-3}\, dx$

39. $\int (x + 3)e^{x^2+6x}\, dx$ **40.** $\int \frac{e^x}{e^x - 1}\, dx$

41. $\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}\, dx$ **42.** $\int e^{x+e^x}\, dx$

43. $\int_0^1 e^{2x+3}\, dx$ **44.** $\int_1^2 \frac{e^{3/x}}{x^2}\, dx$

45. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar, alrededor del eje x, la región acotada por $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \ln 3$.

46. La región acotada por $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, se hace girar con respecto al eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

47. Encuentre el área de la región acotada por la curva $y = e^{-x}$ y la recta que pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, 1/e)$.

48. Demuestre que $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} - \ln(1 - e^{-x})$ es decreciente para $x > 0$.

C **49.** La **fórmula de Stirling** dice que para n grande podemos aproximar $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ por

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(a) Calcule 10! de manera exacta, luego de forma aproximada mediante la fórmula anterior.

(b) Aproxime 60!.

50. Encuentre la longitud de la curva dada paramétricamente por $x = e^t \operatorname{sen} t$, $y = e^t \cos t$, $0 \le t \le \pi$.

C **51.** Si en un contador de registro los clientes llegan a una tasa promedio de k por minuto, entonces (véanse libros sobre teoría de probabilidad) la probabilidad de que exactamente n clientes lleguen en un periodo de x minutos está dado por la fórmula

$$P_n(x) = \frac{(kx)^n e^{-kx}}{n!}, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Encuentre la probabilidad de que lleguen exactamente 8 clientes durante un periodo de 30 minutos, si la tasa promedio para este contador de registro es de 1 cliente cada 4 minutos.

52. Sea $f(x) = \frac{\ln x}{1 + (\ln x)^2}$ para x en $(0, \infty)$. Encuentre:

(a) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ y $\lim_{x \to \infty} f(x)$;

(b) los valores máximo y mínimo de $f(x)$.

(c) $F'(\sqrt{e})$ si $F(x) = \int_1^{x^2} f(t)\, dt$.

53. Sea R la región acotada por $x = 0$, $y = e^x$ y la recta tangente a $y = e^x$ que pasa por el origen. Encuentre:

(a) el área de R;

(b) el volumen del sólido que se obtiene cuando R se hace girar alrededor del eje x.

GC *Utilice una calculadora gráfica o un CAS para resolver los problemas del 55 al 60.*

54. Evalúe.

(a) $\int_{-3}^3 \exp(-1/x^2)\, dx$ (b) $\int_0^{8\pi} e^{-0.1x} \operatorname{sen} x\, dx$

55. Evalúe.

(a) $\lim_{x \to 0}(1 + x)^{1/x}$ (b) $\lim_{x \to 0}(1 + x)^{-1/x}$

56. Determine el área de la región entre las gráficas de $y = f(x) = \exp(-x^2)$ y $y = f''(x)$ en $[-3, 3]$.

EXPL **57.** Dibuje las gráficas de $y = x^p e^{-x}$ para diferentes valores de p utilizando los mismos ejes. Haga conjeturas acerca de:

(a) $\lim_{x\to\infty} x^p e^{-x}$,

(b) la abscisa x del punto máximo para $f(x) = x^p e^{-x}$.

58. Describa el comportamiento de $\ln(x^2 + e^{-x})$ para x grandes negativas. Para x grandes positivas.

59. Dibuje las gráficas de f y f', donde $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$. Después determine cada uno de lo siguiente:

(a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

(c) $\lim_{x\to \pm\infty} f(x)$ (d) $\lim_{x\to 0} f'(x)$

(e) Los valores máximo y mínimo de f (si existen).

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** creciente; exp **2.** $\ln e = 1$; 2.72 **3.** $x; x$ **4.** e^x; $e^x + C$

6.4 Funciones exponencial y logarítmica generales

En la sección anterior definimos $e^{\sqrt{2}}$, e^{π}, y todas las demás potencias irracionales de e. Pero, ¿qué hay acerca de $2^{\sqrt{2}}$, π^{π}, π^{e}, y potencias irracionales semejantes de otros números? De hecho, queremos darle significado a a^x para $a > 0$ y x cualquier número real. Ahora, si $r = p/q$ es un número racional, entonces $a^r = (\sqrt[q]{a})^p$. Pero también sabemos que

$$a^r = \exp(\ln a^r) = \exp(r \ln a) = e^{r \ln a}$$

Esto sugiere la definición de la **función exponencial para la base *a***.

Definición

Para $a > 0$ y cualquier número real x,

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Por supuesto, esta definición será apropiada sólo si las propiedades usuales de los exponentes son válidas para ella, un tema que en breve abordaremos. Para apuntalar nuestra confianza en la definición, la utilizamos para calcular 3^2 (con un poco de ayuda de nuestra calculadora):

$$3^2 = e^{2 \ln 3} \approx e^{2(1.0986123)} \approx 9.000000$$

Su calculadora puede dar un resultado que difiere un poco de 9. Las calculadoras utilizan aproximaciones para e^x y $\ln x$, y redondean a un número fijo de decimales (por lo común, alrededor de 8).

Ahora podemos llenar un pequeño hueco en las propiedades del logaritmo natural que se dejó desde la sección 6.1.

$$\ln(a^x) = \ln(e^{x \ln a}) = x \ln a$$

Así, la propiedad (iv) del teorema 6.1A se cumple para todo real x, no sólo para x racional, como se afirmó allí. Necesitaremos este hecho en la siguiente demostración del teorema A.

Propiedades de a^x El teorema A resume las propiedades conocidas de los exponentes, todas las cuales pueden demostrarse ahora de una manera completamente rigurosa. El teorema B nos muestra cómo derivar e integrar a^x.

Teorema A Propiedades de los exponentes

Si $a > 0$, $b > 0$ y x y y son números reales, entonces

(i) $a^x a^y = a^{x+y}$; (ii) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$; (iv) $(ab)^x = a^x b^x$;

(v) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

¿Qué significa 2^{π}?

En álgebra, 2^n se define primero para enteros positivos n. Así, $2^1 = 2$ y $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Después, definimos 2^n para cero,

$$2^0 = 1$$

y para enteros negativos:

$$2^{-n} = 1/2^n \quad \text{si} \quad n > 0$$

Esto significa que $2^{-3} = 1/2^3 = 1/8$. Por último, usamos las funciones raíces para definir 2^r para números racionales r. Así,

$$2^{7/3} = \sqrt[3]{2^7}$$

Se requiere del cálculo para ampliar la definición de 2^x al conjunto de los números reales. Una manera de definir 2^{π} sería decir que es el límite de la sucesión

$$2^3, 2^{3.1}, 2^{3.14}, 2^{3.141}, \ldots$$

La definición que usamos es

$$2^{\pi} = e^{\pi \ln 2}$$

Esta definición implica al cálculo, ya que nuestra definición de logaritmo natural incluye la integral definida.

Demostración Demostraremos (ii) y (iii), dejándole las demás a usted.

(ii) $$\frac{a^x}{a^y} = e^{\ln(a^x/a^y)} = e^{\ln a^x - \ln a^y}$$
$$= e^{x \ln a - y \ln a} = e^{(x-y)\ln a} = a^{x-y}$$

(iii) $$(a^x)^y = e^{y \ln a^x} = e^{yx \ln a} = a^{yx} = a^{xy}$$ ■

Teorema B Reglas de la función exponencial

$$D_x a^x = a^x \ln a$$
$$\int a^x\, dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^x + C, \qquad a \neq 1$$

Demostración

$$D_x a^x = D_x(e^{x \ln a}) = e^{x \ln a} D_x(x \ln a)$$
$$= a^x \ln a$$

La fórmula para la integral se deduce de inmediato a partir de la fórmula para la derivada. ■

EJEMPLO 1 Encuentre $D_x\left(3^{\sqrt{x}}\right)$.

SOLUCIÓN Utilizamos la regla de la cadena con $u = \sqrt{x}$.

$$D_x\left(3^{\sqrt{x}}\right) = 3^{\sqrt{x}} \ln 3 \cdot D_x\sqrt{x} = \frac{3^{\sqrt{x}} \ln 3}{2\sqrt{x}}$$ ■

EJEMPLO 2 Encuentre dy/dx si $y = (x^4 + 2)^5 + 5^{x^4+2}$.

SOLUCIÓN

$$\frac{dy}{dx} = 5(x^4 + 2)^4 \cdot 4x^3 + 5^{x^4+2} \ln 5 \cdot 4x^3$$
$$= 4x^3[5(x^4 + 2)^4 + 5^{x^4+2} \ln 5]$$
$$= 20x^3[(x^4 + 2)^4 + 5^{x^4+1} \ln 5]$$ ■

EJEMPLO 3 Encuentre $\int 2^{x^3} x^2\, dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = x^3$, por lo que $du = 3x^2\, dx$. Entonces

$$\int 2^{x^3} x^2\, dx = \frac{1}{3}\int 2^{x^3}(3x^2\, dx) = \frac{1}{3}\int 2^u\, du$$
$$= \frac{1}{3}\frac{2^u}{\ln 2} + C = \frac{2^{x^3}}{3 \ln 2} + C$$ ■

La función $\log_a$ Por último, estamos preparados para hacer una conexión con los logaritmos que usted estudió en álgebra. Observemos que si $0 < a < 1$, entonces $f(x) = a^x$ es una función decreciente; si $a > 1$, entonces es una función creciente, como puede verificarlo considerando la derivada. En cualquier caso, f tiene una inversa. A esta inversa le llamamos la **función logaritmo de base *a***. Esto es equivalente a la siguiente definición.

Definición

Sea a un número positivo distinto de 1. Entonces

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

¿Por qué otras bases?

En realidad, ¿son necesarias otras bases distintas de e? No. Las fórmulas

$$a^x = e^{x \ln a}$$

y

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

nos permite convertir cualquier problema que implica funciones exponenciales o funciones logarítmicas con base a a funciones correspondientes con base e. Esto sustenta nuestra terminología: funciones exponencial *natural* y logarítmica *natural*. También explica el uso universal de estas funciones en trabajo avanzado.

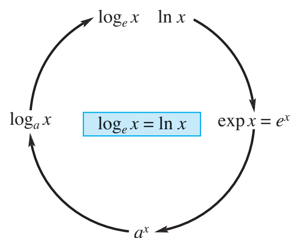


Figura 1

Históricamente, la base 10 fue la más comúnmente utilizada y los logaritmos resultantes fueron denominados **logaritmos comunes**. Pero en cálculo y todas las matemáticas avanzadas, la base importante es e. Observe que $\log_e$, al ser la inversa de $f(x) = e^x$, sólo es otro símbolo para ln; esto es,

$$\log_e x = \ln x$$

Hemos cerrado el círculo (véase la figura 1). La función ln, que introdujimos en la sección 6.1, resultó ser un logaritmo ordinario de una base especial, e.

Ahora, observe que si $y = \log_a x$ de modo que $x = a^y$, entonces

$$\ln x = y \ln a$$

de lo cual concluimos que

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$$

De esto, se sigue que $\log_a$ satisface las propiedades usuales asociadas con los logaritmos (véase el teorema 6.1A). También,

$$\boxed{D_x \log_a x = \frac{1}{x \ln a}}$$

EJEMPLO 4 Si $y = \log_{10}(x^4 + 13)$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

SOLUCIÓN Sea $u = x^4 + 13$ y aplique la regla de la cadena.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^4 + 13) \ln 10} \cdot 4x^3 = \frac{4x^3}{(x^4 + 13) \ln 10}$$ ■

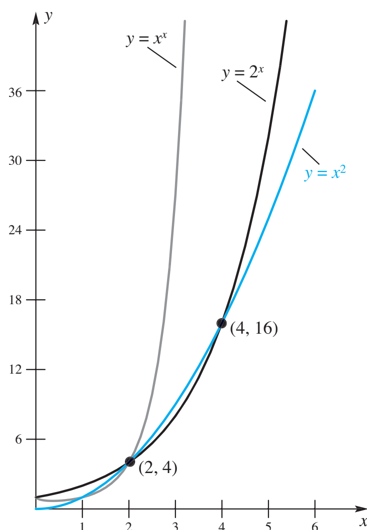


Figura 2

Las funciones a^x, x^a, y x^x Iniciamos con la comparación de las tres gráficas de la figura 2. De manera más general, sea a una constante. No confunda $f(x) = a^x$, una *función exponencial*, con $g(x) = x^a$, una *función potencia*. Y no confunda sus derivadas. Acabamos de aprender que

$$\boxed{D_x(a^x) = a^x \ln a}$$

¿Qué hay acerca de $D_x(x^a)$? Para a racional, en el capítulo 2 demostramos la regla de la potencia, la cual dice que

$$D_x(x^a) = ax^{a-1}$$

Ahora, afirmamos que esto es cierto aun si a es irracional. Para ver esto, escríbase

$$D_x(x^a) = D_x(e^{a \ln x}) = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x}$$
$$= x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

La regla correspondiente para integrales también se cumple, incluso si a es irracional.

$$\boxed{\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a + 1} + C, \qquad a \neq -1}$$

Por último, consideramos $f(x) = x^x$, una variable de una potencia variable. Existe una fórmula para $D_x(x^x)$, pero no le recomendamos que la memorice. En lugar de eso, le sugerimos que aprenda dos métodos para encontrarla, como se ilustra a continuación.

EJEMPLO 5 Si $y = x^x$, $x > 0$, encuentre $D_x y$ por medio de dos métodos diferentes.

SOLUCIÓN

Método 1 Podemos escribir

$$y = x^x = e^{x \ln x}$$

Así, por la regla de la cadena y la regla del producto,

$$D_x y = e^{x \ln x} D_x(x \ln x) = x^x\left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x\right) = x^x(1 + \ln x)$$

Método 2 Recuerde la técnica de la *diferenciación logarítmica* de la sección 6.1.

$$y = x^x$$

$$\ln y = x \ln x$$

$$\frac{1}{y} D_x y = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x$$

$$D_x y = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$$

■

EJEMPLO 6 Si $y = (x^2 + 1)^\pi + \pi^{\sin x}$, encuentre dy/dx.

SOLUCIÓN

$$\frac{dy}{dx} = \pi(x^2 + 1)^{\pi - 1}(2x) + \pi^{\operatorname{sen} x} \ln \pi \cdot \cos x$$

■

De a^x a $[f(x)]^{g(x)}$

Observe la creciente complejidad de las funciones que hemos considerado. La progresión a^x a x^a a x^x es una cadena. Una cadena más complicada es $a^{f(x)}$ a $[f(x)]^a$ a $[f(x)]^{g(x)}$. Ahora sabemos cómo encontrar las derivadas de todas estas funciones. Determinar la derivada de la última de éstas se realiza mejor por medio de diferenciación logarítmica, una técnica introducida en la sección 6.1 e ilustrada en los ejemplos 5 y 7.

EJEMPLO 7 Si $y = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen} x}$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

SOLUCIÓN Utilizamos la diferenciación logarítmica.

$$\ln y = (\operatorname{sen} x) \ln(x^2 + 1)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\operatorname{sen} x)\frac{2x}{x^2 + 1} + (\cos x)\ln(x^2 + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen} x}\left[\frac{2x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1} + (\cos x)\ln(x^2 + 1)\right]$$

■

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{5^{1/x}}{x^2}\, dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = 1/x$, por lo que $du = (-1/x^2)\, dx$. Entonces

$$\int \frac{5^{1/x}}{x^2}\, dx = -\int 5^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\, dx\right) = -\int 5^u\, du$$

$$= -\frac{5^u}{\ln 5} + C = -\frac{5^{1/x}}{\ln 5} + C$$

Por lo tanto, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo ,

$$\int_{1/2}^{1} \frac{5^{1/x}}{x^2} dx = \left[-\frac{5^{1/x}}{\ln 5}\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{\ln 5}(5^2 - 5)$$

$$= \frac{20}{\ln 5} \approx 12.43$$

■

Revisión de conceptos

1. En términos de e y ln, $\pi^{\sqrt{3}}$ = _____. De una forma más general, a^x = _____.

2. $\ln x = \log_a x$, donde a = _____.

3. $\log_a x$ puede expresarse en términos de ln por medio de $\log_a x$ = _____.

4. La derivada de la función potencia $f(x) = x^a$ es $f'(x)$ = _____; la derivada de la función exponencial $g(x) = a^x$ es $g'(x)$ = _____.

Conjunto de problemas 6.4

En los problemas del 1 al 8 despeje x. Sugerencia: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$.

1. $\log_2 8 = x$ **2.** $\log_5 x = 2$

3. $\log_4 x = \frac{3}{2}$ **4.** $\log_x 64 = 4$

5. $2\log_9\left(\frac{x}{3}\right) = 1$ **6.** $\log_4\left(\frac{1}{2x}\right) = 3$

7. $\log_2(x+3) - \log_2 x = 2$

8. $\log_5(x+3) - \log_5 x = 1$

C *Utilice* $\log_a x = (\ln x)/(\ln a)$ *para calcular cada uno de los logaritmos en los problemas del 9 al 12.*

9. $\log_5 12$ **10.** $\log_7(0.11)$

11. $\log_{11}(8.12)^{1/5}$ **12.** $\log_{10}(8.57)^7$

C *En los problemas del 13 al 16 utilice logaritmos naturales para resolver cada una de las* ecuaciones exponenciales. Sugerencia: *para resolver* $3^x = 11$ *tome ln de ambos lados, obteniendo* $x \ln 3 = \ln 11$; *entonces* $x = (\ln 11)/(\ln 3) \approx 2.1827$.

13. $2^x = 17$ **14.** $5^x = 13$

15. $5^{2s-3} = 4$ **16.** $12^{1/(\theta-1)} = 4$

En los problemas del 17 al 26 encuentre la derivada o integral que se indica.

17. $D_x(6^{2x})$ **18.** $D_x(3^{2x^2-3x})$

19. $D_x \log_3 e^x$ **20.** $D_x \log_{10}(x^3+9)$

21. $D_z[3^z \ln(z+5)]$ **22.** $D_\theta\sqrt{\log_{10}(3^{\theta^2-\theta})}$

23. $\int x2^{x^2}\,dx$ **24.** $\int 10^{5x-1}\,dx$

25. $\int_1^4 \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ **26.** $\int_0^1 (10^{3x} + 10^{-3x})\,dx$

En los problemas del 27 al 32 encuentre dy/dx. Observación: debe distinguir entre los problemas del tipo a^x, x^a y x^x como en los ejemplos del 5 al 7.

27. $y = 10^{(x^2)} + (x^2)^{10}$ **28.** $y = \operatorname{sen}^2 x + 2^{\operatorname{sen} x}$

29. $y = x^{\pi+1} + (\pi+1)^x$ **30.** $y = 2^{(e^x)} + (2^e)^x$

31. $y = (x^2+1)^{\ln x}$ **32.** $y = (\ln x^2)^{2x+3}$

33. Si $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$, encuentre $f'(1)$.

C **34.** Sea $f(x) = \pi^x$ y $g(x) = x^\pi$. ¿Cuál es mayor, $f(e)$ o $g(e)$? ¿$f'(e)$ o $g'(e)$?

En los problemas del 35 al 40 primero determine el dominio de la función f dada y, luego, determine en dónde es creciente y decreciente; también en dónde es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. Identifique todos los valores extremos y los puntos de inflexión. Luego haga un bosquejo de la gráfica de $y = f(x)$.

35. $f(x) = 2^{-x}$ **36.** $f(x) = x2^{-x}$

37. $f(x) = \log_2(x^2+1)$ **38.** $f(x) = x\log_3(x^2+1)$

39. $f(x) = \int_1^x 2^{-t^2}\,dt$

40. $f(x) = \int_0^x \log_{10}(t^2+1)\,dt$

41. ¿Cómo están relacionados $\log_{1/2}x$ y $\log_2 x$?

42. Haga un dibujo de las gráficas de $\log_{1/3}x$ y $\log_3 x$, utilizando los mismos ejes de coordenadas.

C **43.** La magnitud M de un terremoto en la **escala de Richter** es

$$M = 0.67\log_{10}(0.37E) + 1.46$$

donde E es la energía del terremoto en kilowatts–hora. Encuentre la energía de un terremoto de magnitud 7. De magnitud 8.

C **44.** La intensidad del sonido se mide en decibeles, en honor de Alejandro Graham Bell (1847–1922), inventor del teléfono. Si la variación en la presión es de P libras por pulgada cuadrada, entonces la intensidad L en decibeles es

$$L = 20\log_{10}(121.3P)$$

Encuentre la variación en la presión causada por una banda de rock a 115 decibeles.

C **45.** En la escala igualmente temperada a la cual se han afinado los instrumentos de teclado desde la época de J. S. Bach (1685–1750), las frecuencias de notas sucesivas C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A#, B, $\overline{\text{C}}$ (Do, Do sostenido, Re, Re sostenido, Mi, Fa, Fa sostenido, Sol, Sol sostenido, La, La sostenido, Si, Do, respectivamente)¿Cuál es la razón r entre las frecuencias de notas sucesivas? Si la frecuencia de A es 440 vibraciones por segundo, encuentre la frecuencia de $\overline{\text{C}}$.

46. Demuestre que $\log_2 3$ es irracional. *Sugerencia:* use la demostración por contradicción.

GC **47.** Usted sospecha que los datos xy que recopiló están en una curva exponencial $y = Ab^x$ o bien en una curva potencia $y = Cx^d$. Para verificar, grafique ln y contra x en una gráfica, y ln y contra ln x en otra. (Las calculadoras gráficas y los CAS tienen opciones para hacer que el eje vertical o ambos ejes, vertical y horizontal tengan escala logarítmica.) Explique cómo le pueden ayudar estas gráficas para que llegue a una conclusión.

48. (Un pasatiempo) Dado el problema de encontrar y', si $y = x^x$, el estudiante A hizo lo siguiente:

Error 1

$$y = x^x$$
$$y' = x \cdot x^{x-1} \cdot 1 \quad \left(\begin{array}{l}\text{aplicación errónea de}\\ \text{la regla de la potencia}\end{array}\right)$$
$$= x^x$$

El estudiante B hizo esto:

Error 2

$$y = x^x$$
$$y' = x^x \cdot \ln x \cdot 1 \quad \left(\begin{array}{l}\text{aplicación errónea de}\\ \text{la regla de la función}\\ \text{exponencial}\end{array}\right)$$
$$= x^x \ln x$$

La suma $x^x + x^x \ln x$ es correcta (véase el ejemplo 5), de modo que

ERROR 1 + ERROR 2 = CORRECTO

Demuestre que el mismo procedimiento da una respuesta correcta para $y = f(x)^{g(x)}$.

49. Convénzase usted mismo de que $f(x) = (x^x)^x$ y $f(x) = (x^x)^x$ y $g(x) = x^{(x^x)}$ no son la misma función. Después encuentre $f'(x)$ y $g'(x)$. *Observación:* cuando los matemáticos escriben x^{x^x}, quieren decir $x^{(x^x)}$.

50. Considere $f(x) = \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$ para a fija, $a > 0, a \neq 1$. Demuestre que f tiene una inversa y encuentre una fórmula para $f^{-1}(x)$.

51. Para $a > 1$ fija, sea $f(x) = x^a/a^x$ en $[0, \infty)$. Demuestre:

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ *Sugerencia:* estudie $\ln f(x)$;

(b) $f(x)$ se maximiza en $x_0 = a/\ln a$;

(c) $x^a = a^x$ tiene dos posibles soluciones si $a \neq e$ y sólo una solución si $a = e$;

(d) $\pi^e < e^\pi$.

52. Sea $f_u(x) = x^u e^{-x}$ para $x \geq 0$. Demuestre que para cualquier $u > 0$ fija:

(a) $f_u(x)$ alcanza su máximo en $x_0 = u$;

(b) $f_u(u) > f_u(u + 1)$ y $f_{u+1}(u + 1) > f_{u+1}(u)$ implican

$$\left(\frac{u+1}{u}\right)^u < e < \left(\frac{u+1}{u}\right)^{u+1}$$

(c) $\dfrac{u}{u+1}\, e < \left(\dfrac{u+1}{u}\right)^u < e.$

De la parte (c) concluya que $\lim_{u\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{u}\right)^u = e.$

GC **53.** Encuentre $\lim_{x\to 0^+} x^x$. También encuentre las coordenadas del punto mínimo para $f(x) = x^x$ en $[0, 4]$.

GC **54.** Dibuje las gráficas de $y = x^3$ y $y = 3^x$ utilizando los mismos ejes y encuentre todos sus puntos de intersección.

CAS **55.** Evalúe $\displaystyle\int_0^{4\pi} x^{\operatorname{sen} x}\, dx.$

CAS **56.** Con referencia al problema 49. Dibuje las gráficas de f y g utilizando los mismos ejes. Después dibuje las gráficas de f' y g' utilizando los mismo ejes.

Hasta ahora, nuestra experiencia al graficar se ha restringido a utilizar espaciamiento estándar (lineal) en las coordenadas. Al trabajar con funciones exponenciales y logarítmicas puede ser más instructivo utilizar escalas logarítmicas y log-log. Exploramos estas técnicas en los problemas 57 y 58.

GC **57.** En un solo conjunto de ejes utilice su calculadora para dibujar las gráficas de $y = 2^x$, $y = 3^x$ y $y = 4^x$, en el intervalo $0 < x < 4$. Haga lo mismo para las funciones inversas $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$ y $y = \log_4 x$. Si utilizamos un programa de graficación por computadora que permita el uso de ejes semilogarítmico (una escala logarítmica en el eje y y una escala normal en el eje x) para graficar las funciones $y = 2^x$, $y = 3^x$ y $y = 4^x$ en la región $-5 < x < 5$ (véase la figura 3), obtenemos tres rectas.

(a) Identifique cada una de las rectas en la figura 3.

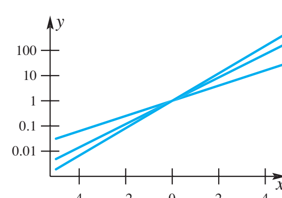


Figura 3

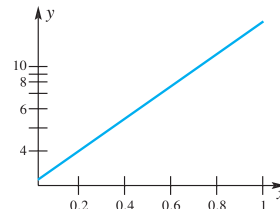


Figura 4

(b) Al observar que si $y = Cb^x$ entonces $\ln y = \ln C + x \ln b$, explique por qué todas las curvas en la figura 3 son rectas que pasan por el punto $(0, 1)$.

(c) Con base en la gráfica semilogarítmica dada en la figura 4, determine C y b en la ecuación $y = Cb^x$.

58. Si utilizamos escala logarítmica tanto en el eje x como en el eje y (denominada gráfica log–log) y graficamos varias funciones potencia, también obtendremos rectas. Utilizando el resultado de que, al tomar logaritmos, $y = Cx^r$ se transforma en $\log y = \log C + r \log x$, identifique las ecuaciones que se graficaron en la figura 5.

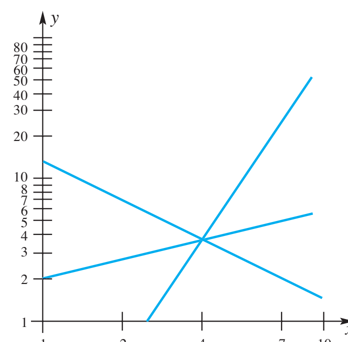


Figura 5

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $e^{\sqrt{3}\ln \pi}$; $e^{x \ln a}$ **2.** e **3.** $(\ln x)/(\ln a)$ **4.** ax^{a-1}; $a^x \ln a$

6.5 Crecimiento y decaimiento exponenciales

Al principio de 2004, la población mundial era de alrededor de 6400 millones. Se dice que para el año 2020, alcanzará 7900 millones. ¿Cómo se hacen tales predicciones?

Para tratar el problema de forma matemática, denótese con $y = f(t)$ al tamaño de la población en el instante t, en donde t es el número de años a partir de 2004. Realmente, $f(t)$ es un entero y su gráfica "da saltos" cuando alguien nace o alguien muere. Sin embargo, para una población grande, estos saltos son tan relativamente pequeños respecto a la población total que no nos equivocaremos mucho si suponemos que f es una función derivable.

Parece razonable suponer que el incremento Δy de la población (nacimientos menos decesos), durante un breve periodo Δt, es proporcional al tamaño de la población al inicio del periodo y a su tamaño. Así, $\Delta y = ky\Delta t$, o

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky$$

En su forma de límite, esto da la ecuación diferencial

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky}$$

Si $k > 0$, la población está creciendo; si $k < 0$, está disminuyendo. Para la población mundial, la historia indica que k es alrededor de 0.0132 (suponiendo que t se mide en años), aunque algunas agencias reportan una cifra diferente.

Resolución de la ecuación diferencial Iniciamos nuestro estudio de las ecuaciones diferenciales en la sección 3.9, y ahora podría remitirse a esa sección. Queremos resolver $dy/dt = ky$ sujeta a la condición $y = y_0$ cuando $t = 0$. Separando variables e integrando, obtenemos

$$\frac{dy}{y} = k\,dt$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dt$$

$$\ln y = kt + C$$

La condición $y = y_0$ en $t = 0$ da $C = \ln y_0$. Así,

$$\ln y - \ln y_0 = kt$$

o

$$\ln \frac{y}{y_0} = kt$$

Al cambiar a la forma exponencial se obtiene

$$\frac{y}{y_0} = e^{kt}$$

o, finalmente,

$$\boxed{y = y_0 e^{kt}}$$

Cuando $k > 0$, este tipo de crecimiento se denomina **crecimiento exponencial**, y cuando $k < 0$ se llama **decaimiento exponencial**.

De regreso al problema de la población mundial, elegimos para medir el tiempo t en años después del 1 de enero de 2004, y y en miles de millones de personas. Así, $y_0 = 6.4$ y como $k = 0.0132$,

$$y = 6.4e^{0.0132t}$$

Para el año 2020, cuando $t = 16$, podemos pronosticar que y será alrededor de

$$y = 6.4e^{0.0132(16)} \approx 7.9 \text{ mil millones.}$$

EJEMPLO 1 Bajo las suposiciones anteriores, ¿cuánto tiempo tardará la población mundial en duplicarse?

SOLUCIÓN La interrogante es equivalente a preguntar "¿dentro de cuántos años, a partir de 2004, la población alcanzará 12.8 mil millones? Necesitamos resolver

$$12.8 = 6.4e^{0.0132t}$$
$$2 = e^{0.0132t}$$

para t. Al tomar logaritmos de ambos lados se obtiene

$$\ln 2 = 0.0132t$$
$$t = \frac{\ln 2}{0.0132} \approx 53 \text{ años}$$ ■

Si la población mundial se duplicará en los primeros 53 años a partir de 2004, se duplicará en cualquier periodo de 53 años; así, por ejemplo, se cuadruplicará en 106 años. De forma más general, si una cantidad con crecimiento exponencial se duplica de y_0 a $2y_0$ en un intervalo de longitud T, se duplicará en *cualquier* intervalo de longitud T, ya que

$$\frac{y(t+T)}{y(t)} = \frac{y_0 e^{k(t+T)}}{y_0 e^{kt}} = \frac{y_0 e^{kT}}{y_0} = \frac{2y_0}{y_0} = 2$$

Denominamos al número T el **tiempo de duplicación**.

EJEMPLO 2 El número de bacterias en un cultivo que crece con rapidez se estimó que era de 10,000 al mediodía y 40,000 después de 2 horas. Haga una predicción de cuántas bacterias habrá a las 5 p. m.

SOLUCIÓN Suponemos que la ecuación diferencial $dy/dt = ky$ es aplicable, de modo que $y = y_0 e^{kt}$. Ahora tenemos dos condiciones ($y_0 = 10,000$ y $y = 40,000$ en $t = 2$), de las cuales podemos concluir que

$$40,000 = 10,000e^{k(2)}$$

o

$$4 = e^{2k}$$

Al tomar logaritmos se obtiene

$$\ln 4 = 2k$$

o

$$k = \tfrac{1}{2}\ln 4 = \ln\sqrt{4} = \ln 2$$

Así,

$$y = 10,000e^{(\ln 2)t}$$

y, en $t = 5$, esto da

$$y = 10,000e^{0.693(5)} \approx 320,000$$ ■

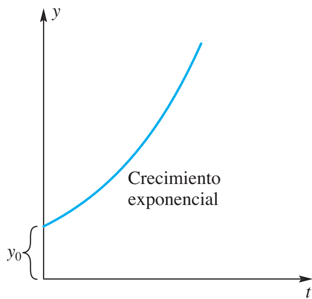


Figura 1

El modelo exponencial $y = y_0 e^{kt}$, $k > 0$, para el crecimiento poblacional es erróneo ya que, para el futuro, proyecta un crecimiento cada vez más rápido de manera indefinida (véase la figura 1). En la mayoría de los casos (incluyendo el de la población mundial), la cantidad limitada de espacio y recursos eventualmente forzará un descenso en la tasa de crecimiento. Esto sugiere otro modelo para el crecimiento poblacional, denominado **modelo logístico**, en el cual suponemos que la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño de la población y y a la diferencia $L - y$, donde L es la población máxima que puede sostenerse con los recursos. Esto conduce a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky(L - y)$$

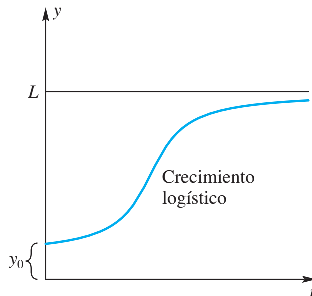


Figura 2

Observe que para y pequeña, $dy/dt \approx kLy$ sugiere un crecimiento del tipo exponencial. Pero cuando y se acerca a L, el crecimiento se reduce y dy/dt se hace cada vez más pequeña, produciendo una curva de crecimiento parecida al de la figura 2. Este modelo se explora en los problemas 34, 35 y 49 de esta sección y de nueva cuenta en la sección 7.5.

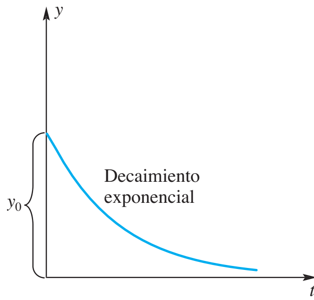


Figura 3

Decaimiento radiactivo No todo crece; algunas cosas disminuyen con el tiempo. Por ejemplo, los elementos radiactivos *decaen*, y lo hacen a una tasa proporcional a la cantidad presente. Así, su cambio también satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

pero ahora con k negativa. Aún es cierto que $y = y_0 e^{kt}$ es la solución de esta ecuación. Una gráfica representativa aparece en la figura 3.

EJEMPLO 3 El carbono 14, un isótopo del carbono, es radiactivo y decae a una tasa proporcional a la cantidad presente. Su **vida media** es de 5730 años; es decir, tarda 5730 años para que una cantidad dada de carbono 14 decaiga a un medio de su cantidad original. Si originalmente estaban presentes 10 gramos, ¿cuánto quedará después de 2000 años?

SOLUCIÓN La vida media de 5730 nos permite determinar k, ya que implica que

$$\frac{1}{2} = 1e^{k(5730)}$$

o, después de tomar logaritmos,

$$-\ln 2 = 5730k$$

$$k = \frac{-\ln 2}{5730} \approx -0.000121$$

Así,

$$y = 10e^{-0.000121t}$$

En $t = 2000$, esto da

$$y = 10e^{-0.000121(2000)} \approx 7.85 \text{ gramos}$$

■

En el problema 17 demostramos cómo el ejemplo 3 puede utilizarse para determinar la edad de fósiles y otros seres, alguna vez, vivos.

Ley de enfriamiento de Newton La ley de enfriamiento de Newton establece que la tasa a la que un objeto se enfría (o calienta) es proporcional a la diferencia de la temperatura entre el objeto y el medio que lo rodea. Para ser específico, suponga que un objeto, que inicialmente se encuentra a una temperatura T_0, se coloca en una habitación donde la temperatura es T_1. Si $T(t)$ representa a la temperatura del objeto en el instante t, entonces la ley de enfriamiento de Newton dice que

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_1)$$

Esta ecuación diferencial es separable y puede resolverse como los problemas de crecimiento y decaimiento en esta sección.

EJEMPLO 4 Un objeto se saca de un horno a 350°F y se deja enfriar en una habitación que está a 70°F. Si la temperatura del objeto desciende a 250°F en una hora, ¿cuál será su temperatura tres horas después de que se sacó del horno?

SOLUCIÓN La ecuación diferencial puede escribirse como

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70)$$

$$\frac{dT}{T - 70} = k\,dt$$

$$\int \frac{dT}{T - 70} = \int k\,dt$$

$$\ln|T - 70| = kt + C$$

Como la temperatura inicial es mayor que 70, parece razonable que la temperatura del objeto descenderá hacia 70; por lo tanto, $T - 70$ será positivo y el valor absoluto no es necesario. Esto conduce a

$$T - 70 = e^{kt+C}$$
$$T = 70 + C_1 e^{kt}$$

en donde $C_1 = e^C$. Ahora aplicamos la solución inicial, $T(0) = 350$ para determinar C_1:

$$350 = T(0) = 70 + C_1 e^{k \cdot 0}$$
$$280 = C_1$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial es

$$T(t) = 70 + 280e^{kt}$$

Para determinar k aplicamos la condición que en el tiempo $t = 1$, la temperatura fue $T(1) = 250$.

$$250 = T(1) = 70 + 280e^{k \cdot 1}$$
$$280e^k = 180$$
$$e^k = \frac{180}{280}$$
$$k = \ln\frac{180}{280} \approx -0.44183$$

Esto da

$$T(t) = 70 + 280e^{-0.44183t}$$

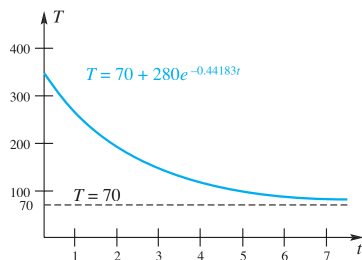


Figura 4

Véase la figura 4. Al cabo de 3 horas, la temperatura es

$$T(3) = 70 + 280e^{-0.44183 \cdot 3} \approx 144.4°\text{F}$$ ■

Interés compuesto Si colocamos \$100 en el banco a 12% de interés compuesto mensualmente, al final del primer mes su valor será \$100(1.01); al final de 2 meses, $\$100(1.01)^2$ y al final de 12 meses, un año, de $\$100(1.01)^{12}$. De manera más general, si ponemos A_0 dólares en el banco a $100r$ por ciento compuesto n veces por año, su valor será de $A(t)$ dólares al final de t años, donde

$$A(t) = A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

EJEMPLO 5 Supóngase que Catherine pone \$500 en el banco a 4% de interés compuesto diariamente. ¿Cuánto tendrá al final de 3 años?

SOLUCIÓN Aquí, $r = 0.04$ y $n = 365$, de modo que

$$A = 500\left(1 + \frac{0.04}{365}\right)^{365(3)} \approx \$563.74$$ ■

Ahora consideremos lo que sucede cuando el interés se **compone continuamente**, es decir, cuando n, el número de periodos de composición en un año, tiende a infinito. Entonces afirmamos que

$$A(t) = \lim_{n\to\infty} A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt}$$
$$= A_0\left[\lim_{h\to 0}(1 + h)^{1/h}\right]^{rt} = A_0 e^{rt}$$

Aquí se reemplazó r/n por h y se observó que $n \to \infty$, corresponde a $h \to 0$. Pero el gran salto es reconocer que la expresión entre corchetes es el número e. Este resultado es suficientemente importante para llamarle teorema.

Teorema A

$$\lim_{h\to 0}(1 + h)^{1/h} = e$$

Otra mirada a la continuidad

Recuerde que decir que una función es continua en x_0 significa que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Esto es,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$$

Así, la continuidad para una función significa que podemos meter un límite dentro de la función. Esto es lo que hicimos para la función $f(x) = \exp(x)$ casi al final de la demostración del teorema A.

Demostración Primero recuerde que si $f(x) = \ln x$ entonces $f'(x) = 1/x$ y, en particular, $f'(1) = 1$. Entonces, con base en la definición de la derivada y las propiedades de ln, obtenemos

$$1 = f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1 + h) - \ln 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1 + h) = \lim_{h\to 0}\ln(1 + h)^{1/h}$$

Así, $\lim_{h\to 0}\ln(1 + h)^{1/h} = 1$, un resultado que utilizaremos en un momento. Ahora, $g(x) = e^x = \exp x$ es una función continua y, por lo tanto, se sigue que podemos pasar el límite dentro de la función exponencial en el siguiente argumento:

$$\lim_{h\to 0}(1 + h)^{1/h} = \lim_{h\to 0}\exp[\ln(1 + h)^{1/h}] = \exp\left[\lim_{h\to 0}\ln(1 + h)^{1/h}\right]$$

$$= \exp 1 = e$$ ■

Para otra demostración del teorema A, véase el problema 52 de la sección 6.4.

EJEMPLO 6 Suponga que el banco del ejemplo 5 capitaliza de manera continua. ¿Entonces, cuánto tendría Catherine al final de 3 años?

SOLUCIÓN

$$A(t) = A_0 e^{rt} = 500e^{(0.04)(3)} \approx \$563.75$$

Observe que, aunque algunos bancos tratan de sacar mucho provecho al ofrecer interés compuesto continuamente, la diferencia que se obtiene entre interés continuo e interés compuesto diariamente (el cual ofrecen muchos bancos) es minúscula. ■

He aquí otro enfoque al problema de interés compuesto continuamente. Sea A el valor en el instante t de A_0 dólares invertidos a la tasa de interés r. Decir que el interés se compone de manera continua es decir que la tasa instantánea de cambio de A respecto al tiempo es rA; es decir,

$$\frac{dA}{dt} = rA$$

Esta ecuación diferencial se resolvió al inicio de la sección; su solución es $A = A_0e^{rt}$.

Revisión de conceptos

1. La tasa de cambio dy/dt de una cantidad y que crece exponencialmente satisface la ecuación diferencial $dy/dt =$ ______. En contraste, si y crece de manera logística hacia una cota superior L, $dy/dt =$ ______.

2. Si una cantidad que crece exponencialmente se duplica al cabo de T años, será ______ veces mayor después de $3T$ años.

3. El tiempo para que una cantidad y que decae exponencialmente pase de un tamaño y_0 a un tamaño $y_0/2$ se denomina ______.

4. El número e puede expresarse como un límite por $e = \lim_{h\to 0}$ ______.

Conjunto de problemas 6.5

En los problemas del 1 al 4 resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a la condición que se da. Observe que y(a) denota el valor de y en t = a.

1. $\frac{dy}{dt} = -6y,\ y(0) = 4$ **2.** $\frac{dy}{dt} = 6y,\ y(0) = 1$

3. $\frac{dy}{dt} = 0.005y,\ y(10) = 2$

4. $\frac{dy}{dt} = -0.003y,\ y(-2) = 3$

5. Una población de bacterias crece a una tasa proporcional a su tamaño. Al principio, es de 10,000 y después de 10 días es 20,000. ¿Cuál será la población después de 25 días? Véase el ejemplo 2.

6. ¿Cuánto tardará la población del ejercicio 5 en duplicarse? Véase el ejemplo 1.

7. ¿Cuánto tardará la población del ejercicio 5 en triplicarse? Véase el ejemplo 1.

8. La población de Estados Unidos fue de 3.9 millones en 1790 y de 178 millones en 1960. Si se supone que la tasa de crecimiento es proporcional al número presente, ¿qué estimación daría para la población en el año 2000? (Compare su respuesta con la población real de 2000, que es 275 millones).

9. La población de cierto país crece 3.2% por año; esto es, si es A al inicio de un año es $1.032A$ al final de ese año. Si se supone que ahora es de 4.5 millones, ¿cuál será al final de 1 año? ¿De 2 años? ¿De 10 años? ¿De 100 años?

10. Determine la constante de proporcionalidad k en $dy/dt = ky$ para el problema 9. Después utilice $y = 4.5e^{kt}$ para encontrar la población al cabo de 100 años.

11. Una población que crece a una tasa proporcional a su tamaño. Al cabo de 5 años, el tamaño de la población fue 164,000. Después de 12 años, el tamaño de la población fue 235,000. ¿Cuál fue el tamaño original de la población?

12. La masa de un tumor crece a una tasa proporcional a su tamaño. La primera medida de su tamaño fue de 4.0 gramos. Cuatro meses después su masa fue 6.76 gramos. ¿De qué tamaño era el tumor seis meses antes de la primera medición? Si el instrumento puede detectar los tumores de masa de 1 gramo o mayores, ¿se hubiese detectado el tumor en ese momento?

13. Una sustancia radiactiva tiene una vida media de 700 años. Si al inicio había 10 gramos, ¿cuánto quedará después de 300 años?

14. Si una sustancia radiactiva pierde 15% de su radiactividad en 2 días, ¿cuál es su vida media?

15. El cesio 137 y el estroncio 90 son dos elementos químicos radiactivos que fueron liberados en el reactor nuclear de Chernobyl en abril de 1986. La vida media del cesio 137 es de 30.22 años, y la del estroncio 90 es de 28.8 años. ¿En qué año la cantidad de cesio 137 será igual a 1% de la cantidad que fue liberada? Responda esta pregunta para el estroncio 90.

16. Se estudia una cantidad desconocida de una sustancia radiactiva. Después de dos días, la masa es 15.231 gramos. Al cabo de ocho días, la masa es 9.086 gramos. ¿Qué cantidad había inicialmente? ¿Cuál es la vida media de esta sustancia?

17. (Fechado con carbono) Todos los seres vivos contienen carbono 12, que es estable, y carbono 14, que es radiactivo. Mientras una planta o un animal están vivos, la razón de estos dos isótopos de carbono permanece sin cambio, ya que el carbono 14 se renueva de manera constante; al morir, ya no se absorbe más carbono 14. La vida media del carbono 14 es de 5370 años. Si los troncos carbonizados de una vieja fortaleza sólo muestran 70% del carbono 14 esperado en la materia viva, ¿cuándo fue incendiada la fortaleza? Suponga que la fortaleza se quemó tan pronto como fue construida con troncos recién cortados.

18. Se probó que el cabello humano de una tumba en África sólo tenía 51% del carbono 14 del tejido viviente. ¿Cuándo fue sepultado el cuerpo?

19. Un objeto se saca de un horno a 300°F, y se deja enfriar en una habitación a 75°F. Si la temperatura descendió a 200°F en $\frac{1}{2}$ hora, ¿cuál será la temperatura del objeto después de 3 horas?

20. Un termómetro registró –20°C en el exterior y después se introdujo a la casa en donde la temperatura era de 24°C. Después de 5 minutos, el termómetro registró 0°C. ¿Cuándo marcará 20°C?

21. Un objeto que es encontraba inicialmente a 26°C se coloca en agua, cuya temperatura es de 90°C. Si la temperatura del objeto se elevó a 70°C en 5 minutos, ¿cuál será la temperatura al cabo de 10 minutos?

22. Un conjunto de bizcochos se saca de un horno a 350°F; enseguida se coloca en un refrigerador a 40°F y se deja enfriar. Después de 15 minutos, los bizcochos han descendido a 250°F. ¿Cuándo tendrán los bizcochos una temperatura de 110°F?

23. Un cadáver se encuentra a las 10 p. m., y tiene una temperatura de 82°F. Una hora después la temperatura fue de 76°F. La temperatura de la habitación se mantuvo constante a 70°F. Suponiendo que la temperatura del cuerpo era 98.6°F cuando estaba vivo, estime la hora de la muerte.

24. Resuelva la ecuación diferencial para ley de enfriamiento de Newton, para T_0, T_1 y k arbitrarias, suponiendo que $T_0 > T_1$. Demuestre que $\lim_{t\to\infty} T(t) = T_1$.

25. Si hoy se ponen $375 en el banco, ¿cuál será su valor al final de 2 años, si el interés es de 3.5% y se compone como se especifica?

(a) Anualmente (b) Mensualmente

(c) Diariamente (d) Continuamente

26. Resuelva el problema 25 suponiendo que la tasa de interés es 4.6%.

27. ¿Cuánto tarda el dinero en duplicar su valor para las tasas de interés que se especifican?

(a) 6% compuesto mensualmente

(b) 6% compuesto de manera continua

28. La inflación entre 1999 y 2004 fue de alrededor de 2.5% anual. Con esta base, ¿cuánto esperaría usted que costase en 2004 un automóvil que en 1999 costó $20,000?

29. Se dice que Peter Minuit compró la isla de Manhattan por $24 en 1626. Suponga que Minuit hubiese puesto los $24 en el banco a 6% de interés compuesto de manera continua. ¿Cuál sería el valor de esos $24 en el año 2000?

30. Si los padres de Matusalén hubiesen puesto para él $100 en el banco cuando nació y los hubiesen dejado allí, ¿cuánto hubiese tenido Matusalén al morir (969 años después), si el interés fuese de 4% compuesto por año?

31. Determine el valor de \$1000 al final de 1 año, cuando el interés de 5% se compone (o capitaliza) de manera continua. Esto se denomina **valor futuro**.

32. Suponga que al cabo de 1 año, usted tiene \$1000 en un banco. Si el interés se capitalizó de manera continua a 5%, ¿cuánto dinero depositó en el banco un año antes? Esto se denomina **valor presente**.

33. Más adelante se demostrará para x pequeñas que $\ln(1+x) \approx x$. Utilice este hecho para demostrar que el tiempo de duplicación para el dinero invertido al p por ciento compuesto cada año es alrededor de $70/p$ años.

34. La ecuación para el crecimiento logístico es

$$\frac{dy}{dt} = ky(L - y)$$

Demuestre que esta ecuación diferencial tiene la solución

$$y = \frac{Ly_0}{y_0 + (L - y_0)e^{-Lkt}}$$

Sugerencia: $\dfrac{1}{y(L-y)} = \dfrac{1}{Ly} + \dfrac{1}{L(L-y)}$.

35. Bosqueje la gráfica de la solución del problema 34 cuando $y_0 = 6.4$, $L = 16$ y $k = 0.00186$ (un *modelo logístico* para la población mundial; véase el estudio al inicio de esta sección). Observe que $\lim\limits_{t\to\infty} y = 16$.

36. Encuentre cada uno de los siguientes límites

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{1000}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}(1)^{1/x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1 + \varepsilon)^{1/x}, \varepsilon > 0$ (d) $\lim\limits_{x\to 0^-}(1 + \varepsilon)^{1/x}, \varepsilon > 0$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$

37. Utilice el hecho de que $e = \lim\limits_{h\to 0}(1 + h)^{1/h}$ para encontrar cada límite.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(1 - x)^{1/x}$ *Sugerencia:* $(1 - x)^{1/x} = [(1 - x)^{1/(-x)}]^{-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + 3x)^{1/x}$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{2n}$

38. Demuestre que la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ay + b$$

tiene solución

$$y = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{at} - \frac{b}{a}$$

Suponga que $a \neq 0$.

39. Considere un país con una población de 10 millones en 1985, una tasa de crecimiento de 1.2% anual y una inmigración de otros países de 60,000 por año. Utilice la ecuación diferencial del problema 38 para modelar esta situación y predecir la población en 2010. Tome $a = 0.012$.

40. Se dice que una noticia importante se difunde en una población adulta de tamaño fijo L a una tasa de tiempo proporcional al número de personas que no han escuchado la noticia. Cinco días después de un escándalo en la ciudad, una encuesta mostró que la mitad de las personas lo habían escuchado. ¿Cuánto tardará para que 99% de las personas lo oigan?

EXPL *Además de proporcionar una forma fácil de derivar producto, la derivación logarítmica también proporciona una medida de la **tasa de cambio relativa** o **fraccionaria**, definida como y'/y. En los problemas 41 a 44 exploramos estos conceptos.*

41. Demuestre que la tasa de cambio relativa de e^{kt} como una función de t es k.

42. Demuestre que la tasa de cambio relativa de cualquier polinomio tiende a cero cuando la variable independiente tiende a infinito.

43. Demuestre que si la tasa de cambio relativa es una constante positiva, entonces la función debe representar crecimiento exponencial.

44. Demuestre que si la tasa de cambio relativa es una constante negativa, entonces la función debe representar decaimiento exponencial.

45. Supóngase que (1) la población mundial continúa creciendo de forma exponencial con constante de crecimiento $k = 0.0132$, (2) se necesita $\frac{1}{2}$ acre de tierra para proporcionar alimento a una persona y (3) en el mundo existen 13,500,000 millas cuadradas de tierra cultivable. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que el mundo alcance la población máxima? *Nota:* en el año 2004 había 6.4 mil millones de personas y 1 milla cuadrada es igual a 640 acres.

GC **46.** La oficina de censos estima que la tasa de crecimiento k de la población mundial disminuirá aproximadamente 0.0002 por año, durante las siguientes décadas. En 2004, k fue 0.0132.

(a) Exprese k como una función del tiempo t, en donde t se mide en años, a partir de 2004.

(b) Encuentre una ecuación diferencial que modele la población y para este problema.

(c) Resuelva la ecuación diferencial con la condición adicional de que la población mundial en 2004 ($t = 0$) era 6.4 mil millones.

(d) Haga una gráfica de la población y para los siguientes 300 años.

(e) Con este modelo, ¿Cuándo alcanzará un máximo la población? ¿Cuándo la población descenderá por debajo del nivel de 2004?

GC **47.** Repita el ejercicio 46 bajo la hipótesis de que k disminuirá 0.0001 por año.

EXPL **48.** Sea E una función derivable que satisface $E(u + v) = E(u)E(v)$ para toda u y v. Encuentre una fórmula para $E(x)$. *Sugerencia:* primero determine $E'(x)$.

GC **49.** Utilizando los mismos ejes, dibuje las gráficas para $0 \le t \le 100$ de los siguientes dos modelos para el crecimiento de la población mundial (ambos descritos en esta sección).

(a) Crecimiento exponencial: $y = 6.4e^{0.0132t}$

(b) Crecimiento logístico: $y = 102.4/(6 + 10e^{-0.030t})$

Compare lo que predicen los dos modelos para la población mundial en 2010, 2040 y 2090. *Nota:* ambos modelos suponen que la población mundial era de 6.4 mil millones en 2004 ($t = 0$).

GC **50.** Evalúe:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}(1 - x)^{1/x}$

El límite en la parte (a) determina e. ¿Qué número especial determina el límite de la parte (b)?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** ky; $ky(L - y)$ **2.** 8 **3.** vida media **4.** $(1 + h)^{1/h}$

6.6 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

En la sección 3.9 resolvimos por primera vez ecuaciones diferenciales. Allí desarrollamos el método de separación de variables para determinar una solución. En la sección anterior utilizamos el método de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales que incluyen crecimiento y decaimiento.

No todas las ecuaciones son *separables*. Por ejemplo, en la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 3y$$

no existe forma de separar las variables para que se tengan dy y todas las expresiones que incluyan a y en un lado y a dx, y a todas las expresiones que incluyan a x en el otro lado. Sin embargo, esta ecuación puede ponerse en la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones sólo de x. Se dice que una ecuación diferencial de esta forma es una **ecuación diferencial lineal de primer orden**. *Primer orden* se refiere al hecho de que la única derivada es una primera derivada. *Lineal* se refiere al hecho de que la ecuación puede escribirse en la forma $D_x y + P(x)Iy = Q(x)$, en donde D_x es el operador derivada, e I es el operador identidad (esto es, $Iy = y$). Ambos, D_x e I, son *operadores lineales*.

La familia de todas las soluciones de una ecuación diferencial se denomina **solución general**. Muchos problemas requieren que la solución satisfaga la condición $y = b$ cuando $x = a$, en donde se dan a y b. Tal condición se llama **condición inicial** y una función que satisface la ecuación diferencial y la condición inicial se denomina **solución particular**.

Resolución de ecuaciones lineales de primer orden Para resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden, primero multiplicamos ambos lados por el **factor de integración (o integrante)**

$$e^{\int P(x)\,dx}$$

(En breve, la razón para este paso se volverá claro.) Entonces, la ecuación diferencial es

$$e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)\,dx}P(x)y = e^{\int P(x)\,dx}Q(x)$$

El lado izquierdo es la derivada del producto $y \cdot e^{\int P(x)\,dx}$, de modo que la ecuación toma la forma

$$\frac{d}{dx}\left(y \cdot e^{\int P(x)\,dx}\right) = e^{\int P(x)\,dx}Q(x)$$

La integración de ambos lados da

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int \left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\right) dx$$

Así, la solución general es

$$y = e^{-\int P(x)\,dx} \int \left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\right) dx$$

No es bueno memorizar este resultado final; es fácil recordar el proceso de obtención y es lo que ilustramos.

EJEMPLO 1 Resuelva

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{\text{sen } 3x}{x^2}$$

SOLUCIÓN Nuestro factor integrante es

$$e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int (2/x)\,dx} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2$$

(Hemos tomado la constante arbitraria de la integración $\int P(x)\,dx$ igual a cero. La elección de la constante no afecta la respuesta. Véanse los problemas 27 y 28.) Al multiplicar ambos lados de la ecuación original por x^2, obtenemos

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = \text{sen } 3x$$

El lado izquierdo de esta ecuación es la derivada del producto x^2y. Así,

$$\frac{d}{dx}(x^2y) = \text{sen } 3x$$

La integración de ambos miembros da

$$x^2y = \int \text{sen } 3x\,dx = -\tfrac{1}{3}\cos 3x + C$$

o

$$y = \left(-\tfrac{1}{3}\cos 3x + C\right)x^{-2}$$

■

EJEMPLO 2 Encuentre la solución particular de

$$\frac{dy}{dx} - 3y = xe^{3x}$$

que satisface $y = 4$ cuando $x = 0$.

SOLUCIÓN El factor integrante apropiado es

$$e^{\int(-3)\,dx} = e^{-3x}$$

Al multiplicar por este factor, nuestra ecuación adquiere la forma

$$\frac{d}{dx}(e^{-3x}y) = x$$

o

$$e^{-3x}y = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Así, la solución general es

$$y = \frac{1}{2}x^2e^{3x} + Ce^{3x}$$

La sustitución de $y = 4$ cuando $x = 0$ hace $C = 4$. La solución particular deseada es

$$y = \frac{1}{2}x^2e^{3x} + 4e^{3x}$$

■

Aplicaciones Comenzamos con un problema de mezcla, típico de muchos problemas que surgen en química.

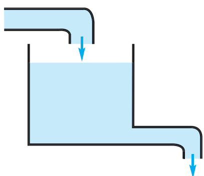


Figura 1

EJEMPLO 3 Un depósito contiene 120 galones de salmuera, con 75 libras de sal disuelta en solución. Agua con sal que contiene 1.2 libras de sal por galón se introduce al depósito a razón de 2 galones por minuto y la salmuera sale a la misma velocidad (véase la figura 1). Si la mezcla se mantiene uniforme mediante una agitación constante, encuentre la cantidad de sal en el tanque al cabo de una hora.

> **Un principio general**
>
> En problemas de flujo, tal como en el ejemplo 3, aplicamos un principio general. Suponga que y mide la cantidad de interés que está en el depósito en el instante t. Entonces, la tasa de cambio de y respecto al tiempo es la tasa de entrada menos la tasa de salida; esto es,
>
> $$\frac{dy}{dt} = \text{tasa de entrada} - \text{tasa de salida}$$

SOLUCIÓN Sea y el número de libras de sal en el tanque al final de t minutos. De la salmuera que entra, el tanque gana 2.4 libras de sal por minuto; de la que sale, pierde $\frac{2}{120}y$ libras por minuto. Así,

$$\frac{dy}{dt} = 2.4 - \frac{1}{60}y$$

sujeta a la condición $y = 75$ cuando $t = 0$. La ecuación equivalente

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{60}y = 2.4$$

tiene el factor integrante $e^{t/60}$ y así

$$\frac{d}{dt}[ye^{t/60}] = 2.4e^{t/60}$$

Concluimos que

$$ye^{t/60} = \int 2.4e^{t/60}\,dt = (60)(2.4)e^{t/60} + C$$

Al sustituir $y = 75$ cuando $t = 0$ se obtiene $C = -69$, y así

$$y = e^{-t/60}[144e^{t/60} - 69] = 144 - 69e^{-t/60}$$

Al final de una hora ($t = 60$),

$$y = 144 - 69e^{-1} \approx 118.62 \text{ libras}$$

Observe que el valor límite para y cuando $t \to \infty$ es 144. Esto corresponde al hecho de que el tanque tomará finalmente la configuración de la salmuera que entra al depósito. Ciento veinte galones de salmuera con una concentración de 1.2 libras de sal por galón contendrán 144 libras de sal. ■

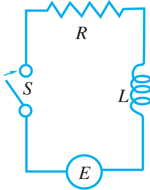


Figura 2

Ahora volvemos a un ejemplo de electricidad. De acuerdo con la **Ley de Kirchhoff**, un circuito eléctrico simple (véase la figura 2) que contiene un resistor con un aguante de R ohms y un inductor con una inductancia de L henrys en serie, con una fuerza electromotriz (una batería o un generador) que proporciona un voltaje de $E(t)$ voltios en el instante t, satisface

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

en donde I es la corriente medida en amperes. Ésta es una ecuación lineal que se resuelve con facilidad por medio del método de esta sección.

EJEMPLO 4 Considere un circuito (véase la figura 2) con $L = 2$ henrys, $R = 6$ ohms y una batería que proporciona un voltaje constante de 12 voltios. Si $I = 0$ en $t = 0$ (cuando se cierra el interruptor S, encuentre I en el instante t.

SOLUCIÓN La ecuación diferencial es

$$2\frac{dI}{dt} + 6I = 12 \quad \text{o} \quad \frac{dI}{dt} + 3I = 6$$

Siguiendo nuestro procedimiento estándar (multiplicar por el factor integrante e^{3t}, integrar y multiplicar por e^{-3t}), obtenemos

$$I = e^{-3t}(2e^{3t} + C) = 2 + Ce^{-3t}$$

La condición inicial, $I = 0$ en $t = 0$, da $C = -2$; de aquí que

$$I = 2 - 2e^{-3t}$$

Cuando aumenta t, la corriente tiende hacia una corriente de 2 amps. ■

Revisión de conceptos

1. La ecuación diferencial lineal general de primer orden tiene la forma $dy/dx + P(x)y = Q(x)$. Un factor integrante para esta ecuación es ________.

2. Al multiplicar ambos lados de la ecuación diferencial lineal de primer orden de la pregunta 1 por su factor integrante hace el lado izquierdo $\frac{d}{dx}$ (_______).

3. El factor integrante para $dy/dx - (1/x)y = x$, en donde $x > 0$, es _____. Cuando multiplicamos ambos lados por este factor, la ecuación toma la forma ______. La solución general para esta ecuación es $y =$ ______.

4. La solución para la ecuación diferencial en la pregunta 1, que satisface $y(a) = b$ se denomina solución ______.

Conjunto de problemas 6.6

En los problemas del 1 al 14 resuelva la ecuación diferencial.

1. $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$

2. $(x + 1)\frac{dy}{dx} + y = x^2 - 1$

3. $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = ax, |x| < 1$

4. $y' + y \tan x = \sec x$

5. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = xe^x$

6. $y' - ay = f(x)$

7. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$

8. $y' + \frac{2y}{x + 1} = (x + 1)^3$

9. $y' + yf(x) = f(x)$

10. $\frac{dy}{dx} + 2y = x$ *Sugerencia:* $\int xe^{2x}\,dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$

11. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 3x^3$; $y = 3$ cuando $x = 1$.

12. $y' = e^{2x} - 3y$; $y = 1$ cuando $x = 0$.

13. $xy' + (1 + x)y = e^{-x}$; $y = 0$ cuando $x = 1$.

14. $\operatorname{sen} x \frac{dy}{dx} + 2y \cos x = \operatorname{sen} 2x$; $y = 2$ cuando $x = \frac{\pi}{6}$.

15. Un depósito contiene 20 galones de una solución, con 10 libras de químico A en la solución. En un cierto instante, empezamos a agregar una solución que contiene el mismo químico en una concentración de 2 libras por galón. Vertimos a una velocidad de 3 galones por minuto mientras se drena la solución resultante (perfectamente mezclada) a la misma velocidad. Encuentra la cantidad de químico A en el depósito después de 20 minutos.

16. Al principio, un tanque contiene 200 galones de salmuera, con 50 libras de sal en solución. Al tanque entra salmuera que contiene 2 libras de sal por galón a una tasa de 4 galones por minuto, y sale a la misma tasa. Si la mezcla en el tanque se mantiene uniforme por agitación constante, encuentre la cantidad de sal en el tanque al final de 40 minutos.

17. Al inicio, un tanque contiene 120 galones de agua pura. 4 galones por minuto de salmuera con una libra de sal por galón entran al tanque, y la solución bien mezclada sale a una tasa de 6 galones por minuto. ¿Cuánta sal hay en el tanque después de t minutos, $0 \le t \le 60$?

18. Al principio, un tanque contiene 50 galones de salmuera, con 30 libras de sal en solución. Entra agua al tanque a 3 galones por minuto y la solución bien mezclada sale a 2 galones por minuto. ¿Cuánto tiempo pasará para que haya 25 libras de sal en el tanque?

19. Encuentre la corriente I como función del tiempo para el circuito de la figura 3, si el interruptor S se cierra cuando $I = 0$ en $t = 0$.

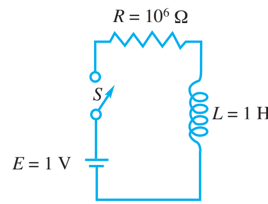


Figura 3

20. Encuentre I como función del tiempo para el circuito de la figura 4; suponga que el interruptor se cierra e $I = 0$ en $t = 0$.

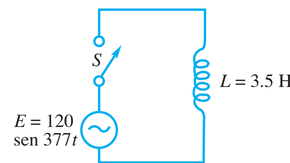


Figura 4

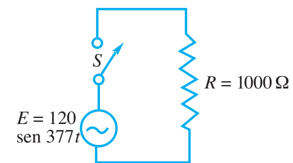


Figura 5

21. Encuentre I como función del tiempo para el circuito de la figura 5; suponga que el interruptor se cierra e $I = 0$ en $t = 0$.

22. Suponga que al principio el tanque 1 contiene 100 galones de solución con 50 libras de sal disuelta, y el tanque 2 contiene 200 galones con 150 libras de sal disuelta. Al tanque 1 entra agua pura a razón de 2 galones por minuto, la solución bien mezclada sale y entra al tanque 2 a la misma tasa, y finalmente la solución en el tanque 2 se drena también a la misma tasa. Denótense con $x(t)$ y $y(t)$ las cantidades de sal en los tanques 1 y 2, respectivamente, en el instante t. Encuentre $y(t)$. *Sugerencia:* primero encuentre $x(t)$ y utilícela para plantear la ecuación diferencial para el tanque 2.

23. Al principio, un depósito con capacidad de 100 galones está lleno con alcohol puro. La tasa de flujo por el tubo de salida es de 5 galones por minuto; la tasa de flujo del tubo que llena puede ajustarse a c galones por minuto. Una cantidad ilimitada de solución de alcohol al 25% puede introducirse a través del tubo que llena. Nuestra meta es reducir la cantidad de alcohol en el tanque, de modo que contenga 100 galones de solución al 50%. Sea T el número de minutos requeridos para realizar el cambio deseado.

(a) Evalúe T, si $c = 5$ y ambos tubos están abiertos.

(b) Evalúe T, si $c = 5$ y primero dejamos salir una cantidad suficiente de alcohol puro y luego cerramos el tubo de salida y abrimos el tubo que llena.

(c) ¿Para qué valores de c (si existen) la estrategia (b) daría un tiempo más rápido que (a)?

(d) Suponga que $c = 4$. Determine la ecuación para T, si al principio abrimos ambos tubos y luego cerramos el que drena.

EXPL **24.** La ecuación diferencial para un cuerpo que cae cerca de la superficie de la Tierra con resistencia al aire proporcional a la velocidad v es $dv/dt = -g - av$, donde $g = 32$ pies por segundo por segundo es la aceleración debida a la gravedad y $a > 0$ es el *coeficiente de resistencia*. Demuestre cada uno de lo siguiente:

(a) $v(t) = (v_0 - v_\infty)e^{-at} + v_\infty$, donde $v_0 = v(0)$, y

$$v_\infty = -g/a = \lim_{t\to\infty} v(t)$$

la llamada velocidad terminal.

(b) Si $y(t)$ denota la altura, entonces

$$y(t) = y_0 + tv_\infty + (1/a)(v_0 - v_\infty)(1 - e^{-at})$$

25. Una pelota se lanza directamente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial $v_0 = 120$ pies por segundo. Suponiendo un coeficiente de resistencia de $a = 0.05$, determine cada uno de lo siguiente:

(a) la altura máxima

(b) una ecuación para T, el tiempo cuando la pelota llega al suelo

26. María saltó en paracaídas desde su aeroplano a una altura de 8000 pies, durante 15 segundos descendió en caída libre y después abrió su paracaídas. Suponga que los coeficientes de resistencia son $a = 0.10$ para caída libre y $a = 1.6$ con el paracaídas. ¿Cuánto tardó en llegar al suelo?

27. Para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2$, $x > 0$, el factor integrante es $e^{\int(-1/x)\,dx}$. La antiderivada general $\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx$ es igual a $-\ln x + C$.

(a) Multiplique ambos lados de la ecuación diferencial por $\exp\left(\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx\right) = \exp(-\ln x + C)$, y demuestre que $\exp(-\ln x + C)$ es un factor integrante para todo valor de C.

(b) Resuelva la ecuación resultante para y, y demuestre que la solución coincide con la solución obtenida cuando suponemos que $C = 0$ en el factor integrante.

28. Multiplique ambos lados de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}$ $P(x)y = Q(x)$ por el factor $e^{\int P(x)\,dx + C}$.

(a) Demuestre que $e^{\int P(x)\,dx + C}$ es un factor integrante para todo valor de C.

(b) Resuelva la ecuación resultante para y, y demuestre que coincide con la solución general dada antes del ejemplo 1.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\exp\left(\int P(x)\,dx\right)$ **2.** $y\exp\left(\int P(x)\,dx\right)$ **3.** $1/x$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = 1$; $x^2 + Cx$ **4.** particular

6.7 Aproximaciones para ecuaciones diferenciales

> **Una función de dos variables**
>
> La función f depende de dos variables. Como $y'(x) = f(x, y)$, la pendiente de una solución depende de *ambas* coordenadas x y y. Las funciones de dos o más variables se introdujeron en la sección 0.5.

En la sección anterior estudiamos varias ecuaciones diferenciables que surgen de aplicaciones físicas. Para cada ecuación, pudimos encontrar una **solución analítica**; es decir, encontramos una función explícita que satisface la ecuación. Muchas ecuaciones diferenciales no tienen tales soluciones analíticas, de modo que para estas ecuaciones debemos buscar aproximaciones. En esta sección estudiaremos dos formas de aproximar una solución de una ecuación diferencial: un método es gráfico y el otro numérico.

Campos de pendientes Considere una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$y' = f(x, y)$$

Esta ecuación dice que, en el punto (x, y), la pendiente de una solución está dada por $f(x, y)$. Por ejemplo, la ecuación diferencial $y' = y$ dice que la pendiente de la curva que pasa por el punto (x, y) es igual a y.

Para la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{5}xy$, la pendiente de la solución en el punto (5, 3) es $y' = \frac{1}{5}\cdot 5\cdot 3 = 3$; en el punto (1, 4) la pendiente es $y' = \frac{1}{5}\cdot 1\cdot 4 = \frac{4}{5}$. Podemos indicar gráficamente este último resultado al trazar un pequeño segmento de recta por el punto (1, 4) que tenga pendiente $\frac{4}{5}$ (véase la figura 1).

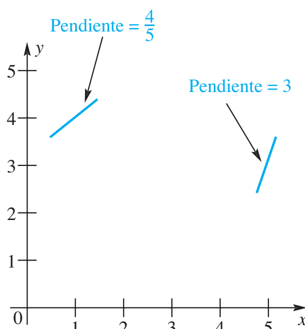


Figura 1

Si repetimos este proceso para varias parejas ordenadas (x, y), obtenemos un **campo de pendientes**. Como la graficación de un campo de pendientes es una tarea tediosa si se realiza a mano, esta tarea es más adecuada para las computadoras; *Mathematica* y *Maple* pueden graficar campos de pendientes. La figura 2 muestra un campo de pendientes para la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{5}xy$. Dada una condición inicial, podemos seguir las pendientes para obtener una aproximación gruesa a la solución particular. Con frecuencia, el campo de pendientes nos permite ver el comportamiento de todas las soluciones de la ecuación diferencial.

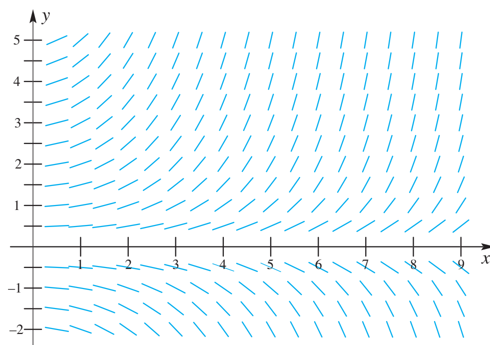


Figura 2

EJEMPLO 1 Suponga que el tamaño y de una población satisface la ecuación diferencial $y' = 0.2y(16 - y)$. El campo de pendientes para esta ecuación diferencial aparece en la figura 3.

(a) Bosqueje la solución que satisface la condición inicial $y(0) = 3$.

Describa el comportamiento de las soluciones cuando

(b) $y(0) > 16$, y (c) $0 < y(0) < 16$.

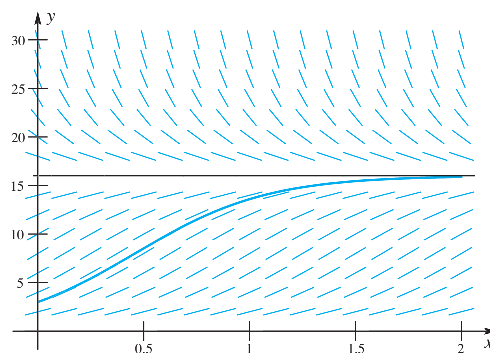


Figura 3

SOLUCIÓN

(a) La solución que satisface la condición inicial $y(0) = 3$ contiene al punto $(0, 3)$. A partir de ese punto y hacia la derecha, la solución sigue las líneas de pendientes. La curva de la figura 3 muestra una gráfica de la solución.

(b) Si $y(0) > 16$, entonces la solución decrece hacia la asíntota horizontal $y = 16$.

(c) Si $0 < y(0) < 16$, entonces la solución crece hacia la asíntota horizontal $y = 16$.

Las partes (b) y (c) indican que el tamaño de la población convergerá hacia el valor 16 para cualquier tamaño de población inicial. ■

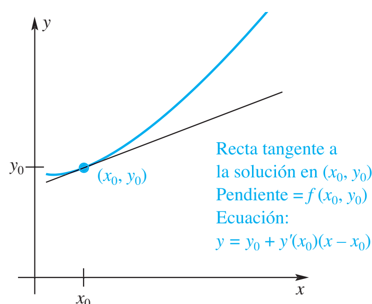


Figura 4

Método de Euler De nuevo, consideremos ecuaciones diferenciales de la forma $y' = f(x, y)$ con condición inicial $y(x_0) = y_0$. Recuerde que y es una función de x, sin importar que escribamos esto en forma explícita o no. La condición inicial $y(x_0) = y_0$ nos dice que la pareja ordenada (x_0, y_0) es un punto de la gráfica de la solución. También sabemos un poco más acerca de la solución desconocida: la pendiente de la recta tangente a la solución, en x_0, es $f(x_0, y_0)$. Esta información se resume en la figura 4.

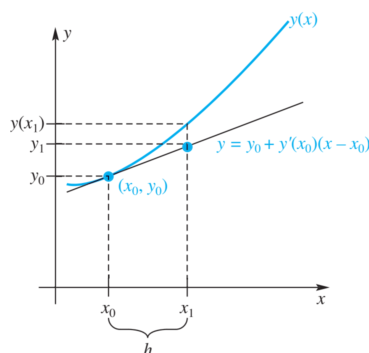


Figura 5

Si h es positiva, pero pequeña, es de esperar que la recta tangente, cuya ecuación es

$$P_1(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

esté "cerca" de la solución y(x) en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$. Sea $x_1 = x_0 + h$. Entonces, en x_1 tenemos

$$P_1(x_1) = y_0 + hy'(x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Al hacer $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$, tenemos una aproximación para la solución en x_1. La figura 5 ilustra el método que acabamos de describir.

Como $y' = f(x, y)$, sabemos que la pendiente de la solución cuando $x = x_1$ es $f(x_1, y(x_1))$. En este punto no conocemos $y(x_1)$, pero tenemos su aproximación, y_1. Así, repetimos el proceso para obtener la estimación $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$ para la solución en el punto $x_2 = x_1 + h$. Este proceso, cuando continúa de esta forma, se llama **Método de Euler**, en honor del matemático suizo Leonhard Euler (1707–1783). (Euler se pronuncia "oiler"). El parámetro h se conoce con frecuencia como el **tamaño de paso**.

Algoritmo Método de Euler

Para aproximar la solución de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ con condición inicial $y(x_0) = y_0$, elija un tamaño de paso h y repita los siguientes pasos para $n = 1, 2,...$

1. Haga $x_n = x_{n-1} + h$.
2. Haga $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$.

Recuerde que la solución de una ecuación diferencial es una *función*. El Método de Euler no proporciona una función, sino que da un conjunto de parejas ordenadas que aproximan la solución y. Con frecuencia, este conjunto de parejas ordenadas basta para describir la solución de la ecuación diferencial.

Observe la diferencia entre $y(x_n)$ y y_n; $y(x_n)$ (por lo general desconocido) es el valor de la solución exacta en x_n y y_n es nuestra aproximación a la solución exacta en x_n. En otras palabras, y_n es nuestra aproximación de $y(x_n)$.

EJEMPLO 2 Utilice el Método de Euler con $h = 0.2$ para aproximar la solución de

$$y' = y, \qquad y(0) = 1$$

en el intervalo [0, 1].

SOLUCIÓN Para este problema, $f(x, y) = y$. Comenzamos con $x_0 = 0$ y $y_0 = 1$, tenemos

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.2 \cdot 1 = 1.2$$

$$y_2 = 1.2 + 0.2 \cdot 1.2 = 1.44$$

$$y_3 = 1.44 + 0.2 \cdot 1.44 = 1.728$$

$$y_4 = 1.728 + 0.2 \cdot 1.728 = 2.0736$$

$$y_5 = 2.0736 + 0.2 \cdot 2.0736 = 2.48832$$

■

n	x_n	y_n	e^{x_n}
0	0.0	1.0	1.00000
1	0.2	1.2	1.22140
2	0.4	1.44	1.49182
3	0.6	1.728	1.82212
4	0.8	2.0736	2.22554
5	1.0	2.48832	2.71828

La ecuación diferencial $y' = y$ dice que y es su propia derivada. Así, sabemos que una solución es $y(x) = e^x$, y de hecho $y(x) = e^x$ es la *solución*, pues sabemos que $y(0)$ debe ser 1. En este caso, podemos comparar los cinco valores de y estimados mediante el Método de Euler con los valores exactos de y, como se muestran en la tabla al margen. La figura 6a muestra las cinco aproximaciones (x_1, y_1), i = 1, 2, 3, 4, 5, para la solución y; la figura 6a también muestra la solución exacta $y(x) = e^x$. Al elegir un valor menor de h,

por lo general obtenemos una aproximación más precisa. Por supuesto, si elegimos una h menor, necesitaremos más pasos para llegar hasta $x = 1$.

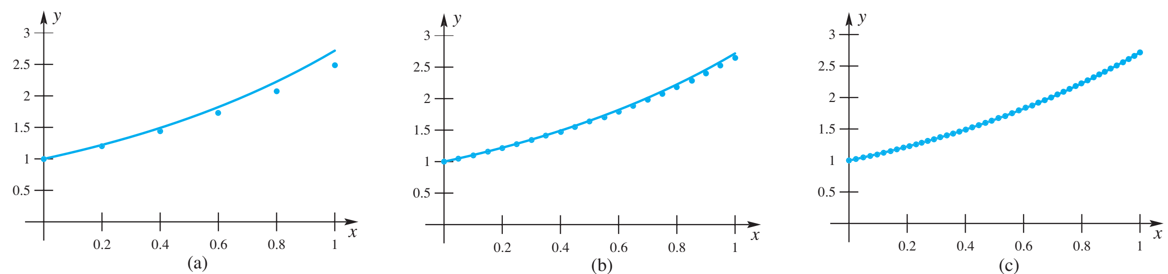


Figura 6

EJEMPLO 3 Use el Método de Euler con $h = 0.05$ y $h = 0.01$ para aproximar la solución de

$$y' = y, \qquad y(0) = 1$$

en el intervalo [0, 1].

SOLUCIÓN Procedemos como en el ejemplo 1, pero reducimos el tamaño de paso h a 0.05 y obtenemos la siguiente tabla

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
0	0.00	1.000000	11	0.55	1.710339
1	0.05	1.050000	12	0.60	1.795856
2	0.10	1.102500	13	0.65	1.885649
3	0.15	1.157625	14	0.70	1.979932
4	0.20	1.215506	15	0.75	2.078928
5	0.25	1.276282	16	0.80	2.182875
6	0.30	1.340096	17	0.85	2.292018
7	0.35	1.407100	18	0.90	2.406619
8	0.40	1.477455	19	0.95	2.526950
9	0.45	1.551328	20	1.00	2.653298
10	0.50	1.628895			

La figura 6b muestra la aproximación de la solución al usar el Método de Euler con $h = 0.05$.

Los cálculos son similares para el caso $h = 0.01$. Los resultados se resumen en la tabla al margen y en la figura 6c. ■

n	x_n	y_n
0	0.00	1.000000
1	0.01	1.010000
2	0.02	1.020100
3	0.03	1.030301
⋮	⋮	⋮
99	0.99	2.678033
100	1.00	2.704814

En el ejemplo 1, observe que al disminuir el tamaño de paso h, la aproximación a $y(1)$ (que en este caso es $e^1 \approx 2.718282$) mejora. Cuando $h = 0.2$, el error es aproximadamente $e - y_5 = 2.718282 - 2.488320 = 0.229962$. Las aproximaciones del error para otros tamaños de paso aparecen en la siguiente tabla:

h	Aproximación de Euler para $y(1)$	Error = Valor exacto – Valor Estimado
0.2	2.488320	0.229962
0.1	2.593742	0.124540
0.05	2.653298	0.064984
0.01	2.704814	0.013468
0.005	2.711517	0.006765

Observe en la tabla que al dividir *a la mitad* el tamaño de paso h, el error también *se divide a la mitad* (aproximadamente). Por lo tanto, el error en un punto dado es aproximadamente proporcional al tamaño de paso h. En la sección 4.6 encontramos un resultado similar con la integración numérica. Ahí vimos que el error para la suma de Riemann del punto izquierdo o del punto derecho es proporcional a $h = 1/n$ y que el error para la regla del trapecio es proporcional a $h^2 = 1/n^2$, donde n es el número de subintervalos. La regla parabólica es aún mejor, con un error proporcional a $h^4 = 1/n^4$. Esto hace surgir la pregunta de si hay un mejor método para aproximar la solución de $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. De hecho, varios métodos son mejores que el de Euler, en el sentido de que el error es proporcional a una potencia mayor de h. Estos métodos son conceptualmente similares al de Euler: son "métodos de un paso"de **Runge-Kutta de cuarto orden**, tiene un error que es proporcional a $h^4 = 1/n^4$.

Revisión de conceptos

1. Para la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ una gráfica de segmentos de recta cuyas pendientes son iguales a $f(x, y)$ se llama _______.

2. La base para el Método de Euler es que la ______ a la solución en x_0 será una buena aproximación a la solución en el intervalo $[x_{0,} x_0 + h]$.

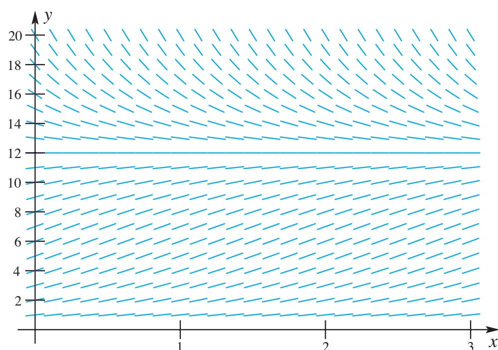
3. La fórmula recursiva para la aproximación de la solución de una ecuación diferencial mediante el Método de Euler es $y_n =$ ________.

4. Si la solución de una ecuación diferencial es cóncava hacia arriba, entonces el Método de Euler _______ (subestimará o sobreestimará) la solución.

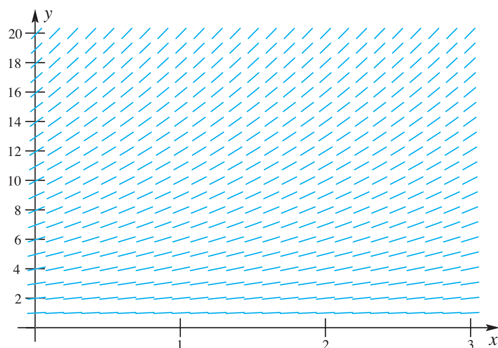
Conjunto de problemas 6.7

En los problemas del 1 al 4 se da un campo de pendientes para una ecuación diferencial de la forma y = f (x, y). Use el campo de pendientes para bosquejar la solución que satisfaga la condición inicial dada. En cada caso, determine $\lim_{x\to\infty} y(x)$ *y aproxime y(2).*

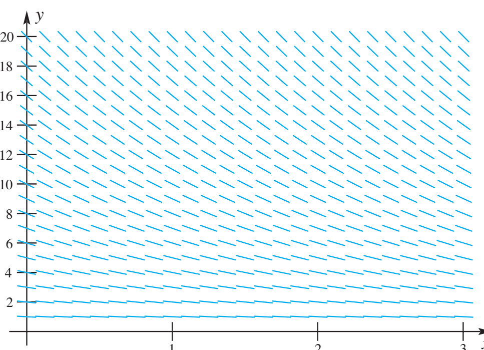
1. $y(0) = 5$



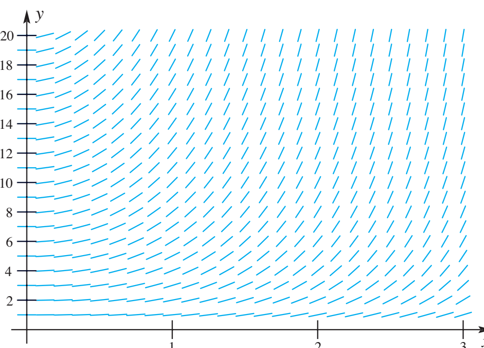
2. $y(0) = 6$



3. $y(0) = 16$



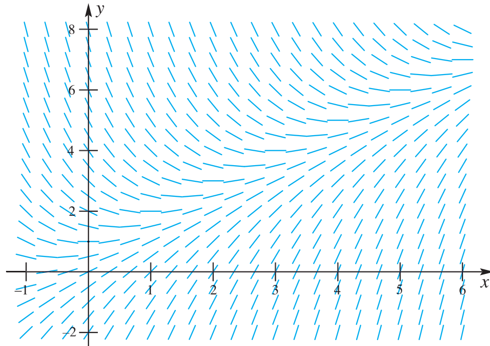
4. $y(1) = 3$



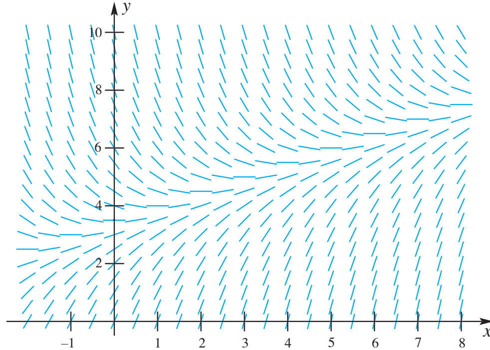
En los problemas 5 y 6 se da un campo de pendientes para una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$. *En ambos casos, cada solución*

tiene la misma asíntota oblicua (véase la sección 3.5). Bosqueje la solución que satisface la condición inicial dada y determine la ecuación de la asíntota oblicua.

5. $y(0) = 6$



6. $y(0) = 8$



CAS *En los problemas 7 al 10 grafique un campo de pendientes para cada ecuación diferencial. Utilice el método de separación de variables (sección 3.9) o un factor integrante (sección 6.6) para determinar una solución particular de la ecuación diferencial que satisfaga la condición inicial dada, y grafique la solución particular.*

7. $y' = \frac{1}{2}y;\ y(0) = \frac{1}{2}$

8. $y' = -y;\ y(0) = 4$

9. $y' = x - y + 2;\ y(0) = 4$

10. $y' = 2x - y + \frac{3}{2};\ y(0) = 3$

C *En los problemas 11 al 16 use el Método de Euler con $h = 0.2$ para aproximar la solución en el intervalo indicado.*

11. $y' = 2y,\ y(0) = 3,\ [0, 1]$

12. $y' = -y,\ y(0) = 2,\ [0, 1]$

13. $y' = x,\ y(0) = 0,\ [0, 1]$

14. $y' = x^2,\ y(0) = 0,\ [0, 1]$

15. $y' = xy,\ y(1) = 1,\ [1, 2]$

16. $y' = -2xy,\ y(1) = 2,\ [1, 2]$

17. Aplique el Método de Euler a la ecuación $y' = y,\ y(0) = 1$ con un tamaño de paso arbitrario $h = 1/N$, donde N es un entero positivo.

(a) Deduzca la relación $y_n = y_0(1 + h)^n$.

(b) Explique por qué y_N es una aproximación de e.

18. Suponga que la función $f(x, y)$ depende sólo de x. La ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ se puede escribir entonces como

$$y' = f(x), \qquad y(x_0) = 0$$

Explique la forma de aplicar el método de Euler a esta ecuación diferencial, si $y_0 = 0$.

19. Considere la ecuación diferencial $y' = f(x),\ y(x_0) = 0$ del problema 18. Para este problema, sean $f(x) = \operatorname{sen} x^2, x_0 = 0$ y $h = 0.1$.

(a) Integre ambos lados de la ecuación desde x_0 hasta $x_1 = x_0 + h$. Para aproximar la integral use una suma de Riemann con un solo intervalo, evaluando el integrando en el punto extremo izquierdo.

(b) Integre ambos lados de x_0 a $x_2 = x_0 + 2h$. De nuevo, para aproximar la integral use una suma de Riemann con base en los extremos izquierdos, pero con dos intervalos.

(c) Continúe el proceso descrito en las partes (a) y (b) hasta que $x_n = 1$. Use una suma de Riemann con base en los extremos izquierdos de diez intervalos para aproximar la integral.

(d) Describa la forma en que se relaciona este método con el Método de Euler.

20. Repita los pasos desde (a) hasta (c) del problema 19 para la ecuación diferencial $y' = \sqrt{x + 1},\ y(0) = 0$.

21. (Método de Euler mejorado) Considere el cambio Δy en la solución entre x_0 y x_1. Con base en el Método de Euler se obtiene una aproximación: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_1) - y_0}{h} \approx \frac{\hat{y}_1 - y_0}{h} = f(x_0, y_0)$. (Aquí hemos utilizado $\hat{y}_1$ para indicar la aproximación de Euler a la solución en x_1). Se obtiene otra aproximación determinando una aproximación a la pendiente de la solución en x_1:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_1) - y_0}{h} \approx f(x_1, y_1) \approx f(x_1, \hat{y}_1)$$

(a) Promedie estas dos soluciones para obtener una sola aproximación para $\Delta y/\Delta x$.

(b) Resuelva para $y = y(x_1)$ para obtener

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, \hat{y}_1)]$$

(c) Éste es el primer paso en el Método de Euler mejorado. Los pasos siguientes tienen el mismo patrón. Llene las líneas en blanco para el siguiente algoritmo de tres pasos que da lugar al Método de Euler mejorado:

1. Haga $x_n =$ ________________
2. Haga $\hat{y}_n =$ ____________________
3. Haga $y_n =$ ________________________

C *Para los problemas del 22 al 27 utilice el Método de Euler mejorado con $h = 0.2$ en las mismas ecuaciones de los problemas del 11 al 16. Compare sus respuestas con las obtenidas mediante el Método de Euler.*

CAS **28.** Aplique el Método de Euler mejorado a la ecuación $y' = y$, $y(0) = 1$, con $h = 0.2, 0.1, 0.05, 0.01$ y 0.005, para aproximar la solución en el intervalo $[0, 1]$. (Observe que la solución exacta es $y = e^x$, por lo que $y(1) = e$). Calcule el error en la aproximación de $y(1)$ (véanse el ejemplo 3 y el análisis subsiguiente) y llene la tabla siguiente. Para el Método de Euler mejorado, ¿el error es proporcional a h, h^2 o alguna otra potencia de h?

h	Error del Método de Euler	Error del Método de Euler mejorado
0.2	0.229962	0.015574
0.1	0.124540	
0.05	0.064984	0.001091
0.01	0.013468	0.000045
0.005	0.006765	

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** campo de pendientes **2.** recta tangente **3.** $y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$ **4.** subestima

6.8 Funciones trigonométricas inversas y sus derivadas

Las seis funciones trigonométricas fundamentales (seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante) se definieron en la sección 0.7, y en ocasiones las hemos utilizado en ejemplos y problemas. Con respecto a la noción de inversa, son funciones con problemas, ya que para cada y en su rango existe un número infinito de x que le corresponden (véase la figura 1). No obstante, vamos a introducir una noción de inversa para ellas. Que esto sea posible tiene como base un procedimiento denominado **restricción del dominio**, que se analizó brevemente en la sección 6.2.

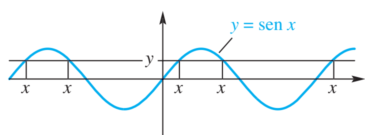


Figura 1

Seno inverso y coseno inverso En el caso de seno y coseno restringimos el dominio, manteniendo el rango tan grande como sea posible, mientras insistimos en que la función resultante tenga una inversa. Esto puede hacerse de muchas formas, pero el procedimiento acordado se sugiere por medio de las figuras 2 y 3. También mostramos la gráfica de la función inversa correspondiente, obtenida, como es usual, reflejando con respecto a la recta $y = x$.

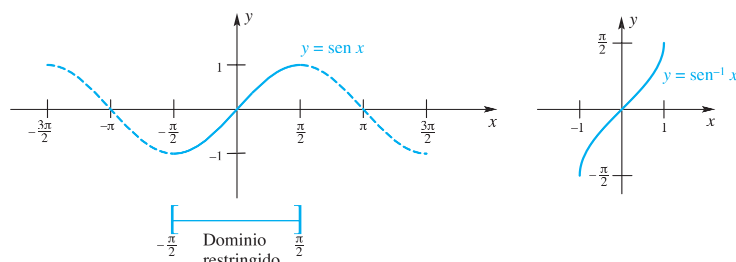


Figura 2

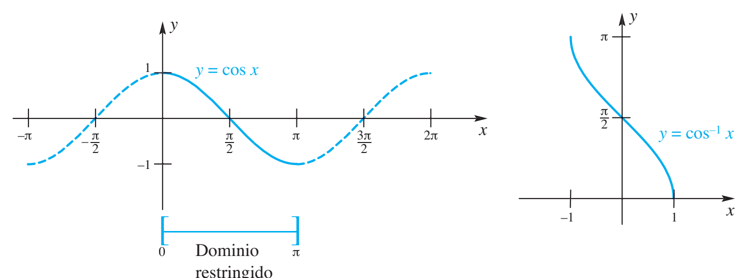


Figura 3

En una definición, formalizamos lo que hemos mostrado.

> **Definición**
>
> Para obtener inversas para seno y coseno restringimos sus dominios a $[-\pi/2, \pi/2]$ y $[0, \pi]$, respectivamente. Así,
>
> $$x = \operatorname{sen}^{-1} y \quad \Leftrightarrow \quad y = \operatorname{sen} x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$
>
> $$x = \cos^{-1} y \quad \Leftrightarrow \quad y = \cos x, 0 \le x \le \pi$$

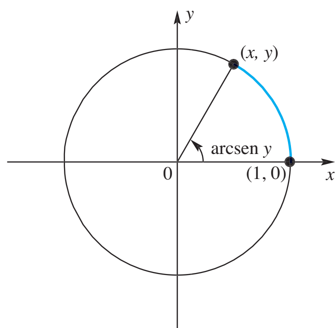


Figura 4

A veces se utiliza el símbolo arcsen para $\operatorname{sen}^{-1} y$, de manera análoga, arccos se utiliza para $\cos^{-1}$. Considere arcsen como "el arco cuyo seno es" o "el ángulo cuyo seno es" (véase la figura 4). En lo que resta del libro utilizaremos ambas formas.

EJEMPLO 1 Calcule

(a) $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{2}/2)$, (b) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$,

(c) $\cos(\cos^{-1} 0.6)$, and (d) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} 3\pi/2)$

SOLUCIÓN

(a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ (b) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

(c) $\cos(\cos^{-1} 0.6) = 0.6$ (d) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$

La única complicada de éstas es (d). Observe que sería incorrecto dar $3\pi/2$ como respuesta, ya que $\operatorname{sen}^{-1} y$ siempre está en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Resuelva el problema por pasos, como sigue.

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}^{-1}(-1) = -\pi/2$$ ■

EJEMPLO 2 Use una calculadora para encontrar

(a) $\cos^{-1}(-0.61)$, (b) $\operatorname{sen}^{-1}(1.21)$, (c) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} 4.13)$

SOLUCIÓN Utilice una calculadora en modo de radianes. Ésta ha sido programada para dar respuestas consistentes con las definiciones que hemos dado.

(a) $\cos^{-1}(-0.61) = 2.2268569$

(b) Su calculadora debe indicar un error, ya que $\operatorname{sen}^{-1}(1.21)$ no existe.

(c) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} 4.13) = -0.9884073$ ■

Otra manera de decirlo

$\operatorname{sen}^{-1} y$

es el número en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es y.

$\cos^{-1} y$

es el número en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es y.

$\tan^{-1} y$

es el número en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ cuya tangente es y.

Tangente inversa y secante inversa En la figura 5 mostramos la gráfica de la función tangente, su dominio restringido y la gráfica de $y = \tan^{-1} x$.

Existe un método estándar para restringir el dominio de la función cotangente, es decir, a $(0, \pi)$, de modo que tenga una inversa. Sin embargo, esta función no desempeña un papel importante en cálculo.

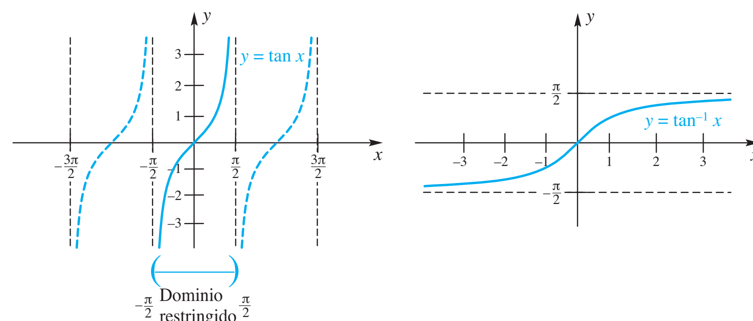


Figura 5

Para obtener una inversa de la secante, graficamos $y = \sec x$, restringimos su dominio de manera adecuada y después graficamos $y = \sec^{-1} x$ (véase la figura 6).

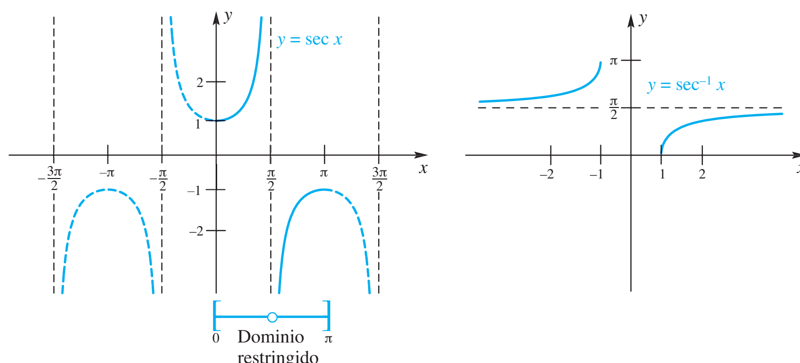


Figura 6

Definición

Para obtener inversas de la tangente y la secante, restringimos sus dominios a $(-\pi/2, \pi/2)$ y $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$, respectivamente. Así,

$$x = \tan^{-1} y \quad \Leftrightarrow \quad y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$x = \sec^{-1} y \quad \Leftrightarrow \quad y = \sec x, 0 \leq x \leq \pi, x \neq \frac{\pi}{2}$$

Algunos autores restringen el dominio de la secante de una manera diferente. Así, si usted consulta otro texto, debe verificar la definición del autor. No tendremos necesidad de definir $\csc^{-1}$, aunque también puede hacerse.

EJEMPLO 3 Calcule

(a) $\tan^{-1}(1)$, (b) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$,
(c) $\tan^{-1}(\tan 5.236)$, (d) $\sec^{-1}(-1)$,
(e) $\sec^{-1}(2)$, and (f) $\sec^{-1}(-1.32)$

SOLUCIÓN

(a) $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ (b) $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

(c) $\tan^{-1}(\tan 5.236) = -1.0471853$

La mayoría de nosotros tiene problemas para recordar la secante; además, muchas calculadoras no tienen un botón para ella. Por lo tanto, le sugerimos que recuerde que $\sec x = 1/\cos x$. Con base en esto, se sigue que

$$\sec^{-1} y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{y}\right)$$

y esto nos permite utilizar hechos conocidos acerca del coseno.

(d) $\sec^{-1}(-1) = \cos^{-1}(-1) = \pi$

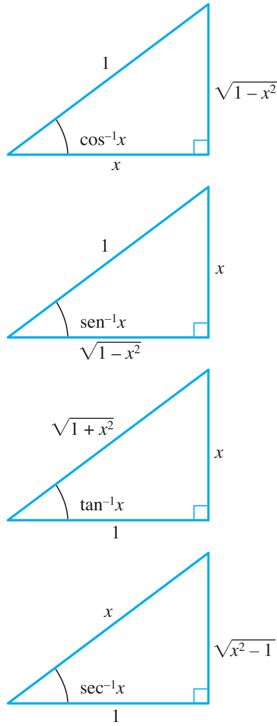


Figura 7

(e) $\sec^{-1}(2) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

(f) $\sec^{-1}(-1.32) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{1.32}\right) = \cos^{-1}(0.7575758)$
$= 2.4303875$ ■

Cuatro identidades útiles El teorema A da algunas identidades útiles. Usted puede recordarlas en relación con los triángulos en la figura 7.

Teorema A

(i) $\operatorname{sen}(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$
(ii) $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$
(iii) $\sec(\tan^{-1} x) = \sqrt{1 + x^2}$
(iv) $\tan(\sec^{-1} x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1}, & \text{si } x \geq 1 \\ -\sqrt{x^2 - 1}, & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$

Demostración Para demostrar (i), recuérdese que $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$. Si $0 \leq \theta \leq \pi$, entonces

$$\operatorname{sen} \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

Ahora aplicamos esto con $\theta = \cos^{-1}x$ y utilizamos el hecho de que $\cos(\cos^{-1} x) = x$ para obtener

$$\operatorname{sen}(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - \cos^2(\cos^{-1} x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

La identidad (ii) se demuestra de una manera completamente similar. Para demostrar (iii) y (iv) utilice la identidad $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$, en lugar de $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$. ■

EJEMPLO 4 Calcule $\operatorname{sen}\left[2 \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]$.

SOLUCIÓN Recuerde la identidad del ángulo doble, $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$. Así,

$$\operatorname{sen}\left[2 \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right] = 2 \operatorname{sen}\left[\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right] \cos\left[\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$
$$= 2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$ ■

Derivadas de funciones trigonométricas Aprendimos en la sección 2.4 las fórmulas de las derivadas para las seis funciones trigonométricas. Deben memorizarse.

$D_x \operatorname{sen} x = \cos x$	$D_x \cos x = -\operatorname{sen} x$
$D_x \tan x = \sec^2 x$	$D_x \cot x = -\csc^2 x$
$D_x \sec x = \sec x \tan x$	$D_x \csc x = -\csc x \cot x$

Podemos combinar las reglas anteriores con la regla de la cadena. Por ejemplo, si $u = f(x)$ es derivable, entonces

$$D_x \operatorname{sen} u = \cos u \cdot D_x u$$

Funciones trigonométricas inversas A partir del teorema de la función inversa (teorema 6.2B), concluimos que sen^{-1}, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ y $\sec^{-1}$ son derivables. Nuestro objetivo es encontrar fórmulas paras sus derivadas. Establecemos los resultados y luego mostramos cómo pueden deducirse.

Teorema B **Derivadas de cuatro funciones trigonométricas inversas**

(i) $D_x \,\text{sen}^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad -1 < x < 1$

(ii) $D_x \cos^{-1} x = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad -1 < x < 1$

(iii) $D_x \tan^{-1} x = \dfrac{1}{1 + x^2}$

(iv) $D_x \sec^{-1} x = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad |x| > 1$

Demostración Nuestras demostraciones siguen el mismo patrón en cada caso. Para demostrar (i), sea $y = \text{sen}^{-1} x$, de modo que

$$x = \text{sen } y$$

Ahora derivamos ambos lados con respecto a x, utilizando la regla de la cadena en el lado derecho. Entonces

$$\begin{aligned} 1 &= \cos y \, D_x y = \cos(\text{sen}^{-1} x)\, D_x(\text{sen}^{-1} x) \\ &= \sqrt{1 - x^2}\, D_x(\text{sen}^{-1} x) \end{aligned}$$

En el último paso usamos el teorema A(ii). Concluimos que $D_x(\text{sen}^{-1} x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$.

Los resultados (ii), (iii) y (iv) se demuestran de manera análoga, pero (iv) tiene una pequeña peculiaridad. Sea $y = \sec^{-1} x$, de modo que

$$x = \sec y$$

Derivando ambos lados con respecto a x y utilizando el teorema A(iv), obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \sec y \tan y \, D_x y \\ &= \sec(\sec^{-1} x) \tan(\sec^{-1} x)\, D_x(\sec^{-1} x) \\ &= \begin{cases} x\sqrt{x^2 - 1}\, D_x(\sec^{-1} x), & \text{si } x \geq 1 \\ x\left(-\sqrt{x^2 - 1}\right) D_x(\sec^{-1} x), & \text{si } x \leq -1 \end{cases} \\ &= |x|\sqrt{x^2 - 1}\, D_x(\sec^{-1} x) \end{aligned}$$

El resultado deseado se sigue de manera inmediata. ■

$D_x \sec^{-1} x$

He aquí otra forma de deducir la fórmula para la derivada de $\sec^{-1} x$.

$$\begin{aligned} D_x \sec^{-1} x &= D_x \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - 1/x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{|x|}{x^2} \\ &= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Encuentre $D_x \,\text{sen}^{-1}(3x - 1)$.

SOLUCIÓN Utilizamos el teorema B(i) y la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} D_x \,\text{sen}^{-1}(3x - 1) &= \frac{1}{\sqrt{1 - (3x - 1)^2}} D_x(3x - 1) \\ &= \frac{3}{\sqrt{-9x^2 + 6x}} \end{aligned}$$ ■

Por supuesto, cada fórmula de derivación lleva a una fórmula de integración, un tema acerca del cual diremos mucho más en el capítulo siguiente. En particular,

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \text{sen}^{-1} x + C$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1}|x| + C$

Estas fórmulas de integración se pueden generalizar un poco (véanse los problemas del 81 al 84) a lo siguiente:

1′. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

2′. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

3′. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{|x|}{a}\right) + C$

EJEMPLO 6 Evalúe $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^1 = \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2} - \operatorname{sen}^{-1} 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$ ■

EJEMPLO 7 Evalúe $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Considere $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$. Haga $u = 3x$, por lo que $du = 3\,dx$. Entonces

$$\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{5-u^2}}\,du = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C$$
$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right) + C$$ ■

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\int \frac{e^x}{4+9e^{2x}}\,dx$.

SOLUCIÓN Considere $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du$. Haga $u = 3\,e^x$, por lo que $du = 3e^x\,dx$. Entonces

$$\int \frac{e^x}{4+9e^{2x}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{4+9e^{2x}}(3e^x\,dx) = \frac{1}{3}\int \frac{1}{4+u^2}\,du$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C = \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3e^x}{2}\right) + C$$ ■

EJEMPLO 9 Evalúe $\displaystyle\int_6^{18} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx$

SOLUCIÓN

$$\int_6^{18} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx = \frac{1}{3}\left[\sec^{-1}\frac{|x|}{3}\right]_6^{18}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\sec^{-1}\frac{|18|}{3} - \sec^{-1}\frac{|6|}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\sec^{-1} 6 - \frac{\pi}{3}\right) \approx 0.1187$$ ■

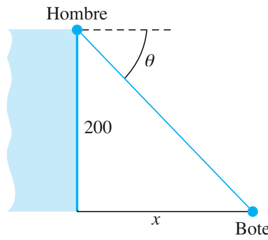


Figura 8

EJEMPLO 10 Un hombre que está parado en la cima de un acantilado está 200 pies por arriba de un lago. Observa un bote que se aleja directamente del pie del acantilado a una velocidad de 25 pies por segundo. ¿Qué tan rápido cambia el ángulo de depresión de su visual cuando el bote está a 150 pies del pie del acantilado?

SOLUCIÓN Los detalles esenciales se muestran en la figura 8. Observe que θ, el ángulo de depresión, es

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{200}{x}\right)$$

Así,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + (200/x)^2} \cdot \frac{-200}{x^2} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{-200}{x^2 + 40{,}000} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Cuando sustituimos $x = 150$ y $dx/dt = 25$, obtenemos $d\theta/dt = -0.08$ radianes por segundo. ■

Manipulación del integrando Antes de que haga una sustitución, puede encontrar útil reescribir el integrando de una forma más conveniente. Con frecuencia, las integrales con expresiones cuadráticas en el denominador se pueden reducir a formas estándar *completando el cuadrado*. Recuerde que $x^2 + bx$ se transforma en un cuadrado perfecto, al sumarle $(b/2)^2$.

EJEMPLO 11 Evalúe $\displaystyle\int \frac{7}{x^2 - 6x + 25}\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int \frac{7}{x^2 - 6x + 25}\,dx &= \int \frac{7}{x^2 - 6x + 9 + 16}\,dx \\ &= 7\int \frac{1}{(x-3)^2 + 4^2}\,dx \\ &= \frac{7}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x-3}{4}\right) + C\end{aligned}$$

En el último paso hicimos la sustitución $u = x - 3$, en forma mental. ■

Revisión de conceptos

1. Para obtener una inversa de la función seno restringimos su dominio a _______. La función inversa resultante se denota por sen^{-1} o por _______.

2. Para obtener una inversa de la función tangente restringimos su dominio a _______. La función inversa resultante se denota por $\tan^{-1}$ o por ______.

3. $D_x \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) =$ _____.

4. Como $D_x \arctan x = 1/(1 + x^2)$, se sigue que $4\int_0^1 1/(1 + x^2)\,dx = =$ ______.

Conjunto de problemas 6.8

En los problemas del 1 al 10, sin utilizar una calculadora, encuentre el valor exacto.

1. $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2. $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4. $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

5. $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$

6. $\operatorname{arcsec}(2)$

7. $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$

8. $\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

9. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} 0.4567)$

10. $\cos(\operatorname{sen}^{-1} 0.56)$

En los problemas del 11 al 18 aproxime cada valor.

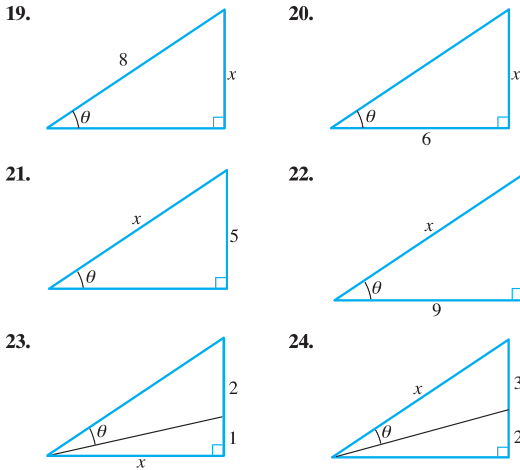
11. $\operatorname{sen}^{-1}(0.1113)$ **12.** $\arccos(0.6341)$

13. $\cos(\operatorname{arccot} 3.212)$ **14.** $\sec(\arccos 0.5111)$

15. $\sec^{-1}(-2.222)$ **16.** $\tan^{-1}(-60.11)$

17. $\cos(\operatorname{sen}(\tan^{-1} 2.001))$ **18.** $\operatorname{sen}^2(\ln(\cos 0.5555))$

En los problemas del 19 al 24 exprese θ en términos de x utilizando las funciones trigonométricas inversas sen^{-1}, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ *y* $\sec^{-1}$.



En los problemas del 25 al 28 encuentre cada valor sin utilizar una calculadora (véase el ejemplo 4).

25. $\cos\left[2 \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$ **26.** $\tan\left[2 \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

27. $\operatorname{sen}\left[\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)\right]$

28. $\cos\left[\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)\right]$

En los problemas del 29 al 32 demuestre que cada ecuación es una identidad.

29. $\tan(\operatorname{sen}^{-1} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

30. $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

31. $\cos(2 \operatorname{sen}^{-1} x) = 1 - 2x^2$

32. $\tan(2 \tan^{-1} x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$

33. Encuentre cada límite.

(a) $\lim_{x\to\infty} \tan^{-1} x$ (b) $\lim_{x\to-\infty} \tan^{-1} x$

34. Encuentre cada límite.

(a) $\lim_{x\to\infty} \sec^{-1} x$ (b) $\lim_{x\to-\infty} \sec^{-1} x$

35. Encuentre cada límite.

(a) $\lim_{x\to 1^-} \operatorname{sen}^{-1} x$ (b) $\lim_{x\to -1^+} \operatorname{sen}^{-1} x$

36. ¿Existe $\lim_{x\to 1} \operatorname{sen}^{-1} x$? Explique.

37. Describa lo que sucede a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ en el punto c, si c se aproxima a 1 por la izquierda.

38. Bosqueje de la gráfica de $y = \cot^{-1} x$, suponiendo que se ha obtenido al restringir el dominio de la cotangente a $(0, \pi)$.

En los problemas del 39 al 54 encuentre dy/dx.

39. $y = \ln(2 + \operatorname{sen} x)$ **40.** $y = e^{\tan x}$

41. $y = \ln(\sec x + \tan x)$ **42.** $y = -\ln(\csc x + \cot x)$

43. $y = \operatorname{sen}^{-1}(2x^2)$ **44.** $y = \arccos(e^x)$

45. $y = x^3 \tan^{-1}(e^x)$ **46.** $y = e^x \operatorname{arcsen} x^2$

47. $y = (\tan^{-1} x)^3$ **48.** $y = \tan(\cos^{-1} x)$

49. $y = \sec^{-1}(x^3)$ **50.** $y = (\sec^{-1} x)^3$

51. $y = (1 + \operatorname{sen}^{-1} x)^3$ **52.** $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{1}{x^2 + 4}\right)$

53. $y = \tan^{-1}(\ln x^2)$ **54.** $y = x \operatorname{arcsec}(x^2 + 1)$

En los problemas del 55 al 72 evalúe cada integral.

55. $\int \cos 3x \, dx$ **56.** $\int x \operatorname{sen}(x^2)\, dx$

57. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 2x \, dx$ **58.** $\int \tan x \, dx = \int \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx$

59. $\int_0^1 e^{2x} \cos(e^{2x})\, dx$ **60.** $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx$

61. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$ **62.** $\int_{\sqrt{2}}^{2} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

63. $\int_{-1}^{1} \dfrac{1}{1 + x^2}\, dx$ **64.** $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos^2\theta}\, d\theta$

65. $\int \dfrac{1}{1 + 4x^2}\, dx$ **66.** $\int \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx$

67. $\int \dfrac{1}{\sqrt{12 - 9x^2}}\, dx$ **68.** $\int \dfrac{x}{\sqrt{12 - 9x^2}}\, dx$

69. $\int \dfrac{1}{x^2 - 6x + 13}\, dx$ **70.** $\int \dfrac{1}{2x^2 + 8x + 25}\, dx$

71. $\int \dfrac{1}{x\sqrt{4x^2 - 9}}\, dx$ **72.** $\int \dfrac{x + 1}{\sqrt{4 - 9x^2}}\, dx$

C **73.** Una pintura de 5 pies de altura está colgada en una pared de modo que su parte inferior está a 8 pies del piso, como se muestra en la figura 9. Una observadora, con el nivel de sus ojos a 5.4 pies, está parada a b pies de la pared. Exprese θ, el ángulo vertical subtendido por la pintura a su ojo, en términos de b, y después encuentre θ, si $b = 12.9$ pies.

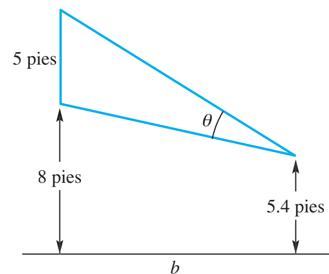


Figura 9

74. Encuentre fórmulas para $f^{-1}(x)$ para cada una de las siguientes funciones f, primero indique cómo restringiría el dominio de modo que f tenga una inversa. Por ejemplo, si $f(x) = 3 \text{ sen } 2x$, y restringimos el dominio a $-\pi/4 \le x \le \pi/4$, entonces $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\text{sen}^{-1}(x/3)$.

(a) $f(x) = 3 \cos 2x$ (b) $f(x) = 2 \text{ sen } 3x$

(c) $f(x) = \frac{1}{2} \tan x$ (d) $f(x) = \text{sen } \dfrac{1}{x}$

75. Por medio del uso repetido de la fórmula para la suma,

$$\tan(x + y) = (\tan x + \tan y)/(1 - \tan x \tan y)$$

demuestre que

$$\frac{\pi}{4} = 3 \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{5}{99}\right)$$

76. Verifique que

$$\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

un resultado descubierto por John Machin en 1706 y utilizado por él para calcular los primeros 100 lugares decimales de π.

77. Sin utilizar cálculo, encuentre una fórmula para el área de la región sombreada en la figura 10 en términos de a y b. Observe que el centro del círculo mayor está en el borde del más pequeño.

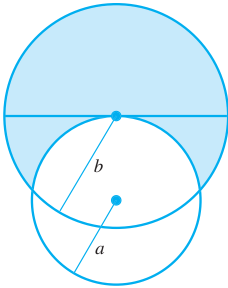


Figura 10

GC **78.** Dibuje las gráficas de

$$y = \text{arcsen } x \qquad \text{y} \qquad y = \arctan\left(x/\sqrt{1 - x^2}\right)$$

utilizando los mismos ejes. Formule una conjetura. Demuéstrela.

GC **79.** Dibuje la gráfica de $y = \pi/2 - \text{arcsen } x$. Haga una conjetura. Demuéstrela.

GC **80.** Dibuje la gráfica de $y = \text{sen}(\text{arcsen } x)$ en $[-1, 1]$. Después dibuje la gráfica de $y = \text{arcsen}(\text{sen } x)$ en $[-2\pi. 2\pi]$. Explique las diferencias que observe.

81. Demuestre que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C, \qquad a > 0$$

escribiendo $a^2 - x^2 = a^2[1 - (x/a)^2]$ y haciendo la sustitución $u = x/a$.

82. Demuestre el resultado del problema 81 derivando el lado derecho para obtener el integrando.

83. Demuestre que

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C, \qquad a \ne 0$$

84. Demuestre que

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{|x|}{a} + C, \qquad a > 0$$

85. Demuestre, derivando el lado derecho, que

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\text{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C, \qquad a > 0$$

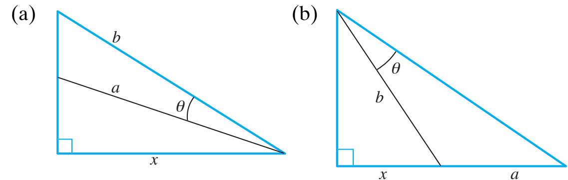
86. Utilice el resultado del problema 85 para demostrar que

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{2}$$

¿Por qué éste es el resultado esperado?

87. El borde inferior de un mural, de 10 pies de alto, está 2 pies por encima del nivel del ojo del observador. Encuentre la distancia ideal b a la que debe alejarse de la pared para ver el mural; esto es, encuentre b que maximiza el ángulo subtendido por el ojo del observador. (Véase el problema 73).

88. Exprese $d\theta/dt$ en términos de x, dx/dt, y las constantes a y b.



89. Se ha terminado el trabajo estructural de acero de un nuevo edificio de oficinas. Cruzando la calle, a 60 pies de la planta baja del elevador de carga en el edificio, un espectador está de pie y observa el elevador de carga que sube a una velocidad constante de 15 pies por segundo. ¿Qué tan rápido aumenta el ángulo de elevación de la visual del espectador al elevador después de 6 segundos que su visual pasa la horizontal?

90. Un aeroplano vuela a una altura constante de 2 millas y a una velocidad constante de 600 millas por hora, en línea recta que pasará directamente por encima de una observadora, que está en el piso. ¿Qué tan rápido está aumentando el ángulo de elevación de la visual de la observadora cuando la distancia de ella al aeroplano está a 3 millas? Proporcione su resultado en radianes por minuto.

91. La luz giratoria de un faro está ubicada en una isla y se encuentra a 2 millas del punto más cercano P de una playa recta en tierra firme. El faro lanza un rayo de luz que se mueve a lo largo de la playa conforme gira. Si la velocidad del rayo de luz sobre la playa es de 5π millas por minuto cuando el punto iluminado está a 1 milla de P, ¿a qué velocidad está girando el faro?

92. Un hombre en un muelle jala una cuerda atada a un bote de remos, a una velocidad de 5 pies por segundo. Si las manos del hombre están 8 pies por arriba del punto en donde la cuerda está sujeta al bote, ¿qué tan rápido está cambiando el ángulo de depresión de la cuerda cuando aún quedan 17 pies de cuerda por recoger?

C **93.** Una visitante del espacio exterior se aproxima a la Tierra (radio = 6376 kilómetros) a 2 kilómetros por segundo. ¿A qué velocidad aumenta el ángulo θ subtendido por la Tierra a su ojo cuando ella está a 3000 kilómetros de la superficie?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $[-\pi/2, \pi/2]$; arcsen **2.** $(-\pi/2, \pi/2)$; arctan **3.** 1 **4.** π

6.9 Funciones hiperbólicas y sus inversas

En matemáticas y ciencias aparecen, tan frecuentemente, ciertas combinaciones de e^x y e^{-x} que se les da nombres especiales.

Definición Funciones hiperbólicas

El seno hiperbólico, coseno hiperbólico y cuatro funciones relacionadas se definen por

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

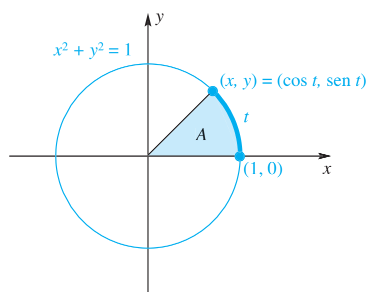


Figura 1

La terminología sugiere que debe haber alguna relación con las funciones trigonométricas; la hay. Primera, la identidad fundamental para las funciones hiperbólicas (en reminiscencia de $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ en trigonometría) es

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

Para verificarla, escribimos

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$$

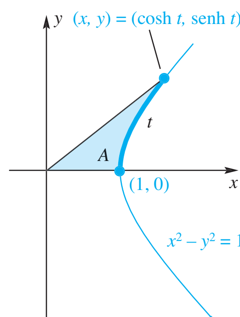


Figura 2

Segunda, recuerde que las funciones trigonométricas están íntimamente relacionadas con el círculo trigonométrico (véase la figura 1), de modo que, en ocasiones se les llama *funciones circulares*. En efecto, las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ describen a la circunferencia unitaria. De una forma semejante, las ecuaciones paramétricas $x = \cosh t$, $y = \operatorname{senh} t$, describen la rama derecha de la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$ (véase la figura 2). Además, en ambos casos el parámetro t está relacionado con el área sombreada A mediante $t = 2A$, aunque no es obvio en el segundo caso (véase el problema 56).

Ya que $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)$, senh es una función impar; $\cosh(-x) = \cosh x$, de modo que cosh es una función par. De manera correspondiente, la gráfica de $y = \operatorname{senh} x$ es simétrica con respecto al origen y la gráfica de $y = \cosh x$ es simétrica con respecto al eje y. De manera análoga, tanh es una función impar y sech es una función par. Las gráficas se muestran en la figura 3.

Derivadas de funciones hiperbólicas Podemos encontrar $D_x \operatorname{senh} x$ y $D_x \cosh x$ de manera directa a partir de las definiciones

$$D_x \operatorname{senh} x = D_x\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

y

$$D_x \cosh x = D_x\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x$$

Observe que estos hechos confirman el carácter de las gráficas de la figura 3. Por ejemplo, ya que $D_x(\operatorname{senh} x) = \cosh x > 0$, la gráfica de seno hiperbólico siempre está ascendiendo. De manera análoga, $D_x^2(\cosh x) = \cosh x > 0$, lo cual significa que la gráfica del coseno hiperbólico es cóncava hacia arriba.

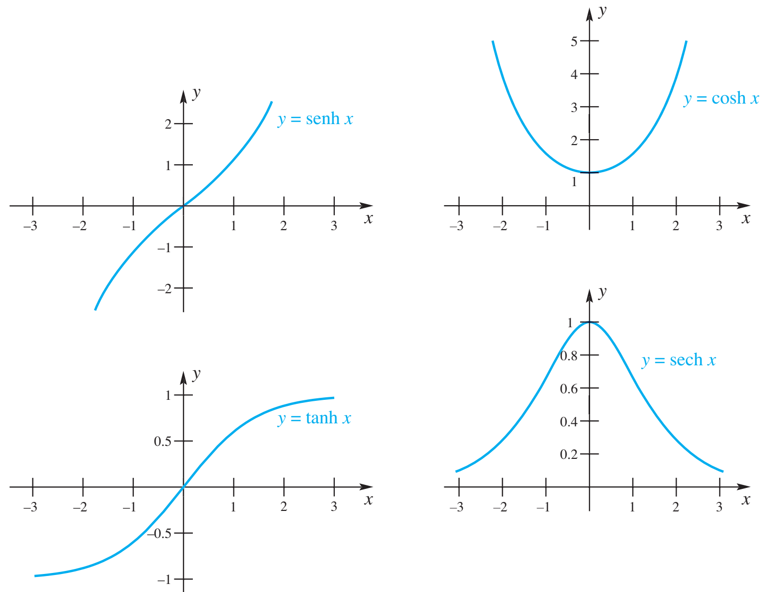


Figura 3

Las derivadas de las otras cuatro funciones hiperbólicas se deducen de las correspondientes a las otras dos, combinadas con la regla del cociente. Los resultados se resumen en el teorema A.

Teorema A **Derivadas de las funciones hiperbólicas**

$$D_x \operatorname{senh} x = \cosh x \qquad D_x \cosh x = \operatorname{senh} x$$
$$D_x \tanh x = \operatorname{sech}^2 x \qquad D_x \coth x = -\operatorname{csch}^2 x$$
$$D_x \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x \qquad D_x \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$$

Otra forma en la que las funciones trigonométricas y las hiperbólicas están relacionadas concierne a ecuaciones diferenciales. Las funciones sen x y cos x son soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden $y'' = -y$, y senh x y cosh x son soluciones de la ecuación diferencial $y'' = y$.

EJEMPLO 1 Encuentre $D_x \tanh(\operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} D_x \tanh(\operatorname{sen} x) &= \operatorname{sech}^2(\operatorname{sen} x)\, D_x(\operatorname{sen} x) \\ &= \cos x \cdot \operatorname{sech}^2(\operatorname{sen} x) \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Encuentre $D_x \cosh^2(3x - 1)$.

SOLUCIÓN Aplicamos dos veces la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} D_x \cosh^2(3x - 1) &= 2\cosh(3x - 1)\, D_x \cosh(3x - 1) \\ &= 2\cosh(3x - 1)\operatorname{senh}(3x - 1)\, D_x(3x - 1) \\ &= 6\cosh(3x - 1)\operatorname{senh}(3x - 1) \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Encuentre $\int \tanh x\, dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \cosh x$, por lo que $du = \operatorname{senh} x\, dx$.

$$\int \tanh x\, dx = \int \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\, dx = \int \frac{1}{u}\, du$$

$$= \ln|u| + C = \ln|\cosh x| + C = \ln(\cosh x) + C$$

Podríamos quitar los signos de valor absoluto, ya que $\cosh x > 0$. ■

Funciones hiperbólicas inversas Como seno hiperbólico y tangente hiperbólico tienen derivadas positivas, son funciones crecientes y de manera automática tienen inversas. Para obtener inversas para coseno hiperbólico y secante hiperbólica, restringimos sus dominios a $x \geq 0$. Así,

$$x = \operatorname{senh}^{-1} y \iff y = \operatorname{senh} x$$

$$x = \cosh^{-1} y \iff y = \cosh x \quad \text{y} \quad x \geq 0$$

$$x = \tanh^{-1} y \iff y = \tanh x$$

$$x = \operatorname{sech}^{-1} y \iff y = \operatorname{sech} x \quad \text{y} \quad x \geq 0$$

Como las funciones hiperbólicas están definidas en términos de e^x y e^{-x}, no es sorprendente que las funciones hiperbólicas inversas puedan expresarse en términos de logaritmos naturales. Por ejemplo, considere $y = \cosh x$ para $x \geq 0$; esto es, considere

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad x \geq 0$$

Nuestra meta es resolver esta ecuación para x, la cual dará $\cosh^{-1} y$. Al multiplicar ambos miembros por $2e^x$, obtenemos $2ye^x = e^{2x} + 1$, o

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0, \qquad x \geq 0$$

Si resolvemos esta ecuación cuadrática en e^x, obtenemos

$$e^x = \frac{2y + \sqrt{(2y)^2 - 4}}{2} = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

La fórmula cuadrática da dos soluciones, la dada antes y $\left(2y - \sqrt{(2y)^2 - 4}\right)/2$. Esta última solución es extraña porque es menor que uno, mientras que e^x es mayor que 1 para toda $x > 0$. Así, $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$, de modo que

$$x = \cosh^{-1} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

Argumentos similares se aplican a cada una de las funciones hiperbólicas inversas. Obtenemos los siguientes resultados (observe que los papeles de x y y se han intercambiado). La figura 3 sugiere las restricciones necesarias del dominio. Las gráficas de las funciones hiperbólicas inversas se muestran en la figura 4.

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \qquad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}, \qquad -1 < x < 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \qquad 0 < x \leq 1$$

Cada una de estas funciones es derivable. De hecho,

$$D_x \operatorname{senh}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$D_x \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad x > 1$$

$$D_x \tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}, \qquad -1 < x < 1$$

$$D_x \operatorname{sech}^{-1} x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, \qquad 0 < x < 1$$

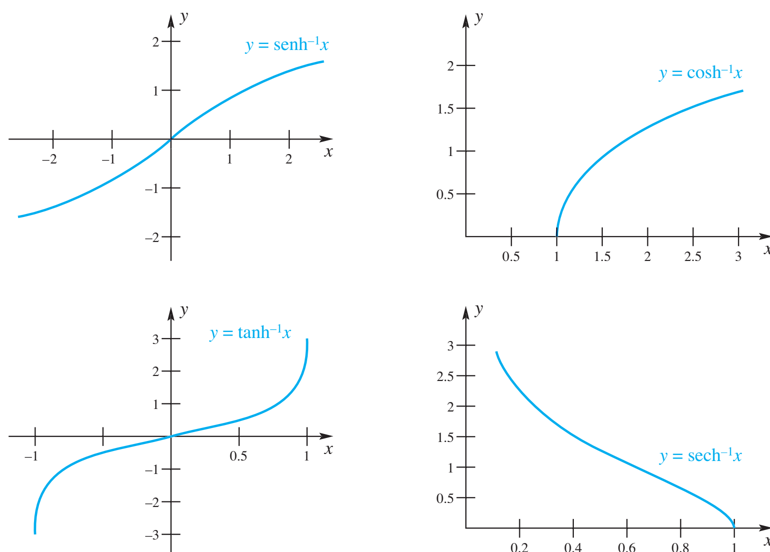


Figura 4

EJEMPLO 4 Demuestre que $D_x \operatorname{senh}^{-1} x = 1/\sqrt{x^2+1}$ por medio de dos métodos diferentes.

SOLUCIÓN

Método 1 Sea $y = \operatorname{senh}^{-1} x$, de modo que

$$x = \operatorname{senh} y$$

Ahora derive ambos lados respecto a x

$$1 = (\cosh y)\, D_x y$$

Así,

$$D_x y = D_x(\operatorname{senh}^{-1} x) = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{senh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Método 2 Utilice la expresión logarítmica para $\operatorname{senh}^{-1} x$.

$$\begin{aligned} D_x(\operatorname{senh}^{-1} x) &= D_x \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} D_x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

■

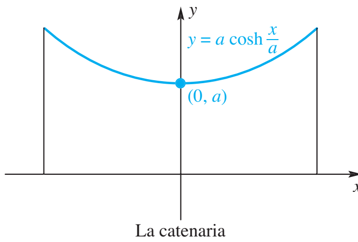


Figura 5



Una catenaria invertida

Aplicaciones: la catenaria Si un cable, o cadena, flexible homogéneo se suspende entre dos puntos fijos a la misma altura, forma una curva denominada **catenaria** (figura 5). Además (véase el problema 53), una catenaria puede colocarse en un sistema de coordenadas de modo que su ecuación tome la forma

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

EJEMPLO 5 Encuentre la longitud de la catenaria $y = a \cosh(x/a)$ entre $x = -a$ y $x = a$.

SOLUCIÓN La longitud deseada (véase la sección 5.4) está dada por

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx &= \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)}\, dx \\ &= \int_{-a}^{a} \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\, dx \\ &= 2\int_{0}^{a} \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx \\ &= 2a \int_{0}^{a} \cosh\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{1}{a}\, dx\right) \\ &= \left[2a \operatorname{senh} \frac{x}{a}\right]_0^a \\ &= 2a \operatorname{senh} 1 \approx 2.35a\end{aligned}$$

■

Revisión de conceptos

1. senh y cosh están definidos por senh x = ______ y cosh x = ______.

2. En trigonometría *hiperbólica*, la identidad correspondiente a $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ es ______.

3. A consecuencia de la identidad de la pregunta 2, la gráfica de las ecuaciones paramétricas $x = \cosh t$, $y = \operatorname{senh} t$ es ______.

4. La gráfica de $y = a \cosh(x / a)$ es una curva denominada ______; esta curva es importante como un modelo para ______.

Conjunto de problemas 6.9

En los problemas del 1 al 12 verifique que las ecuaciones que se dan son identidades.

1. $e^x = \cosh x + \operatorname{senh} x$

2. $e^{2x} = \cosh 2x + \operatorname{senh} 2x$

3. $e^{-x} = \cosh x - \operatorname{senh} x$

4. $e^{-2x} = \cosh 2x - \operatorname{senh} 2x$

5. $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$

6. $\operatorname{senh}(x - y) = \operatorname{senh} x \cosh y - \cosh x \operatorname{senh} y$

7. $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

8. $\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

9. $\tanh(x + y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

10. $\tanh(x - y) = \dfrac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$

11. $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

12. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

En los problemas del 13 al 36 encuentre $D_x y$.

13. $y = \operatorname{senh}^2 x$

14. $y = \cosh^2 x$

15. $y = 5 \operatorname{senh}^2 x$

16. $y = \cosh^3 x$

17. $y = \cosh(3x + 1)$

18. $y = \operatorname{senh}(x^2 + x)$

19. $y = \ln(\operatorname{senh} x)$

20. $y = \ln(\coth x)$

21. $y = x^2 \cosh x$

22. $y = x^{-2} \operatorname{senh} x$

23. $y = \cosh 3x \operatorname{senh} x$

24. $y = \operatorname{senh} x \cosh 4x$

25. $y = \tanh x \operatorname{senh} 2x$

26. $y = \coth 4x \operatorname{senh} x$

27. $y = \operatorname{senh}^{-1}(x^2)$

28. $y = \cosh^{-1}(x^3)$

29. $y = \tanh^{-1}(2x - 3)$

30. $y = \coth^{-1}(x^5)$

31. $y = x \cosh^{-1}(3x)$

32. $y = x^2 \operatorname{senh}^{-1}(x^5)$

33. $y = \ln(\cosh^{-1} x)$

34. $y = \cosh^{-1}(\cos x)$

35. $y = \tanh(\cot x)$

36. $y = \coth^{-1}(\tanh x)$

37. Encuentre el área de la región acotada por $y = \cosh 2x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \ln 3$.

En los problemas del 38 al 45 evalúe cada integral.

38. $\int \operatorname{senh}(3x + 2)\, dx$

39. $\int x \cosh(\pi x^2 + 5)\, dx$

40. $\int \frac{\cosh \sqrt{z}}{\sqrt{z}}\, dz$

41. $\int \frac{\operatorname{senh}(2z^{1/4})}{\sqrt[4]{z^3}}\, dz$

42. $\int e^x \operatorname{senh} e^x\, dx$

43. $\int \cos x \operatorname{senh}(\operatorname{sen} x)\, dx$

44. $\int \tanh x \ln(\cosh x)\, dx$

45. $\int x \coth x^2 \ln(\operatorname{senh} x^2)\, dx$

46. Encuentre el área de la región acotada por $y = \cosh 2x$, $y = 0$, $x = -\ln 5$ y $x = \ln 5$.

47. Encuentre el área de la región acotada por $y = \operatorname{senh} x$, $y = 0$ y $x = \ln 2$.

48. Encuentre el área de la región acotada por $y = \tanh x$, $y = 0$, $x = -8$ y $x = 8$.

49. La región acotada por $y = \cosh x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ se hace girar alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante. *Sugerencia:* $\cosh^2 x = (1 + \cosh 2x)/2$.

50. La región acotada por $y = \operatorname{senh} x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \ln 10$ se hace girar alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

51. El curva $y = \cosh x$, $0 \le x \le 1$, se hace girar alrededor del eje x. Encuentre el área de la superficie resultante.

52. La curva $y = \operatorname{senh} x$, $0 \le x \le 1$, se hace girar alrededor del eje x. Encuentre el área de la superficie resultante.

53. Para deducir la ecuación del cable colgante (catenaria), consideremos la sección AP desde el punto más bajo A hasta un punto general $P(x, y)$ (véase la figura 6) e imagine que el resto del cable se ha retirado.

Las fuerzas que actúan sobre el cable son:

1. H = tensión horizontal que tira en A;
2. T = tensión tangencial que tira en P;
3. $W = \delta s$ = peso de s pies de cable de densidad δ libras por pie.

Para estar en equilibrio, las componentes horizontal y vertical de T deben equilibrar H y W, respectivamente. Así, $T \cos \phi = H$ y $T \operatorname{sen} \phi = W = \delta s$, y así

$$\frac{T \operatorname{sen} \phi}{T \cos \phi} = \tan \phi = \frac{\delta s}{H}$$

Pero como $\tan \phi = dy/dx$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\delta s}{H}$$

y por lo tanto

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\delta}{H}\frac{ds}{dx} = \frac{\delta}{H}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Ahora demuéstrese que $y = a \cosh(x/a) + C$ satisface esta ecuación diferencial con $a = H/\delta$.

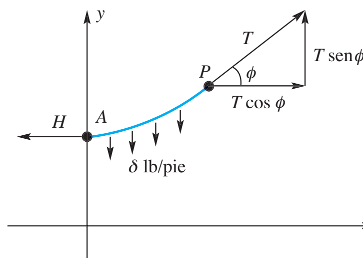


Figura 6

C **54.** Llame a la gráfica de $y = b - a \cosh(x/a)$ una catenaria invertida e imagínela descansando sobre el eje x. Demuestre que si el ancho de este arco, a lo largo del eje x, es $2a$, entonces cada una de las afirmaciones es verdadera.

(a) $b = a \cosh 1 \approx 1.54308a$.

(b) La altura del arco es aproximadamente $0.54308a$.

(c) La altura de un arco de ancho 48 es aproximadamente 13.

C **55.** Un granjero construyó un gran pajar de 100 pies de largo y 48 pies de ancho. Una sección transversal tiene la forma de una catenaria invertida (véase el problema 54) con ecuación $y = 37 - 24 \cosh(x/24)$.

(a) Haga un dibujo de este pajar.

(b) Encuentre el volumen del pajar.

(c) Encuentre el área de la superficie de la bóveda del pajar.

56. Demuestre que $A = t/2$, en donde A denota el área en la figura 2 de esta sección. *Sugerencia:* en algún momento necesitará utilizar la fórmula 44 de las guardas del libro.

57. Demuestre que para cualquier número real r:

(a) $(\operatorname{senh} x + \cosh x)^r = \operatorname{senh} rx + \cosh rx$

(b) $(\cosh x - \operatorname{seinh} x)^r = \cosh rx - \operatorname{senh} rx$

(c) $(\cos x + i \operatorname{sen} x)^r = \cos rx + i \operatorname{sen} rx$

(d) $(\cos x - i \operatorname{sen} x)^r = \cos rx - i \operatorname{sen} rx$

58. El **gudermanniano** de t se define por

$$\operatorname{gd}(t) = \tan^{-1}(\operatorname{senh} t)$$

Demuestre que:

(a) gd es impar y creciente con un punto de inflexión en el origen;

(b) $\operatorname{gd}(t) = \operatorname{sen}^{-1}(\tanh t) = \int_0^t \operatorname{sech} u\, du$.

59. Demuestre que el área debajo de la curva $y = \cosh t$, $0 \le t \le x$, es numéricamente igual a su longitud de arco.

60. Encuentre la ecuación del Gateway Arch en San Luis, Missouri, dado que es una catenaria invertida. Suponga que descansa sobre el eje x, que es simétrico con respecto al eje y y que tiene 630 pies de ancho en la base y 630 pies de alto en el centro.

GC **61.** Dibuje las gráficas de $y = \operatorname{senh} x$, $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, utilizando los mismos ejes y escalados de modo que $-3 \le x \le 3$ y $-3 \le y \le 3$. ¿Qué demuestra esto?

CAS **62.** Con referencia al problema 58. Deduzca una fórmula para $\mathrm{gd}^{-1}(x)$. Dibuje su gráfica y también la de $\mathrm{gd}(x)$ mediante los mismos ejes y con esto confirme su fórmula.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $(e^x - e^{-x})/2$; $(e^x + e^{-x})/2$ **2.** $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ **3.** la gráfica de $x^2 - y^2 = 1$ (una hipérbola) **4.** catenaria; un cable (cadena) colgante

6.10 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

1. $\ln|x|$ está definido para todo real x.

2. La gráfica de $y = \ln x$ no tiene puntos de inflexión.

3. $\int_1^{e^3} \frac{1}{t}\,dt = 3$

4. La gráfica de una función invertible $y = f(x)$ es intersecada exactamente una vez por toda recta horizontal.

5. El dominio de $\ln^{-1}$ es el conjunto de todos los números reales.

6. $\ln x/\ln y = \ln x - \ln y$

7. $(\ln x)^4 = 4 \ln x$

8. $\ln(2e^{x+1}) - \ln(2e^x) = 1$ para todo número real x.

9. Las funciones $f(x) = 4 + e^x$ y $g(x) = \ln(x - 4)$ son inversas entre sí.

10. $\exp x + \exp y = \exp(x + y)$.

11. Si $x > y > 0$, entonces $\ln x > \ln y$.

12. Si $a \ln x < b \ln x$, entonces $a < b$.

13. Si $a < b$, entonces $ae^x < be^x$.

14. Si $a < b$, entonces $e^a < e^b$.

15. $\lim_{x\to 0^+} (\ln \operatorname{sen} x - \ln x) = 0$.

16. $\pi^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln \pi}$

17. $\frac{d}{dx}(\ln \pi) = \frac{1}{\pi}$

18. $\int \frac{1}{x}dx = \ln 3|x| + C$

19. $D_x(x^e) = ex^{e-1}$

20. Si $f(x) \cdot \exp[g(x)] = 0$ para $x = x_0$, entonces $f(x_0) = 0$.

21. $D_x(x^x) = x^x \ln x$.

22. $y = \tan x + \sec x$ es una solución de $2y' - y^2 = 1$.

23. Un factor integrante para $y' + \frac{4}{x}y = e^x$ es x^4.

24. La solución de la ecuación diferencial $y' = 2y$ que pasa por el punto $(2, 1)$, tiene pendiente 2 en ese punto.

25. El Método de Euler siempre sobrestimará la solución de la ecuación diferencial $y' = 2y$ con condición inicial $y(0) = 1$.

26. $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$ para todos los números reales x.

27. $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$ para todos los números reales x.

28. Si $a < b$, entonces $\operatorname{senh} a < \operatorname{senh} b$.

29. Si $a < b$, entonces $\cosh a < \cosh b$.

30. $\cosh x \le e^{|x|}$

31. $|\operatorname{senh} x| \le e^{|x|}/2$

32. $\tan^{-1} x = \operatorname{sen}^{-1} x/\cos^{-1} x$

33. $\cosh(\ln 3) = \frac{5}{6}$

34. $\lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1$

35. $\lim_{x\to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$

36. $\operatorname{senh}^{-1}(\cosh x)$ está definida para todos los números reales x.

37. $f(x) = \tanh x$ es una función impar.

38. Tanto $y = \operatorname{senh} x$ como $y = \cosh x$ satisfacen la ecuación diferencial $y'' + y = 0$.

39. $\ln(3^{100}) > 100$.

40. $\ln(2x^2 - 18) - \ln(x - 3) - \ln(x + 3) = \ln 2$ para todos los números reales x.

41. Si y crece de manera exponencial y si y se triplica entre $t = 0$ y $t = t_1$, entonces y también se triplicará entre $t = 2t_1$ y $t = 3t_1$.

42. El tiempo necesario para que $x(t) = Ce^{-kt}$ caiga a la mitad de su valor es $\frac{\ln 2}{\ln k}$.

43. Si $y'(t) = ky(t)$ y $z'(t) = kz(t)$, entonces $(y(t) + z(t))' = k(y(t) + z(t))$.

44. Si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ satisfacen $y'(t) = ky(t) + C$, entonces también lo hace $(y_1(t) + y_2(t))$.

45. $\lim_{h\to 0}(1 - h)^{-1/h} = e^{-1}$.

46. Para un ahorrador, es una ventaja tener dinero invertido a 5% compuesto continuamente, en lugar de a 6% compuesto cada mes.

47. Si $D_x(a^x) = a^x$ con $a > 0$, entonces $a = e$.

Problemas de examen

En los problemas del 1 al 24 derive cada función.

1. $\ln\frac{x^4}{2}$

2. $\operatorname{sen}^2(x^3)$

3. e^{x^2-4x}

4. $\log_{10}(x^5 - 1)$

5. $\tan(\ln e^x)$

6. $e^{\ln \cot x}$

7. $2 \tanh \sqrt{x}$

8. $\tanh^{-1}(\operatorname{sen} x)$

9. $\operatorname{senh}^{-1}(\tan x)$

10. $2 \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{3x}$

11. $\sec^{-1} e^x$

12. $\ln \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$

13. $3 \ln(e^{5x} + 1)$

14. $\ln(2x^3 - 4x + 5)$

15. $\cos e^{\sqrt{x}}$

16. $\ln(\tanh x)$

17. $2 \cos^{-1}\sqrt{x}$

18. $4^{3x} + (3x)^4$

19. $2 \csc e^{\ln \sqrt{x}}$

20. $(\log_{10} 2x)^{2/3}$

21. $4 \tan 5x \sec 5x$

22. $x \tan^{-1}\frac{x^2}{2}$

23. x^{1+x}

24. $(1 + x^2)^e$

En los problemas del 25 al 34 encuentre una antiderivada de cada función y verifique su resultado por medio de derivación.

25. e^{3x-1}

26. $6 \cot 3x$

27. $e^x \operatorname{sen} e^x$

28. $\dfrac{6x + 3}{x^2 + x - 5}$

29. $\dfrac{e^{x+2}}{e^{x+3} + 1}$

30. $4x \cos x^2$

31. $\dfrac{4}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

32. $\dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$

33. $\dfrac{-1}{x + x(\ln x)^2}$

34. $\operatorname{sech}^2(x - 3)$

En los problemas 35 y 36 encuentre los intervalos en los que f es creciente y los intervalos en los que f es decreciente. Encuentre en dónde la gráfica de f es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo. Encuentre los valores extremos y los puntos de inflexión. Después bosqueje la gráfica de f.

35. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

36. $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}, -\infty < x < \infty$

37. Sea $f(x) = x^5 + 2x^3 + 4x, -\infty < x < \infty$.

(a) Demuestre que f tiene una inversa $g = f^{-1}$.

(b) Evalúe $g(7) = f^{-1}(7)$.

(c) Evalúe $g'(7)$.

38. Cierta sustancia radiactiva tiene una vida media de 10 años. ¿Cuánto tiempo pasará para que 100 gramos decaigan a 1 gramo?

C **39.** Utilice el Método de Euler, con $h = 0.2$, para aproximar la solución a la ecuación diferencial $y' = xy$ con condición inicial $y(1) = 2$ en el intervalo $[1, 2]$.

40. Un aeroplano que vuela de manera horizontal a una altura de 500 pies, con una velocidad de 300 pies por segundo, se aleja directamente de un faro buscador en tierra. El faro se mantiene dirigido hacia el aeroplano. ¿A qué tasa está cambiando el ángulo entre el haz de luz y el piso cuando este ángulo es de 30°?

41. Encuentre la ecuación de la recta tangente para $y = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$ en $(0, 1)$.

42. Un pueblo creció de manera exponencial de 10,000 en el año 1990 a 14,000 en el 2000. Suponiendo que continúa el mismo tipo de crecimiento, ¿cuál será la población en 2010?

En los problemas del 43 al 47 resuelva cada ecuación diferencial.

43. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = 0$

44. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{x^2 - 2y}{x} = 0$

45. $\dfrac{dy}{dx} + 2x(y - 1) = 0; y = 3$ cuando $x = 0$

46. $\dfrac{dy}{dx} - ay = e^{ax}$

47. $\dfrac{dy}{dx} - 2y = e^x$

48. Suponga que se infunde glucosa en el torrente sanguíneo de un paciente a una tasa de 3 gramos por minuto, pero que el cuerpo del paciente convierte y elimina la glucosa de su sangre a una tasa proporcional a la cantidad que esté presente (con constante de proporcionalidad 0.02). Sea $Q(t)$ la cantidad presente en el instante t, con $Q(0) = 120$.

(a) Escriba la ecuación diferencial para Q.

(b) Resuelva esta ecuación diferencial.

(c) Determine qué le sucede a Q a la larga.

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

Evalúe las integrales en los problemas del 1 el 8.

1. $\int \operatorname{sen} 2x \, dx$

2. $\int e^{3t} \, dt$

3. $\int x \operatorname{sen} x^2 \, dx$

4. $\int x e^{3x^2} \, dx$

5. $\int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \, dt$

6. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx$

7. $\int x\sqrt{x^2 + 2} \, dx$

8. $\int \frac{x}{x^2 + 1} \, dx$

Determine y simplifique las derivadas de las funciones en los problemas del 9 al 12.

9. $f(x) = x \ln x - x$

10. $f(x) = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2}$

11. $f(x) = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x$

12. $f(x) = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$

13. Utilice una de las identidades del ángulo doble (de la sección 0.7) para determinar una expresión para $\operatorname{sen}^2 x$ que incluya a $\cos 2x$.

14. Utilice una de las identidades del ángulo doble para determinar una expresión para $\cos^2 x$ que incluya a $\cos 2x$.

15. Utilice una de las identidades del ángulo doble para determinar una expresión para $\cos^4 x$ que incluya a $\cos 2x$.

16. Utilice una de las identidades del producto (de la sección 0.7) para expresar $\operatorname{sen} 3x \cos 4x$ sólo en términos de la función seno, de tal manera que ningún par de funciones trigonométricas esté multiplicado.

17. Utilice una de las identidades del producto para expresar $\cos 3x \cos 5x$ sólo en términos de la función coseno, de tal manera que ningún par de funciones trigonométricas esté multiplicado.

18. Utilice una de las identidades del producto para expresar $\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x$ sólo en términos de la función coseno, de tal manera que ningún par de funciones trigonométricas esté multiplicado.

19. Evalúe $\sqrt{a^2 - x^2}$, cuando $x = a \operatorname{sen} t$, si $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

20. Evalúe $\sqrt{a^2 + x^2}$, cuando $x = a \tan t$, si $-\pi/2 < t < \pi/2$.

21. Evalúe $\sqrt{x^2 - a^2}$, cuando $x = a \sec t$, si $0 \leq t \leq \pi$ y $t \neq \pi/2$.

22. Despeje a a en la ecuación $\int_0^a e^{-x} \, dx = \frac{1}{2}$.

En los problemas del 23 al 26 determine un común denominador, sume las dos fracciones y simplifique.

23. $\frac{1}{1 - x} - \frac{1}{x}$

24. $\frac{7/5}{x + 2} + \frac{8/5}{x - 3}$

25. $-\frac{1}{x} - \frac{1/2}{x + 1} + \frac{3/2}{x - 3}$

26. $\frac{1}{y} + \frac{1}{2000 - y}$

CAPÍTULO 7

Técnicas de integración

7.1 Reglas básicas de integración

Ahora, nuestro repertorio de funciones incluye a todas las funciones elementales. Éstas son las funciones constantes, las funciones potencias, las funciones algebraicas, las funciones logarítmica y exponencial, las funciones trigonométricas y trigonométricas inversas y todas las funciones obtenidas a partir de ellas por medio de suma, resta, multiplicación, división y composición. Así,

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$g(x) = (1 + \cos^4 x)^{1/2}$$

$$h(x) = \frac{3^{x^2-2x}}{\ln(x^2 + 1)} - \operatorname{sen}[\cos(\cosh x)]$$

son funciones elementales.

La derivación de una función elemental es directa, sólo requiere de un uso sistemático de las reglas que hemos aprendido. Y el resultado siempre es una función elemental. La integración (antiderivación) es un asunto muy diferente. Implica unas cuantas técnicas y una gran cantidad de trucos; y lo que es peor, no siempre se obtiene una función elemental. Por ejemplo, se sabe que las antiderivadas de e^{-x^2} y $(\operatorname{sen} x)/x$ no son funciones elementales.

Las dos principales técnicas para integración son *sustitución* e *integración por partes*. El método de sustitución se introdujo en la sección 4.4; que en varias ocasiones hemos usado en los capítulos anteriores.

Formas estándar El uso eficaz del método de sustitución depende de la pronta disponibilidad de una lista de integrales conocidas. Una de tales listas (pero demasiado grande para memorizarla) aparece dentro de la contraportada de este libro. La lista más breve, que se muestra a continuación, es tan útil que pensamos que todo estudiante de cálculo debe memorizarla.

Formas integrales estándar

Constantes, potencias

1. $\int k\, du = ku + C$

2. $\int u^r\, du = \begin{cases} \dfrac{u^{r+1}}{r+1} + C & r \neq -1 \\ \ln|u| + C & r = -1 \end{cases}$

Exponenciales

3. $\int e^u\, du = e^u + C$

4. $\int a^u\, du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C, a \neq 1, a > 0$

Funciones trigonométricas

5. $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$

6. $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$

7. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$

8. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$

9. $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$

10. $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$

11. $\int \tan u\, du = -\ln|\cos u| + C$

12. $\int \cot u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

Funciones algebraicas

13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$

14. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$

15. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{|u|}{a}\right) + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left(\frac{a}{|u|}\right) + C$

Funciones hiperbólicas

16. $\displaystyle\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

17. $\displaystyle\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

Sustitución en integrales indefinidas Suponga que se enfrenta a una integral indefinida. Si es una forma estándar, basta con escribir la respuesta. Si no, busque una sustitución que la cambie a una forma estándar. Si la primera sustitución que intente no funciona, pruebe con otra. Tener habilidad en esto, al igual que en la mayoría de las actividades que valen la pena, depende de la práctica.

El método de sustitución se dio en el teorema 4.4B y se vuelve a establecer aquí para una fácil referencia.

Teorema A Sustitución en integrales indefinidas

Sea g una función derivable y supóngase que F es una antiderivada de f. Entonces, si $u = g(x)$,

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

EJEMPLO 1 Encuentre $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}dx$.

SOLUCIÓN Analice esta integral por unos momentos. Como $1/\cos^2 x = \sec^2 x$, puede recordarla de la forma estándar $\int \sec^2 u\,du$. Sea $u = x^2$, $du = 2x\,dx$. Entonces

$$\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2(x^2)}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\tan u + C = \frac{1}{2}\tan(x^2) + C$$

■

EJEMPLO 2 Encuentre $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{5 - 9x^2}}dx$.

SOLUCIÓN Considere $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$. Sea $u = 3x$, por lo que $du = 3dx$. Entonces,

$$\int \frac{3}{\sqrt{5 - 9x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{5 - u^2}}\,du = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

■

EJEMPLO 3 Encuentre $\displaystyle\int \frac{6e^{1/x}}{x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Considere $\int e^u\,du$. Sea $u = 1/x$, así $du\ (-1/x^2)\ dx$. Entonces,

$$\int \frac{6e^{1/x}}{x^2}\,dx = -6\int e^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}\,dx\right) = -6\int e^u\,du$$

$$= -6e^u + C = -6e^{1/x} + C$$

■

EJEMPLO 4 Encuentre $\int \frac{e^x}{4 + 9e^{2x}}\,dx$.

SOLUCIÓN Considere $\int \frac{1}{a^2 + u^2}\,du$. Sea $u = 3e^x$, por lo que $du = 3e^x\,dx$. Entonces,

$$\int \frac{e^x}{4 + 9e^{2x}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{4 + 9e^{2x}}(3e^x\,dx) = \frac{1}{3}\int \frac{1}{4 + u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C = \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3e^x}{2}\right) + C$$ ■

Ninguna ley dice que usted tiene que escribir de manera explícita la sustitución de u. Si usted puede hacerla mentalmente, está bien. He aquí dos ilustraciones.

EJEMPLO 5 Encuentre $\int x \cos x^2\,dx$

SOLUCIÓN Mentalmente, sustituya $u = x^2$.

$$\int x \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos x^2)(2x\,dx) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 + C$$ ■

EJEMPLO 6 Encuentre $\int \frac{a^{\tan t}}{\cos^2 t}\,dt$.

SOLUCIÓN Mentalmente, sustituya $u = \tan t$.

$$\int \frac{a^{\tan t}}{\cos^2 t}\,dt = \int a^{\tan t}(\sec^2 t\,dt) = \frac{a^{\tan t}}{\ln a} + C$$ ■

Sustitución en integrales definidas Este tema se cubrió en la sección 4.4. Es igual al de la sustitución en integrales indefinidas, pero debemos recordar llevar a cabo el cambio apropiado en los límites de integración.

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_2^5 t\sqrt{t^2 - 4}\,dt$.

SOLUCIÓN Sea $u = t^2 - 4$, con lo que $du = 2t\,dt$; observe que cuando $t = 2$, $u = 0$, y cuando $t = 5$, $u = 21$. Así,

$$\int_2^5 t\sqrt{t^2 - 4}\,dt = \frac{1}{2}\int_2^5 (t^2 - 4)^{1/2}(2t\,dt)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{21} u^{1/2}\,du$$

$$= \left[\frac{1}{3}u^{3/2}\right]_0^{21} = \frac{1}{3}(21)^{3/2} \approx 32.08$$ ■

EJEMPLO 8 Determine $\int_1^3 x^3\sqrt{x^4 + 11}\,dx$.

SOLUCIÓN En forma mental sustituya $u = x^4 + 11$.

$$\int_1^3 x^3\sqrt{x^4 + 11}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^3 (x^4 + 11)^{1/2}(4x^3\,dx)$$

$$= \left[\frac{1}{6}(x^4 + 11)^{3/2}\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{6}[92^{3/2} - 12^{3/2}] \approx 140.144$$ ■

Revisión de conceptos

1. La diferenciación de una función elemental es directa, pero existen casos en donde la antiderivada de una función elemental no puede expresarse como un(a) _______.

2. La sustitución $u = 1 + x^3$ transforma $\int 3x^2(1 + x^3)^5\,dx$ en _______.

3. La sustitución $u =$ _______ transforma $\int e^x/(4 + e^{2x})\,dx$ a $\int 1/(4 + u^2)\,du$.

4. La sustitución $u = 1 + \operatorname{sen} x$ transforma $\int_0^{\pi/2} (1 + \operatorname{sen} x)^3 \cos x\,dx$ en _______.

Conjunto de problemas 7.1

En los problemas del 1 al 54 realice las integraciones indicadas.

1. $\int (x - 2)^5\,dx$

2. $\int \sqrt{3x}\,dx$

3. $\int_0^2 x(x^2 + 1)^5\,dx$

4. $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,dx$

5. $\int \frac{dx}{x^2 + 4}$

6. $\int \frac{e^x}{2 + e^x}\,dx$

7. $\int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx$

8. $\int \frac{2t^2}{2t^2 + 1}\,dt$

9. $\int 6z\sqrt{4 + z^2}\,dz$

10. $\int \frac{5}{\sqrt{2t + 1}}\,dt$

11. $\int \frac{\tan z}{\cos^2 z}\,dz$

12. $\int e^{\cos z} \operatorname{sen} z\,dz$

13. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

14. $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1 - x^4}}$

15. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\,dx$

16. $\int_0^{3/4} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 - x}}\,dx$

17. $\int \frac{3x^2 + 2x}{x + 1}\,dx$

18. $\int \frac{x^3 + 7x}{x - 1}\,dx$

19. $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln 4x^2)}{x}\,dx$

20. $\int \frac{\sec^2(\ln x)}{2x}\,dx$

21. $\int \frac{6e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\,dx$

22. $\int \frac{x}{x^4 + 4}\,dx$

23. $\int \frac{3e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\,dx$

24. $\int \frac{x^3}{x^4 + 4}\,dx$

25. $\int_0^1 t\,3^{t^2}\,dt$

26. $\int_0^{\pi/6} 2^{\cos x} \operatorname{sen} x\,dx$

27. $\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx$

28. $\int \frac{\operatorname{sen}(4t - 1)}{1 - \operatorname{sen}^2(4t - 1)}\,dt$

29. $\int e^x \sec e^x\,dx$ *Sugerencia:* véase el problema 56.

30. $\int e^x \sec^2(e^x)\,dx$

31. $\int \frac{\sec^3 x + e^{\operatorname{sen} x}}{\sec x}\,dx$

32. $\int \frac{(6t - 1)\operatorname{sen}\sqrt{3t^2 - t - 1}}{\sqrt{3t^2 - t - 1}}\,dt$

33. $\int \frac{t^2\cos(t^3 - 2)}{\operatorname{sen}^2(t^3 - 2)}\,dt$

34. $\int \frac{1 + \cos 2x}{\operatorname{sen}^2 2x}\,dx$

35. $\int \frac{t^2\cos^2(t^3 - 2)}{\operatorname{sen}^2(t^3 - 2)}\,dt$

36. $\int \frac{\csc^2 2t}{\sqrt{1 + \cot 2t}}\,dt$

37. $\int \frac{e^{\tan^{-1} 2t}}{1 + 4t^2}\,dt$

38. $\int (t + 1)e^{-t^2 - 2t - 5}\,dt$

39. $\int \frac{y}{\sqrt{16 - 9y^4}}\,dy$

40. $\int \cosh 3x\,dx$

41. $\int x^2 \operatorname{senh} x^3\,dx$

42. $\int \frac{5}{\sqrt{9 - 4x^2}}\,dx$

43. $\int \frac{e^{3t}}{\sqrt{4 - e^{6t}}}\,dt$

44. $\int \frac{dt}{2t\sqrt{4t^2 - 1}}$

45. $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{16 + \cos^2 x}\,dx$

46. $\int_0^1 \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}\,dx$

47. $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5}\,dx$

48. $\int \frac{1}{x^2 - 4x + 9}\,dx$

49. $\int \frac{dx}{9x^2 + 18x + 10}$

50. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 + 6x - x^2}}$

51. $\int \frac{x + 1}{9x^2 + 18x + 10}\,dx$

52. $\int \frac{3 - x}{\sqrt{16 + 6x - x^2}}\,dx$

53. $\int \frac{dt}{t\sqrt{2t^2 - 9}}$

54. $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\sec^2 x - 4}}\,dx$

55. Encuentre la longitud de la curva $y = \ln(\cos x)$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$.

56. Establezca la identidad

$$\sec x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

y después utilícela para deducir la fórmula

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

57. Evalúe $\int_0^{2\pi} \frac{x|\operatorname{sen} x|}{1 + \cos^2 x}\,dx$. *Sugerencia:* haga la sustitución $u = x - \pi$ en la integral definida y después utilice propiedades de la simetría.

58. Sea R la región acotada por $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ entre $x = -\pi/4$ y $x = 3\pi/4$. Encuentre el volumen del sólido obtenido cuando se hace girar R alrededor de $x = -\pi/4$. *Sugerencia:* use cascarones cilíndricos para escribir una sola integral, haga la sustitución $u = x - \pi/4$ y aplique propiedades de la simetría.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** función elemental **2.** $\int u^5\,du$ **3.** e^x **4.** $\int_1^2 u^3\,du$

7.2 Integración por partes

Si la integración por sustitución falla, es posible utilizar una doble sustitución, mejor conocida como *integración por partes*. Este método tiene como base la integración de la fórmula para la derivada de un producto de dos funciones.

Sean $u = u(x)$ y $v = v(x)$. Entonces

$$D_x[u(x)v(x)] = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

o

$$u(x)v'(x) = D_x[u(x)v(x)] - v(x)u'(x)$$

Al integrar ambos miembros de esta ecuación, obtenemos

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

Ya que $dv = v'(x)dx$ y $du = u'(x)dx$, por lo común, la ecuación anterior se escribe de manera simbólica como sigue:

Integración por partes: integrales indefinidas

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

La fórmula correspondiente para integrales definidas es

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$$

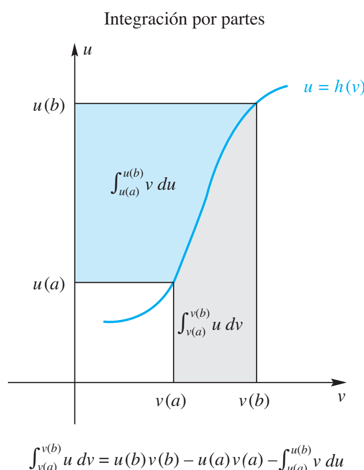


Figura 1

La figura 1 ilustra una interpretación geométrica de la integración por partes. Abreviamos esto como sigue:

Integración por partes: integrales definidas

$$\int_a^b u\,dv = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b v\,du$$

Estas fórmulas nos permiten transformar el problema de integrar $u\,dv$ al de integrar $v\,du$. El éxito depende de la elección apropiada de u y dv, la cual viene con la práctica.

EJEMPLO 1 Encuentre $\int x \cos x\,dx$.

SOLUCIÓN Deseamos escribir $x \cos x\,dx$ como $u\,dv$. Una posibilidad es hacer $u = x$ y $dv = \cos x\,dx$. Entonces, $du = dx$ y $v = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$ (en este paso podemos omitir la constante arbitraria). He aquí un resumen de esta doble sustitución en un formato conveniente.

$$u = x \qquad dv = \cos x\,dx$$
$$du = dx \qquad v = \operatorname{sen} x$$

La fórmula para integración por partes da

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\operatorname{sen} x}_{v} - \int \underbrace{\operatorname{sen} x}_{v}\,\underbrace{dx}_{du}$$
$$= x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

Tuvimos éxito en nuestro primer intento. Otra sustitución sería

$$u = \cos x \qquad dv = x\,dx$$

$$du = -\text{sen}\,x\,dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

Esta vez la fórmula para la integración por partes da

$$\int \underbrace{(\cos x)}_{u}\,\underbrace{x\,dx}_{dv} = \underbrace{(\cos x)}_{u}\,\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}\,\underbrace{(-\text{sen}\,x\,dx)}_{du}$$

lo cual es correcto pero no es útil. La nueva integral del lado derecho es más complicada que la original. Así, vemos la importancia de una buena elección para u y dv. ■

EJEMPLO 2 Encuentre $\int_1^2 \ln x\,dx$.

SOLUCIÓN Hacemos las sustituciones siguientes:

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \left(\frac{1}{x}\right)dx \qquad v = x$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln x\,dx &= [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x}dx \\ &= 2\ln 2 - \int_1^2 dx \\ &= 2\ln 2 - 1 \approx 0.386\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 3 Encuentre $\int \text{arcsen}\,x\,dx$.

SOLUCIÓN Hacemos las sustituciones

$$u = \text{arcsen}\,x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx \qquad v = x$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int \text{arcsen}\,x\,dx &= x\,\text{arcsen}\,x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \\ &= x\,\text{arcsen}\,x + \frac{1}{2}\int (1 - x^2)^{-1/2}(-2x\,dx) \\ &= x\,\text{arcsen}\,x + \frac{1}{2}\cdot 2(1 - x^2)^{1/2} + C \\ &= x\,\text{arcsen}\,x + \sqrt{1 - x^2} + C\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 4 Determine $\int_1^2 t^6 \ln t\,dt$.

SOLUCIÓN Hacemos las siguientes sustituciones

$$u = \ln t \qquad dv = t^6\,dt$$
$$du = \frac{1}{t}dt \qquad v = \frac{1}{7}t^7$$

Entonces

$$\int_1^2 t^6 \ln t\,dt = \left[\frac{1}{7}t^7 \ln t\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{7}t^7\left(\frac{1}{t}dt\right)$$
$$= \frac{1}{7}(128 \ln 2 - \ln 1) - \frac{1}{7}\int_1^2 t^6\,dt$$
$$= \frac{128}{7}\ln 2 - \frac{1}{49}[t^7]_1^2$$
$$= \frac{128}{7}\ln 2 - \frac{127}{49} \approx 10.083$$

■

Integración repetida por partes Algunas veces es necesario aplicar la integración por partes varias veces.

EJEMPLO 5 Encuentre $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN Sea

$$u = x^2 \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$
$$du = 2x\,dx \qquad v = -\cos x$$

Entonces

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\,dx$$

Hemos mejorado nuestra situación (el exponente en x ha bajado de 2 a 1), lo cual sugiere volver a aplicar la integración por partes a la integral de la derecha. En realidad, hicimos esta integración en el ejemplo 1, de modo que haremos uso del resultado obtenido allí.

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2 \cos x + 2(x \operatorname{sen} x + \cos x + C)$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + K$$

■

EJEMPLO 6 Encuentre $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN Tome $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Entonces $du = e^x\,dx$ y $v = -\cos x$. Así,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

que no parece haber mejorado las cosas, aunque no nos deja algo peor. Así que no lo desechemos e intentemos otra vez la integración por partes. En la integral de la derecha, sea $u = e^x$ y $dv = \cos x\,dx$, de modo que $du = e^x\,dx$ y $v = \operatorname{sen} x$. Entonces,

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

Cuando sustituimos esto en nuestro primer resultado, obtenemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

Pasando el último término al lado izquierdo y reduciendo términos, obtenemos

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

de la cual

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + K$$ ■

El hecho de que la integral que queríamos encontrar vuelva a aparecer en el lado derecho es lo que hace que funcione el ejemplo 6.

Fórmulas de reducción Una fórmula de la forma

$$\int f^n(x)g(x)\, dx = h(x) + \int f^k(x)\, g(x)\, dx$$

donde $k < n$, se denomina **fórmula de reducción** (el exponente en f se reduce). Con frecuencia, tales fórmulas pueden obtenerse por medio de la integración por partes.

EJEMPLO 7 Deduzca una fórmula de reducción para $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \operatorname{sen}^{n-1} x$ y $dv = \operatorname{sen} x\, dx$. Entonces

$$du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x \cos x\, dx \quad \text{y} \quad v = -\cos x$$

de lo cual

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\, dx$$

Si reemplazamos $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$ en la última integral, obtenemos

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\, dx$$

Después de combinar las integrales primera y última y despejando a $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$, obtenemos la fórmula de reducción (válida para $n \geq 2$),

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{-\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$ ■

EJEMPLO 8 Utilice la fórmula de reducción anterior para evaluar $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^8 x\, dx$.

SOLUCIÓN Observe primero que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \left[\frac{-\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

$$= 0 + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

Así,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^8 x\,dx = \frac{7}{8}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x\,dx$$
$$= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\,dx$$
$$= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx$$
$$= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1\,dx$$
$$= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{35}{256}\pi$$

■

La fórmula general para $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$ puede encontrarse de una manera análoga (fórmula 113 en la parte posterior del libro).

Revisión de conceptos

1. La fórmula de integración por partes dice que $\int u\,dv =$ ____.

2. Para aplicar esta fórmula a $\int x \operatorname{sen} x\,dx$, se hace $u =$ _____ y $dv =$ ______.

3. Al aplicar la fórmula de integración por partes se obtiene el valor ________ para $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\,dx$.

4. Una fórmula que expresa $\int f^n(x)\,g(x)\,dx$ en términos de $\int f^k(x)\,g(x)\,dx$, donde $k < n$, se denomina fórmula de ______.

Conjunto de problemas 7.2

En los problemas del 1 al 36 utilice la integración por partes para evaluar cada integral.

1. $\int xe^x\,dx$ **2.** $\int xe^{3x}\,dx$

3. $\int te^{5t+\pi}\,dt$ **4.** $\int (t+7)e^{2t+3}\,dt$

5. $\int x\cos x\,dx$ **6.** $\int x \operatorname{sen} 2x\,dx$

7. $\int (t-3)\cos(t-3)\,dt$ **8.** $\int (x-\pi)\operatorname{sen} x\,dx$

9. $\int t\sqrt{t+1}\,dt$ **10.** $\int t\sqrt[3]{2t+7}\,dt$

11. $\int \ln 3x\,dx$ **12.** $\int \ln(7x^5)\,dx$

13. $\int \arctan x\,dx$ **14.** $\int \arctan 5x\,dx$

15. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ **16.** $\int_2^3 \frac{\ln 2x^5}{x^2}\,dx$

17. $\int_1^e \sqrt{t}\ln t\,dt$ **18.** $\int_1^5 \sqrt{2x}\ln x^3\,dx$

19. $\int z^3 \ln z\,dz$ **20.** $\int t\arctan t\,dt$

21. $\int \arctan(1/t)\,dt$ **22.** $\int t^5 \ln(t^7)\,dt$

23. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} x\csc^2 x\,dx$ **24.** $\int_{\pi/6}^{\pi/4} x\sec^2 x\,dx$

25. $\int x^5\sqrt{x^3+4}\,dx$ **26.** $\int x^{13}\sqrt{x^7+1}\,dx$

27. $\int \frac{t^7}{(7-3t^4)^{3/2}}\,dt$ **28.** $\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$

29. $\int \frac{z^7}{(4-z^4)^2}\,dz$ **30.** $\int x\cosh x\,dx$

31. $\int x \operatorname{senh} x\,dx$ **32.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

33. $\int x(3x+10)^{49}\,dx$ **34.** $\int_0^1 t(t-1)^{12}\,dt$

35. $\int x\,2^x\,dx$ **36.** $\int z\,a^z\,dz$

En los problemas del 37 al 48 aplique dos veces la integración por partes para evaluar cada integral (véanse los ejemplos 5 y 6).

37. $\int x^2 e^x\,dx$ **38.** $\int x^5 e^{x^2}\,dx$

39. $\int \ln^2 z\,dz$ **40.** $\int \ln^2 x^{20}\,dx$

41. $\int e^t \cos t\,dt$ **42.** $\int e^{at}\operatorname{sen} t\,dt$

43. $\int x^2\cos x\,dx$ **44.** $\int r^2 \operatorname{sen} r\,dr$

45. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$ **46.** $\int \cos(\ln x)\,dx$

47. $\int (\ln x)^3\,dx$ *Sugerencia:* use el problema 39.

48. $\int (\ln x)^4\, dx$ *Sugerencia:* utilice los problemas 39 y 47.

En los problemas del 49 al 54 utilice integración por partes para deducir la fórmula que se da.

49. $$\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x\, dx = -\tfrac{3}{8}\operatorname{sen} x \cos 3x + \tfrac{1}{8}\cos x \operatorname{sen} 3x + C$$

50. $$\int \cos 5x \operatorname{sen} 7x\, dx = -\tfrac{7}{24}\cos 5x \cos 7x - \tfrac{5}{24}\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 7x + C$$

51. $$\int e^{\alpha z}\operatorname{sen} \beta z\, dz = \frac{e^{\alpha z}(\alpha \operatorname{sen} \beta z - \beta \cos \beta z)}{\alpha^2 + \beta^2} + C$$

52. $$\int e^{\alpha z}\cos \beta z\, dz = \frac{e^{\alpha z}(\alpha \cos \beta z + \beta \operatorname{sen} \beta z)}{\alpha^2 + \beta^2} + C$$

53. $$\int x^\alpha \ln x\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1}\ln x - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C, \alpha \neq -1$$

54. $$\int x^\alpha (\ln x)^2\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\ln x)^2 - 2\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\ln x + 2\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^3} + C, \alpha \neq -1$$

En los problemas del 55 al 61 deduzca la fórmula de reducción que se da utilizando integración por partes.

55. $$\int x^\alpha e^{\beta x}\, dx = \frac{x^\alpha e^{\beta x}}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1}e^{\beta x}\, dx$$

56. $$\int x^\alpha \operatorname{sen} \beta x\, dx = -\frac{x^\alpha \cos \beta x}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1}\cos \beta x\, dx$$

57. $$\int x^\alpha \cos \beta x\, dx = \frac{x^\alpha \operatorname{sen} \beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1}\operatorname{sen} \beta x\, dx$$

58. $$\int (\ln x)^\alpha\, dx = x(\ln x)^\alpha - \alpha\int (\ln x)^{\alpha-1}\, dx$$

59. $$\int (a^2 - x^2)^\alpha\, dx = x(a^2 - x^2)^\alpha + 2\alpha \int x^2(a^2 - x^2)^{\alpha-1}\, dx$$

60. $$\int \cos^\alpha x\, dx = \frac{\cos^{\alpha-1} x \operatorname{sen} x}{\alpha} + \frac{\alpha - 1}{\alpha}\int \cos^{\alpha-2} x\, dx$$

61. $$\int \cos^\alpha \beta x\, dx = \frac{\cos^{\alpha-1}\beta x \operatorname{sen} \beta x}{\alpha\beta} + \frac{\alpha-1}{\alpha}\int \cos^{\alpha-2}\beta x\, dx$$

62. Utilice el problema 55 para deducir

$$\int x^4 e^{3x}\, dx = \tfrac{1}{3}x^4e^{3x} - \tfrac{4}{9}x^3e^{3x} + \tfrac{4}{9}x^2e^{3x} - \tfrac{8}{27}xe^{3x} + \tfrac{8}{81}e^{3x} + C$$

63. Utilice los problemas 56 y 57 para deducir

$$\int x^4 \cos 3x\, dx = \tfrac{1}{3}x^4 \operatorname{sen} 3x + \tfrac{4}{9}x^3\cos 3x - \tfrac{4}{9}x^2 \operatorname{sen} 3x - \tfrac{8}{27}x\cos 3x + \tfrac{8}{81}\operatorname{sen} 3x + C.$$

64. Utilice el problema 61 para deducir

$$\int \cos^6 3x\, dx = \tfrac{1}{18}\operatorname{sen} 3x \cos^5 3x + \tfrac{5}{72}\operatorname{sen} 3x \cos^3 3x + \tfrac{5}{48}\operatorname{sen} 3x \cos 3x + \tfrac{5}{16}x + C.$$

≈ **65.** Encuentre el área de la región acotada por la curva $y = \ln x$, el eje x y la recta $x = e$.

≈ **66.** Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región del problema 65 alrededor del eje x.

≈ **67.** Encuentre el área de la región acotada por las curvas $y = 3e^{-x/3}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 9$. Haga un dibujo.

≈ **68.** Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región descrita en el problema 67, alrededor del eje x.

≈ **69.** Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de $y = x \operatorname{sen} x$ y $y = x\cos x$, desde $x = 0$ hasta $x = \pi/4$.

≈ **70.** Encuentre el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región bajo la gráfica de $y = \operatorname{sen}(x/2)$ desde $x = 0$ hasta $x = 2\pi$ alrededor del eje y.

≈ **71.** Encuentre el centroide (véase la sección 5.6) de la región acotada por $y = \ln x^2$ y el eje x desde $x = 1$ hasta $x = e$.

72. Evalúe la integral $\int \cot x \csc^2 x\, dx$ por partes de dos maneras diferentes:

(a) Derivando $\cot x$ (b) Derivando $\csc x$

(c) Demuestre que los dos resultados son equivalentes, salvo por una constante.

73. Si $p(x)$ es un polinomio de grado n y $G_1, G_2, \ldots, G_{n+1}$ son antiderivadas sucesivas de una función g, entonces por medio de repetidas integraciones por partes,

$$\int p(x)g(x)\, dx = p(x)G_1(x) - p'(x)G_2(x) + p''(x)G_3(x) - \cdots + (-1)^n p^{(n)}(x)G_{n+1}(x) + C$$

Utilice este resultado para encontrar cada una de las siguientes integrales:

(a) $\int (x^3 - 2x)e^x\, dx$ (b) $\int (x^2 - 3x + 1)\operatorname{sen} x\, dx$

≈ **74.** La gráfica de $y = x \operatorname{sen} x$ para $x \geq 0$ se bosqueja en la figura 2.

(a) Encuentre una fórmula para el área de n-ésimo arco.

(b) El segundo arco se hace girar alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

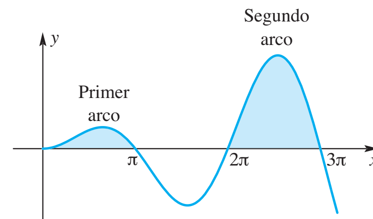


Figura 2

75. La cantidad $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\, dx$ desempeña un papel importante en matemáticas aplicadas. Demuestre que si $f'(x)$ es continua en $[-\pi, \pi]$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Sugerencia:* integración por partes.

76. Sea $G_n = \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$.. Demuestre que $\lim_{n\to\infty}(G_n/n) = 4/e$. *Sugerencia:* considere $\ln(G_n/n)$, identifíquela como una suma de Riemann y utilice el ejemplo 2.

77. Encuentre el error en la siguiente "demostración" de que $0 = 1$. En $\int (1/t)\, dt$, haga $u = 1/t$ y $dv = dt$. Entonces $du = -t^{-2}\, dt$ y $uv = 1$. La integración por partes da

$$\int (1/t)\, dt = 1 - \int (-1/t)\, dt$$

o $0 = 1$.

78. Suponga que quiere evaluar la integral

$$\int e^{5x}(4\cos 7x + 6 \operatorname{sen} 7x)\, dx$$

y por su experiencia sabe que el resultado será de la forma $e^{5x}(C_1 \cos 7x + C_2 \operatorname{sen} 7x) + C_3$. Calcule C_1 y C_2 derivando el resultado y hágala igual al integrando.

Muchos resultados teóricos sorprendentes pueden deducirse mediante el uso de integración por partes. En todos los casos, uno inicia con una integral. Aquí exploramos dos de estos resultados.

79. *Demuestre que*

$$\int_a^b f(x)\, dx = [xf(x)]_a^b - \int_a^b xf'(x)\, dx$$
$$= [(x-a)f(x)]_a^b - \int_a^b (x-a)f'(x)\, dx$$

80. Utilice el problema 79 y reemplace f por f' para demostrar que

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx$$
$$= f'(b)(b-a) - \int_a^b (x-a)f''(x)\, dx$$
$$= f'(a)(b-a) - \int_a^b (x-b)f''(x)\, dx$$

81. Demuestre que

$$f(t) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i + \int_a^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\, dx,$$

siempre que f pueda derivarse $n+1$ veces.

82. La *función beta*, que es importante en muchas ramas de las matemáticas, está definida como

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx,$$

con la condición de que $\alpha \geq 1$ y $\beta \geq 1$.

(a) Por medio de un cambio de variables, demuestre que

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-1}\, dx = B(\beta, \alpha)$$

(b) Integrando por partes demuestre que

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\alpha-1}{\beta} B(\alpha-1, \beta+1) = \frac{\beta-1}{\alpha} B(\alpha+1, \beta-1)$$

(c) Ahora, suponga que $\alpha = n$ y $\alpha = m$ y que n y m son enteros positivos. Utilizando, de manera repetida, el resultado de la parte (b) demuestre que

$$B(n, m) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(n+m-1)!}$$

Este resultado es válido incluso para el caso en donde n y m no son enteros, con tal que podamos dar significado a $(n-1)!$, $(m-1)!$ y $(n+m-1)!$

83. Suponga que $f(t)$ tiene la propiedad de que $f'(a) = f'(b) = 0$ y que $f(t)$ tiene dos derivadas continuas. Utilice integración por partes para demostrar que $\int_a^b f''(t)f(t)\, dt \leq 0$. *Sugerencia:* use integración por partes derivando $f(t)$ e integrando $f''(t)$. Este resultado tiene muchas aplicaciones en el campo de las matemáticas aplicadas y en ecuaciones diferenciales parciales.

84. Deduzca la fórmula

$$\int_0^x \left(\int_0^t f(z)\, dz \right) dt = \int_0^x f(t)(x-t)\, dt$$

utilizando la integración por partes.

85. Generalice la fórmula dada en el problema 84 a uno para una integral iterada n-veces

$$\int_0^x \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n \ldots dt_1 =$$
$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t_1)(x-t_1)^{n-1}\, dt_1$$

86. Si $P_n(x)$ es un polinomio de grado n, demuestre que

$$\int e^x P_n(x)\, dx = e^x \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{d^j P_n(x)}{dx^j}$$

87. Utilice el resultado del problema 86 para evaluar

$$\int (3x^4 + 2x^2)e^x\, dx$$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $uv - \int v\, du$ **2.** x; $\operatorname{sen} x\, dx$ **3.** 1 **4.** reducción

7.3 Algunas integrales trigonométricas

Cuando hemos combinado el método de sustitución con un uso adecuado de identidades trigonométricas, podemos integrar una gran variedad de formas trigonométricas. Consideremos tres tipos encontrados comúnmente.

1. $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ y $\int \cos^n x\, dx$
2. $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$
3. $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx$, $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx$, $\int \cos mx \cos nx\, dx$
4. $\int \tan^n x\, dx$, $\int \cot^n x\, dx$
5. $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$, $\int \cot^m x \csc^n x\, dx$

Identidades útiles
Algunas identidades trigonométricas que se necesitan en esta sección son las siguientes.
Identidades pitagóricas
$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
Identidades del ángulo medio
$\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$
$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

Tipo 1 $\left(\int \operatorname{sen}^n x\,dx,\ \int \cos^n x\,dx\right)$ Primero considere el caso en donde n es un entero positivo. Después factorice el factor sen x o cos x, utilice la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

EJEMPLO 1 **(n impar)** Encuentre $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x\,dx\\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\,dx\\ &= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\operatorname{sen} x\,dx\\ &= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)(-\operatorname{sen} x\,dx)\\ &= -\cos x + \tfrac{2}{3}\cos^3 x - \tfrac{1}{5}\cos^5 x + C\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 **(n par)** Encuentre $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$ y $\int \cos^4 x\,dx$.

SOLUCIÓN Aquí hemos utilizado las identidades del medio ángulo.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x\,dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int (\cos 2x)(2\,dx)\\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x\,dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx\\ &= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx\\ &= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int (\cos 2x)(2)\,dx + \frac{1}{8}\int (1 + \cos 4x)\,dx\\ &= \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x(2\,dx) + \frac{1}{32}\int \cos 4x(4\,dx)\\ &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C\end{aligned}$$

■

Tipo 2 $\left(\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx\right)$ Si m o n son enteros impares positivos y el otro exponente es cualquier número, factorizamos sen x o cos x y utilizamos la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

EJEMPLO 3 **(m o n impares)** Encuentre $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^{-4} x\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^{-4} x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)(\cos^{-4} x)(\operatorname{sen} x)\, dx$$
$$= -\int (\cos^{-4} x - \cos^{-2} x)(-\operatorname{sen} x\, dx)$$
$$= -\left[\frac{(\cos x)^{-3}}{-3} - \frac{(\cos x)^{-1}}{-1}\right] + C$$
$$= \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C \qquad ■$$

Si m y n son enteros positivos pares, utilizamos las identidades para el medio ángulo a fin de reducir el grado del integrando. El ejemplo 4 proporciona una ilustración.

EJEMPLO 4 **(*m* y *n* pares)** Encuentre $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$.

SOLUCIÓN

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$$
$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \left[1 + \cos 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) - (1 - \operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x\right] dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x + \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\right] dx$$
$$= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{2}dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x(4\, dx) + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^2 2x(2\cos 2x\, dx)\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 2x\right] + C \qquad ■$$

¿Son diferentes?

Las integraciones indefinidas pueden llevar a respuestas que parecen diferentes. Por un método

$$\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$$
$$= -\int \cos x(-\operatorname{sen} x)\, dx$$
$$= -\tfrac{1}{2}\cos^2 x + C$$

Por un segundo método

$$\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \int \operatorname{sen} x(\cos x)\, dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$$

Pero las dos respuestas deben diferir por, a lo más, en una constante. Sin embargo, observe que

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C = \tfrac{1}{2}(1 - \cos^2 x) + C$$
$$= -\tfrac{1}{2}\cos^2 x + \left(\tfrac{1}{2} + C\right)$$

Ahora compare estas respuestas con una tercera respuesta.

$$\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\, dx$$
$$= -\tfrac{1}{4}\cos 2x + C$$

Tipo 3 $\left(\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx,\ \int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx,\ \int \cos mx \cos nx\, dx\right)$

Las integrales de este tipo aparecen en muchos problemas de aplicaciones de física e ingeniería. Para manejar estas integrales utilizamos las identidades para la multiplicación.

1. $\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m + n)x + \operatorname{sen}(m - n)x]$
2. $\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = -\frac{1}{2}[\cos(m + n)x - \cos(m - n)x]$
3. $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m + n)x + \cos(m - n)x]$

EJEMPLO 5 Encuentre $\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x\, dx$.

SOLUCIÓN Aplique la identidad 1 para el producto.

$$\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int [\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen}(-x)]\, dx$$
$$= \frac{1}{10}\int \operatorname{sen} 5x(5\, dx) - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\, dx$$
$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

■

EJEMPLO 6 Si m y n son enteros positivos, demuestre que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$$

SOLUCIÓN Aplique la identidad 2 para el producto. Si $m \neq n$, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]\, dx$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\operatorname{sen}(m+n)x - \frac{1}{m-n}\operatorname{sen}(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= 0$$

Si $m = n$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos 2mx - 1]\, dx$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2m}\operatorname{sen} 2mx - x\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= -\frac{1}{2}[-2\pi] = \pi$$

■

EJEMPLO 7 Si m y n son enteros positivos, encuentre

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

SOLUCIÓN Sean $u = \pi x/L$, $du = \pi dx/L$. Si $x = -L$, entonces $u = -\pi$, y si $x = L$, entonces $u = \pi$. Por lo que

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{L}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\, du$$
$$= \begin{cases} \dfrac{L}{\pi}\cdot 0 & \text{si } m \neq n \\ \dfrac{L}{\pi}\cdot \pi & \text{si } m = n \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ L & \text{si } m = n \end{cases}$$

Aquí hemos utilizado el resultado del ejemplo 6. ■

Varias veces en este texto hemos sugerido que debe ver las cosas desde el punto de vista algebraico y desde el punto de vista geométrico. Hasta el momento, esta sección ha sido completamente algebraica, pero con integrales definidas como las de los ejemplos 6 y 7, tenemos la oportunidad de ver cosas geométricamente.

La figura 1 muestra las gráficas de $y = \text{sen}(3x)\text{sen}(2x)$ y $y = \text{sen}(3\pi x/10)\text{sen}(2\pi x/10)$. Las gráficas sugieren que las áreas por arriba y por abajo del eje x son iguales, llevando a $A_{\text{rriba}} - A_{\text{bajo}} = 0$. Los ejemplos 6 y 7 confirman esto.

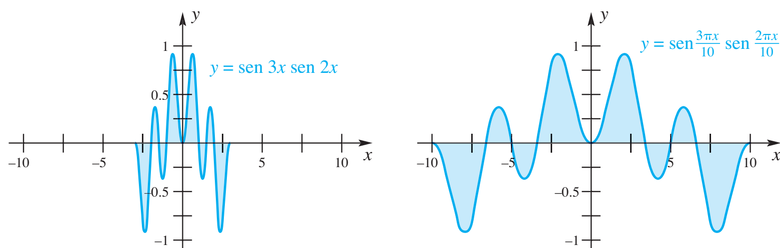


Figura 1

La figura 2 muestra las gráficas de $y = \text{sen}\ 2x\ \text{sen}\ 2x = \text{sen}^2\ 2x$, $-\pi \le x \le \pi$, y $y = \text{sen}(2\pi x/10)\ \text{sen}(2\pi x/10) = \text{sen}^2(2\pi x/10)$, $-10 \le x \le 10$. Estas dos gráficas se ven iguales, salvo que la de la derecha se ha estirado en el sentido horizontal por un factor $10/\pi$, ¿entonces tiene sentido que el área aumentará por este mismo factor? Esto haría que el área sombreada en la figura de la derecha fuese igual a $10/\pi$ veces el área sombreada en la figura de la izquierda; esto es, el área de la derecha debería ser $(10/\pi) \cdot \pi = 10$, lo cual corresponde al resultado del ejemplo 7 con $L = 10$.

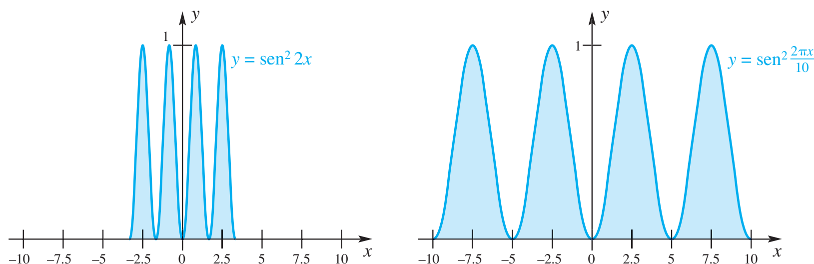


Figura 2

Tipo 4 $\left(\int \tan^n x\,dx,\ \int \cot^n x\,dx\right)$ En el caso de la tangente, utilice $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$; en el caso de cotangente, utilice $\cot^2 x = \csc^2 - 1$.

EJEMPLO 8 Determine $\int \cot^4 x\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int \cot^4 x\,dx &= \int \cot^2 x\,(\csc^2 x - 1)\,dx \\ &= \int \cot^2 x \csc^2 x\,dx - \int \cot^2 x\,dx \\ &= -\int \cot^2 x\,(-\csc^2 x\,dx) - \int (\csc^2 x - 1)\,dx \\ &= -\tfrac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + C\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 9 Determine $\int \tan^5 x\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int \tan^5 x\,dx &= \int \tan^3 x\,(\sec^2 x - 1)\,dx\\ &= \int \tan^3 x \sec^2 x\,dx - \int \tan^3 x\,dx\\ &= \int \tan^3 x\,(\sec^2 x\,dx) - \int \tan x\,(\sec^2 x - 1)\,dx\\ &= \int \tan^3 x\,(\sec^2 x\,dx) - \int \tan x\,(\sec^2 x\,dx) + \int \tan x\,dx\\ &= \tfrac{1}{4}\tan^4 x - \tfrac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C\end{aligned}$$ ■

Tipo 5 $\left(\int \tan^m x \sec^n x\,dx,\ \int \cot^m x \csc^n x\,dx\right)$

EJEMPLO 10 **(n par, m cualquier número)** Determine $\int \tan^{-3/2} x \sec^4 x\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int \tan^{-3/2} x \sec^4 x\,dx &= \int (\tan^{-3/2} x)(1 + \tan^2 x)\sec^2 x\,dx\\ &= \int (\tan^{-3/2} x)\sec^2 x\,dx + \int (\tan^{1/2} x)\sec^2 x\,dx\\ &= -2\tan^{-1/2} x + \tfrac{2}{3}\tan^{3/2} x + C\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 11 **(m impar, n cualquier número)** Determine $\int \tan^3 x \sec^{-1/2} x\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \sec^{-1/2} x\,dx &= \int (\tan^2 x)(\sec^{-3/2} x)(\sec x \tan x)\,dx\\ &= \int (\sec^2 x - 1)\sec^{-3/2} x\,(\sec x \tan x\,dx)\\ &= \int \sec^{1/2} x\,(\sec x \tan x\,dx) - \int \sec^{-3/2} x\,(\sec x \tan x\,dx)\\ &= \tfrac{2}{3}\sec^{3/2} x + 2\sec^{-1/2} x + C\end{aligned}$$ ■

Revisión de conceptos

1. Para calcular $\int \cos^2 x\,dx$, primero la escribimos como _____.

2. Para manejar $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx$, primero la escribimos como _____.

3. Para obtener $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx$, primero la reescribimos como _____.

4. Para resolver $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx$, donde $m \neq n$, utilizamos la identidad trigonométrica _____.

Conjunto de problemas 7.3

En los problemas del 1 al 28 realice las integraciones que se indican.

1. $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$ **2.** $\int \operatorname{sen}^4 6x\, dx$

3. $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$ **4.** $\int \cos^3 x\, dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta\, d\theta$ **6.** $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 \theta\, d\theta$

7. $\int \operatorname{sen}^5 4x \cos^2 4x\, dx$ **8.** $\int (\operatorname{sen}^3 2t)\sqrt{\cos 2t}\, dt$

9. $\int \cos^3 3\theta \operatorname{sen}^{-2} 3\theta\, d\theta$ **10.** $\int \operatorname{sen}^{1/2} 2z \cos^3 2z\, dz$

11. $\int \operatorname{sen}^4 3t \cos^4 3t\, dt$ **12.** $\int \cos^6 \theta \operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta$

13. $\int \operatorname{sen} 4y \cos 5y\, dy$ **14.** $\int \cos y \cos 4y\, dy$

15. $\int \operatorname{sen}^4\left(\frac{w}{2}\right) \cos^2\left(\frac{w}{2}\right) dw$ **16.** $\int \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} t\, dt$

17. $\int x \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx$. *Sugerencia:* utilice integración por partes.

18. $\int x \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx$

19. $\int \tan^4 x\, dx$ **20.** $\int \cot^4 x\, dx$

21. $\int \tan^3 x\, dx$ **22.** $\int \cot^3 2t\, dt$

23. $\int \tan^5\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$ **24.** $\int \cot^5 2t\, dt$

25. $\int \tan^{-3} x \sec^4 x\, dx$ **26.** $\int \tan^{-3/2} x \sec^4 x\, dx$

27. $\int \tan^3 x \sec^2 x\, dx$ **28.** $\int \tan^3 x \sec^{-1/2} x\, dx$

29. Encuentre $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx$, $m \neq n$; m, n enteros.

30. Determine $\int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx$, $m \neq n$, m, n enteros.

≈ **31.** La región acotada por $y = x + \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $x = \pi$ se hace girar alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

≈ **32.** La región acotada por $y = \operatorname{sen}^2(x^2)$; $y = 0$ y $x = \sqrt{\pi/2}$ se hace girar con respecto al eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

33. Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen}(nx)$. Utilice el ejemplo 6 para demostrar cada una de las siguientes proposiciones para un entero positivo m.

(a) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(mx)\, dx = \begin{cases} a_m & \text{si } m \le N \\ 0 & \text{si } m > N \end{cases}$

(b) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \sum_{n=1}^{N} a_n^2$

Nota: las integrales de este tipo aparecen en un tema llamado *series de Fourier*, que tiene aplicación en calor, cuerdas vibrantes y otros fenómenos físicos.

34. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

completando los siguientes pasos.

(a) $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} =$

$$\left[\cos\frac{1}{2^n}x + \cos\frac{3}{2^n}x + \cdots + \cos\frac{2^n - 1}{2^n}x\right]\frac{1}{2^{n-1}}$$

(Véase el problema 46 de la sección 0.7.)

(b) Identifique una suma de Riemann que lleve a una integral definida.

(c) Evalúe esta integral definida.

35. Utilice el resultado del problema 34 para obtener la famosa fórmula de François Viète (1540–1603):

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

36. La región sombreada (véase la figura 3) entre un arco de $y = \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$ y la recta $y = k$, $0 \le k \le 1$, se hace girar alrededor de la recta $y = k$, generando un sólido S. Determine k de modo que S tenga

(a) volumen mínimo y (b) volumen máximo.

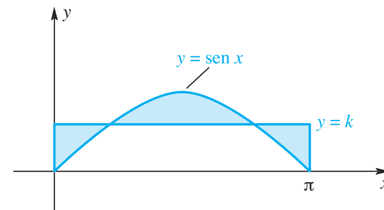


Figura 3

Respuestas a la revisión de conceptos:
1. $\int[(1 + \cos 2x)/2]\, dx$ **2.** $\int(1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\, dx$
3. $\int \operatorname{sen}^2 x(1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\, dx$
4. $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m + n)x + \cos(m - n)x]$

7.4 Sustituciones para racionalizar

Los radicales en un integrando siempre son problemáticos y por lo común tratamos de librarnos de ellos. Con frecuencia, una sustitución apropiada racionalizará el integrando.

Integrandos que incluyen $\sqrt[n]{ax + b}$ Si $\sqrt[n]{ax + b}$ aparece en una integral, la sustitución $u = \sqrt[n]{ax + b}$ eliminará el radical.

EJEMPLO 1 Encuentre $\displaystyle\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$.

SOLUCIÓN Sea $u = \sqrt{x}$, de modo que $u^2 = x$ y $2u\,du = dx$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}} &= \int \frac{2u}{u^2 - u}\,du = 2\int \frac{1}{u - 1}\,du \\ &= 2\ln|u - 1| + C = 2\ln|\sqrt{x} - 1| + C\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 2 Encuentre $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x - 4}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \sqrt[3]{x - 4}$, por lo que $u^3 = x - 4$ y $3u^2du = dx$. Entonces

$$\begin{aligned}\int x\sqrt[3]{x - 4}\,dx &= \int (u^3 + 4)u \cdot (3u^2\,du) = 3\int (u^6 + 4u^3)\,du \\ &= 3\left[\frac{u^7}{7} + u^4\right] + C = \frac{3}{7}(x - 4)^{7/3} + 3(x - 4)^{4/3} + C\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 3 Encuentre $\displaystyle\int x\sqrt[5]{(x + 1)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = (x + 1)^{1/5}$, de modo que $u^5 = x + 1$ y $5u^4\,du = dx$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int x(x + 1)^{2/5}\,dx &= \int (u^5 - 1)u^2 \cdot 5u^4\,du \\ &= 5\int (u^{11} - u^6)\,du = \tfrac{5}{12}u^{12} - \tfrac{5}{7}u^7 + C \\ &= \tfrac{5}{12}(x + 1)^{12/5} - \tfrac{5}{7}(x + 1)^{7/5} + C\end{aligned}$$ ■

Integrandos que incluyen $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ y $\sqrt{x^2 - a^2}$ Para racionalizar estas tres expresiones, podemos suponer que a es positiva y hacer las siguientes sustituciones trigonométricas.

	Radical	Sustitución	Restricción sobre t
1.	$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} t$	$-\pi/2 \le t \le \pi/2$
2.	$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t$	$-\pi/2 < t < \pi/2$
3.	$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec t$	$0 \le t \le \pi, t \ne \pi/2$

Ahora observe las simplificaciones que realizan estas sustituciones.

1. $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{a^2 \cos^2 t} = |a \cos t| = a \cos t$
2. $\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 t} = \sqrt{a^2 \sec^2 t} = |a \sec t| = a \sec t$
3. $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2} = \sqrt{a^2 \tan^2 t} = |a \tan t| = \pm a \tan t$

Las restricciones sobre t nos permitieron eliminar los signos de valor absoluto en los primeros dos casos, pero también realizan algo más. Estas restricciones son exactamente las mismas que introdujimos en la sección 6.7 para hacer que fuesen invertibles seno, tangente y secante. Esto significa que, en cada caso, podemos resolver las ecuaciones de las sustituciones para t y esto nos permitirá escribir nuestras respuestas finales en los ejemplos siguientes en términos de x.

EJEMPLO 4 Encuentre $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

SOLUCIÓN Hacemos la sustitución

$$x = a \operatorname{sen} t, \qquad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Entonces, $dx = a \cos t\, dt$ y $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$. Así,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \int a \cos t \cdot a \cos t\, dt = a^2 \int \cos^2 t\, dt \\ &= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t)\, dt \\ &= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t\right) + C \\ &= \frac{a^2}{2}(t + \operatorname{sen} t \cos t) + C\end{aligned}$$

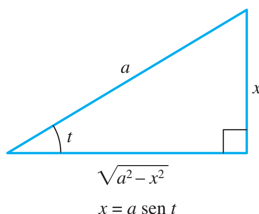


Figura 1

Ahora, $x = a \operatorname{sen} t$ es equivalente a $x/a = \operatorname{sen} t$ y, como t estaba restringida a hacer invertible a la función seno,

$$t = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Utilizando el triángulo rectángulo de la figura 1 (como lo hicimos en la sección 6.8), vemos que

$$\cos t = \cos\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Por lo que

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

■

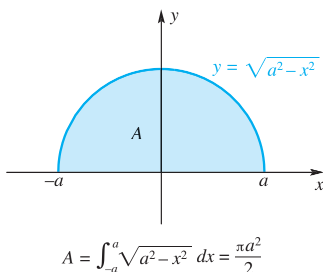


Figura 2

El resultado en el ejemplo 4 nos permite calcular la siguiente integral definida que representa el área de un semicírculo (véase la figura 2). Así, el cálculo confirma un resultado que ya conocíamos.

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left[\frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi a^2}{2}$$

EJEMPLO 5 Encuentre $\int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}}$.

SOLUCIÓN Sea $x = 3 \tan t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$. Entonces $dx = 3 \sec^2 t\, dt$ y $\sqrt{9 + x^2} = 3 \sec t$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}} &= \int \frac{3 \sec^2 t}{3 \sec t}\, dt = \int \sec t\, dt \\ &= \ln|\sec t + \tan t| + C\end{aligned}$$

El último paso, la integración de $\sec t$, fue resuelto en el problema 56 de la sección 7.1. Ahora, $\tan t = x/3$, que sugiere el triángulo en la figura 3, con base en el cual concluimos que $\sec t = \sqrt{9 + x^2}/3$. Así,

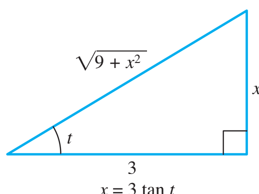


Figura 3

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}} &= \ln\left|\frac{\sqrt{9 + x^2} + x}{3}\right| + C \\ &= \ln\left|\sqrt{9 + x^2} + x\right| - \ln 3 + C \\ &= \ln\left|\sqrt{9 + x^2} + x\right| + K\end{aligned}$$

■

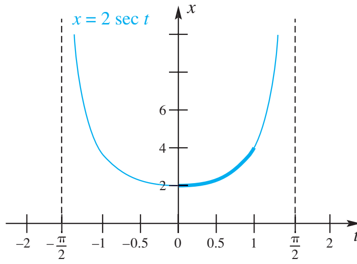


Figura 4

EJEMPLO 6 Calcule $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $x = 2\sec t$, donde $0 \le t < \pi/2$. Observe que es aceptable la restricción de t a este intervalo, ya que x está en el intervalo $2 \le x \le 4$ (véase la figura 4). Eso es importante porque nos permite eliminar el signo de valor absoluto que normalmente aparece cuando simplificamos $\sqrt{x^2 - a^2}$. En nuestro caso,

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{4\sec^2 t - 4} = \sqrt{4\tan^2 t} = 2|\tan t| = 2\tan t$$

Ahora utilizamos el teorema sobre la sustitución en una integral definida (que requiere cambiar los límites de integración) para escribir

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{2\tan t}{2\sec t}\,2\sec t\tan t\,dt \\ &= \int_0^{\pi/3} 2\tan^2 t\,dt = 2\int_0^{\pi/3} (\sec^2 t - 1)\,dt \\ &= 2\Big[\tan t - t\Big]_0^{\pi/3} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} \approx 1.37\end{aligned}$$

■

Completando cuadrados Cuando aparece una expresión cuadrática del tipo $x^2 + Bx + C$ bajo un radial, completar el cuadrado la preparará para una sustitución trigonométrica.

EJEMPLO 7 Encuentre (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+26}}$ y (b) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx$.

SOLUCIÓN

(a) $x^2 + 2x + 26 = x^2 + 2x + 1 + 25 = (x+1)^2 + 25$. Sean $u = x + 1$ y $du = dx$. Entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+26}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+25}}$$

Ahora, sea $u = 5\tan t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$. Entonces $du = 5\sec^2 t\,dt$ y $\sqrt{u^2+25} = \sqrt{25(\tan^2 t + 1)} = 5\sec t$, así que

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+25}} &= \int \frac{5\sec^2 t\,dt}{5\sec t} = \int \sec t\,dt \\ &= \ln|\sec t + \tan t| + C \\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{u^2+25}}{5} + \frac{u}{5}\right| + C \qquad \text{(por la figura 5)} \\ &= \ln\left|\sqrt{u^2+25} + u\right| - \ln 5 + C \\ &= \ln\left|\sqrt{x^2+2x+26} + x + 1\right| + K\end{aligned}$$

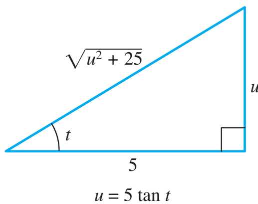


Figura 5

(b) Para calcular la segunda integral escribimos

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx = \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx$$

La primera de las integrales de la derecha se resuelve por medio de la sustitución $u = x^2 + 2x + 26$; la segunda es la que recientemente se hizo. Obtenemos

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx = 2\sqrt{x^2+2x+26} - 2\ln\left|\sqrt{x^2+2x+26} + x + 1\right| + K$$

■

Revisión de conceptos

1. Para resolver $\int x\sqrt{x-3}\,dx$, se hace la sustitución $u =$ _____.

2. Para resolver una integral que incluya $\sqrt{4-x^2}$, se hace la sustitución $x =$ ________.

3. Para resolver una integral que incluya $\sqrt{4+x^2}$, se hace la sustitución $x =$ ________.

4. Para resolver una integral que incluya $\sqrt{x^2-4}$, se hace la sustitución $x =$ ________.

Conjunto de problemas 7.4

En los problemas del 1 al 16 evalúe las integrales que se indican.

1. $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

2. $\int x\sqrt[3]{x+\pi}\,dx$

3. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{3t+4}}$

4. $\int \frac{x^2+3x}{\sqrt{x+4}}\,dx$

5. $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}+e}$

6. $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,dt$

7. $\int t(3t+2)^{3/2}\,dt$

8. $\int x(1-x)^{2/3}\,dx$

9. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$

10. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$

11. $\int \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}}$

12. $\int_2^3 \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}}$

13. $\int_{-2}^{-3} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^3}\,dt$

14. $\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

15. $\int \frac{2z-3}{\sqrt{1-z^2}}\,dz$

16. $\int_0^{\pi} \frac{\pi x-1}{\sqrt{x^2+\pi^2}}\,dx$

En los problemas del 17 al 26 utilice el método de completar el cuadrado, junto con una sustitución trigonométrica, si es necesaria, para evaluar cada integral.

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

19. $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx$

20. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx$

21. $\int \sqrt{5-4x-x^2}\,dx$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{16+6x-x^2}}$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

24. $\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$

25. $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx$

26. $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+18}\,dx$

27. La región acotada por $y = 1/(x^2+2x+5)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$, se hace girar alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

28. La región del problema 27 se hace girar alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

29. Encuentre $\int \frac{x\,dx}{x^2+9}$ por medio de

(a) una sustitución algebraica y

(b) una sustitución trigonométrica. Después compare sus respuestas.

30. Encuentre $\int_0^3 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9+x^2}}$ haciendo las sustituciones

$$u = \sqrt{9+x^2}, \quad u^2 = 9+x^2, \quad 2u\,du = 2x\,dx$$

31. Encuentre $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$ por medio de

(a) la sustitución $u = \sqrt{4-x^2}$ y

(b) una sustitución trigonométrica. Después compare sus resultados. *Sugerencia:* $\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C.$

32. Dos círculos de radio b se intersecan como se muestra en la figura 6 con sus centros $2a$ unidades separados ($0 \le a \le b$). Encuentre el área de la región en que se traslapan.

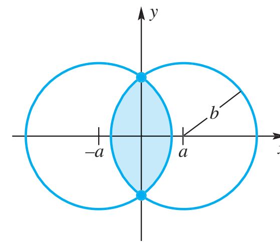


Figura 6

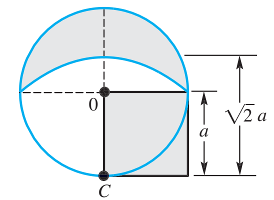


Figura 7

33. Hipócrates de Quios (aproximadamente 430 a. C.) demostró que las dos regiones sombreadas en la figura 7 tienen la misma área (él cuadró la Luna). Obsérvese que C es el centro del arco inferior de la Luna. Demuestre el resultado de Hipócrates.

(a) por medio de cálculo y (b) sin cálculo.

34. Generalice la idea del problema 33 encontrando una fórmula para el área de la región sombreada de la Luna que se muestra en la figura 8.

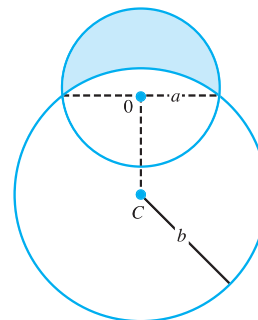


Figura 8

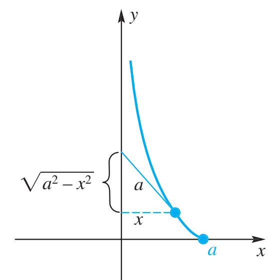


Figura 9

35. Comenzando en $(a, 0)$ se jala un objeto por medio de una cuerda de longitud a, con el extremo que se jala moviéndose a lo largo de la parte positiva del eje y (véase la figura 9). La trayectoria del

objeto es una curva denominada **tractriz** y tiene la propiedad de que la cuerda siempre es tangente a la curva. Establezca una ecuación diferencial para la curva y resuélvala.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\sqrt{x-3}$ **2.** $2 \operatorname{sen} t$ **3.** $2 \tan t$ **4.** $2 \sec t$

7.5 Integración de funciones racionales por medio de fracciones parciales

Una **función racional**, por definición, es el cociente de dos funciones polinómicas. Ejemplos son

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^3}, \qquad g(x) = \frac{2x+2}{x^2-4x+8}, \qquad h(x) = \frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x}$$

De éstas, f y g son **funciones racionales propias**, lo cual quiere decir que el grado del numerador es menor que el del denominador. Una función racional impropia (no propia) siempre puede escribirse como una suma de una función polinomial y una función racional propia. Así, por ejemplo,

$$h(x) = \frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x} = x^2 - 3 + \frac{14x+1}{x^3+5x}$$

un resultado obtenido por medio de división larga (véase la figura 1). Los polinomios son fáciles de integrar, el problema de integrar funciones racionales realmente es la de integrar funciones racionales propias. Pero, ¿siempre podemos integrar funciones racionales propias? En teoría, la respuesta es sí, aunque los detalles prácticos pueden llegar a abrumarnos. Primero considere las integrales de las f y g anteriores.

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 3 \\ \hline x^3+5x & x^5 + 2x^3 - x + 1 \\ & \underline{x^5 + 5x^3} \\ & -3x^3 - x \\ & \underline{-3x^3 - 15x} \\ & 14x + 1 \end{array}$$

Figura 1

EJEMPLO 1 Encuentre $\displaystyle\int \frac{2}{(x+1)^3}\,dx$.

SOLUCIÓN Considere la sustitución $u = x + 1$.

$$\int \frac{2}{(x+1)^3}\,dx = 2\int (x+1)^{-3}\,dx = \frac{2(x+1)^{-2}}{-2} + C$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2} + C$$

■

EJEMPLO 2 Encuentre $\displaystyle\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8}\,dx$.

SOLUCIÓN Primero considere la sustitución $u = x^2 - 4x + 8$ para la cual $du = (2x - 4)\,dx$. Entonces escriba la integral dada como una suma de dos integrales.

$$\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8}\,dx = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx + \int \frac{6}{x^2-4x+8}\,dx$$

$$= \ln|x^2-4x+8| + 6\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$$

En la segunda integral, complete el cuadrado.

$$\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx = \int \frac{1}{x^2-4x+4+4}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+4}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{(x-2)^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$

Concluimos que

$$\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8}\,dx = \ln|x^2-4x+8| + 3\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + K$$

■

Un hecho destacado es que cualquier función racional propia puede escribirse como una suma de funciones racionales propias *simples,* como las que se ilustran en los ejemplos 1 y 2. Debemos ser más precisos.

Descomposición en fracciones parciales (factores lineales) Sumar fracciones es un ejercicio algebraico sencillo: encuentre un común denominador y sume. Por ejemplo,

$$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{2(x+1)+3(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{5x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{5x-1}{x^2-1}$$

El proceso inverso de descomponer una fracción en una suma de fracciones más simples es el que ahora nos interesa. Centramos nuestra atención en el denominador y consideramos casos.

EJEMPLO 3 **Factores lineales simples** Descomponga $(3x-1)/(x^2-x-6)$ y luego encuentre su integral indefinida.

SOLUCIÓN Ya que el denominador se factoriza como $(x+2)(x-3)$, parece razonable esperar una descomposición de la forma siguiente:

(1) $$\frac{3x-1}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}$$

Por supuesto, nuestro trabajo es determinar A y B de modo que (1) sea una identidad, una tarea que encontramos más fácil después de que hemos multiplicado ambos lados por $(x+2)(x-3)$. Obtenemos

(2) $$3x-1=A(x-3)+B(x+2)$$

o de manera equivalente,

(3) $$3x-1=(A+B)x+(-3A+2B)$$

Sin embargo, (3) es una identidad si y sólo si los coeficientes de potencias iguales de x en ambos lados son iguales; esto es,

$$\begin{aligned} A+B&=3\\ -3A+2B&=-1 \end{aligned}$$

Al resolver este par de ecuaciones para A y B, obtenemos $A=\frac{7}{5}$, $B=\frac{8}{5}$. En consecuencia,

$$\frac{3x-1}{x^2-x-6}=\frac{3x-1}{(x+2)(x-3)}=\frac{\frac{7}{5}}{x+2}+\frac{\frac{8}{5}}{x-3}$$

y

$$\begin{aligned}\int\frac{3x-1}{x^2-x-6}\,dx&=\frac{7}{5}\int\frac{1}{x+2}\,dx+\frac{8}{5}\int\frac{1}{x-3}\,dx\\ &=\frac{7}{5}\ln|x+2|+\frac{8}{5}\ln|x-3|+C\end{aligned}$$ ■

Si hubo alguna dificultad en este proceso, fue la determinación de A y B. Encontramos sus valores usando la “fuerza bruta”, pero existe una manera más sencilla. En (2), la cual queremos que sea una identidad (es decir, verdadera para *todos* los valores de x), sustituya los valores convenientes de $x=3$ y $x=-2$, obteniendo

$$\begin{aligned} 8&=A\cdot 0+B\cdot 5\\ -7&=A\cdot(-5)+B\cdot 0 \end{aligned}$$

De inmediato esto da $B=\frac{8}{5}$ y $A=\frac{7}{5}$.

Acabamos de ser testigos de una extraña pero correcta maniobra matemática. La ecuación (1) se vuelve una identidad (cierta para toda x, excepto –2 y 3) si y sólo si la esencialmente equivalente ecuación (2) es cierta en –2 y 3. Pregúntese por qué esto

Resuelva esta ecuación diferencial

“Con frecuencia, hay poco parecido entre una ecuación diferencial y su solución. Quién supondría que una ecuación tan sencilla como

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{a^2-x^2}$$

podría transformarse en

$$y=\frac{1}{2a}\log_e\left(\frac{a+x}{a-x}\right)+C$$

Esto parece la transformación de una crisálida en una mariposa”.

Silvanus P. Thompson

El método de fracciones parciales hace de esto una transformación sencilla. ¿Ve cómo se hizo?

es así. En última instancia, depende del hecho de que dos lados de la ecuación (2), ambos polinomios lineales, son idénticos si tienen los mismos valores en cualesquiera dos puntos.

EJEMPLO 4 **Factores lineales distintos** Encuentre $\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\,dx$.

SOLUCIÓN Ya que el denominador se factoriza como $x(x+1)(x-3)$, escribimos

$$\frac{5x+3}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$

y buscamos determinar A, B y C. La eliminación de las fracciones produce

$$5x+3 = A(x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+1)$$

Al sustituir los valores $x = 0, x = -1$ y $x = 3$ se obtiene

$$3 = A(-3)$$
$$-2 = B(4)$$
$$18 = C(12)$$

o $A = -1$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{3}{2}$. Así,

$$\begin{aligned}\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\,dx &= -\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-3}\,dx \\ &= -\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-3| + C\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 5 **Factores lineales repetidos** Encuentre $\int \frac{x}{(x-3)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Ahora la descomposición toma la forma

$$\frac{x}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

con A y B por determinar. Después de quitar fracciones, obtenemos

$$x = A(x-3) + B$$

Si ahora sustituimos el valor conveniente $x = 3$ y cualquier otro valor, tal como $x = 0$, obtenemos $B = 3$ y $A = 1$. Así,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-3)^2}\,dx &= \int \frac{1}{x-3}\,dx + 3\int \frac{1}{(x-3)^2}\,dx \\ &= \ln|x-3| - \frac{3}{x-3} + C\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 6 **Factores lineales, algunos distintos y otros repetidos** Encuentre

$$\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2}\,dx$$

SOLUCIÓN Descomponemos el integrando de la siguiente manera:

$$\frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Quitando las fracciones esto cambia a

$$3x^2 - 8x + 13 = A(x-1)^2 + B(x+3)(x-1) + C(x+3)$$

Al sustituir $x = 1$, $x = -3$ y $x = 0$ se obtiene $C = 2$, $A = 4$ y $B = -1$. Por lo tanto,

$$\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2}\,dx = 4\int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= 4\ln|x+3| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C \qquad ■$$

Asegúrese de observar la inclusión, en la descomposición anterior, de las dos fracciones $B/(x-1)$ y $C/(x-1)^2$. La regla general para descomponer fracciones con factores lineales repetidos en el denominador es ésta: por cada factor $(ax+b)^k$ en el denominador, existen k términos en la descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

Descomposición en fracciones parciales (factores cuadráticos) Al factorizar el denominador de una fracción, bien podríamos obtener algunos factores cuadráticos (tal como x^2+1), que no pueden factorizarse en factores lineales sin introducir números complejos.

EJEMPLO 7 **Un solo factor cuadrático** Descomponga $\dfrac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)}$ y después encuentre su integral indefinida.

SOLUCIÓN Lo mejor que podemos desear es una descomposición de la forma

$$\frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{4x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Para determinar las constantes A, B y C multiplicamos ambos miembros por $(4x+1)(x^2+1)$ y obtenemos

$$6x^2 - 3x + 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(4x+1)$$

Al sustituir $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$ y $x = 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} \tfrac{6}{16} + \tfrac{3}{4} + 1 &= A\left(\tfrac{17}{16}\right) && \Rightarrow \quad A = 2 \\ 1 &= 2 + C && \Rightarrow \quad C = -1 \\ 4 &= 4 + (B-1)5 && \Rightarrow \quad B = 1 \end{aligned}$$

Así,

$$\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{2}{4x+1}\,dx + \int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{4\,dx}{4x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|4x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tan^{-1}x + C \qquad ■$$

EJEMPLO 8 **Un factor cuadrático repetido** Encuentre $\displaystyle\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN En este caso, la descomposición apropiada es

$$\frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

Después de un considerable trabajo, descubrimos que $A = 1$, $B = -1$, $C = 3$ y $D = -5$ y $E = 0$. Así,

$$\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{x-3}{x^2+2}\,dx - 5\int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{x+3} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx + 3\int \frac{dx}{x^2+2} - \frac{5}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2+2)^2}$$

$$= \ln|x+3| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{3}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{5}{2(x^2+2)} + C$$ ■

Resumen Para descomponer una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ en fracciones parciales, procedemos como sigue:

Paso 1: Si $f(x)$ es impropia, esto es, si $p(x)$ es de un grado mayor o igual al de $q(x)$, divida $p(x)$ entre $q(x)$, para obtener

$$f(x) = \text{un polinomio} + \frac{N(x)}{D(x)}$$

Paso 2: Factorice $D(x)$ en un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales. Por un teorema de álgebra, esto siempre es posible (teóricamente).

Paso 3: Por cada factor de la forma $(ax+b)^k$, se espera que la descomposición tenga los términos

$$\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

Paso 4: Por cada factor de la forma $(ax^2+bx+c)^m$, se espera que la descomposición tenga los términos

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2+bx+c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_mx + C_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

Paso 5: Iguale $N(x)/D(x)$ a la suma de todos los términos determinados en los pasos 3 y 4. El número de constantes por determinarse debe ser igual al grado del denominador, $D(x)$.

Paso 6: Multiplique ambos miembros de la ecuación encontrada en el paso 5 por $D(x)$ y despeje las constantes desconocidas. Esto puede hacerse por dos métodos: (1) Iguale coeficientes de términos del mismo grado, o (2) asigne valores convenientes a la variable x.

Ecuación diferencial logística En el último capítulo vimos que la hipótesis de que la tasa de crecimiento de una población es proporcional a su tamaño, es decir, $y' = ky$, conduce al crecimiento exponencial. Esta hipótesis puede ser realista hasta que los recursos disponibles en el sistema son insuficientes para sostener a la población. En tal caso, suposiciones más razonables son que existe una capacidad máxima, L, que el sistema puede sostener, y que la tasa de crecimiento es proporcional al producto del tamaño de la población y y el "espacio disponible" $L - y$. Estas hipótesis conducen a la ecuación diferencial

$$y' = ky(L - y)$$

Ésta se denomina **ecuación diferencial logística**. Es separable y ahora que hemos estudiado el método de fracciones parciales, podemos realizar la integración necesaria para resolverla.

EJEMPLO 9 Una población crece de acuerdo con la ecuación diferencial logística $y' = 0.0003y(2000 - y)$. El tamaño de la población inicial es de 800. Resuelva esta ecuación diferencial para predecir el tamaño de la población en el instante $t = 2$.

≈ Una cota para la respuesta

El tamaño de la población inicial es de 800 y la tasa de cambio en el tamaño de la población, y', es positiva, así que la población crece. Cuando es cercana a 2000, la tasa de cambio se aproxima a cero, así que cuando $t \to \infty$, tenemos que $y \to 2000$. La población en el instante $t = 2$ debe estar entre 800 y 2000.

SOLUCIÓN Al escribir y' como dy/dt, vemos que la ecuación diferencial puede escribirse como

$$\frac{dy}{dt} = 0.0003y(2000 - y)$$

$$\frac{dy}{y(2000 - y)} = 0.0003\,dt$$

$$\int \frac{dy}{y(2000 - y)} = \int 0.0003\,dt$$

La integral del lado izquierdo puede evaluarse mediante el método de fracciones parciales. Escribimos

$$\frac{1}{y(2000 - y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{2000 - y}$$

que lleva a

$$1 = A(2000 - y) + By$$

Al sustituir $y = 0$ y $y = 2000$ se obtiene

$$1 = 2000A$$

$$1 = 2000B$$

Así, $A = \frac{1}{2000}$ y $B = \frac{1}{2000}$, lleva a

$$\int \left(\frac{1}{2000y} + \frac{1}{2000(2000 - y)} \right) dy = 0.0003t + C$$

$$\frac{1}{2000}\ln y - \frac{1}{2000}\ln(2000 - y) = 0.0003t + C$$

$$\ln \frac{y}{2000 - y} = 0.6t + 2000C$$

$$\frac{y}{2000 - y} = e^{0.6t + 2000C}$$

$$\frac{y}{2000 - y} = C_1 e^{0.6t}$$

Aquí, $C_1 = e^{2000C}$. En este punto podemos utilizar la condición inicial $y(0) = 800$ para determinar C_1.

$$\frac{800}{2000 - 800} = C_1 e^{0.6 \cdot 0}$$

$$C_1 = \frac{800}{1200} = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto,

$$\frac{y}{2000 - y} = \frac{2}{3}e^{0.6t}$$

$$y = \frac{2}{3}(2000 - y)e^{0.6t}$$

$$y + \frac{2}{3}ye^{0.6t} = \frac{4000}{3}e^{0.6t}$$

$$y = \frac{(4000/3)e^{0.6t}}{1 + (2/3)e^{0.6t}} = \frac{4000/3}{2/3 + e^{-0.6t}}$$

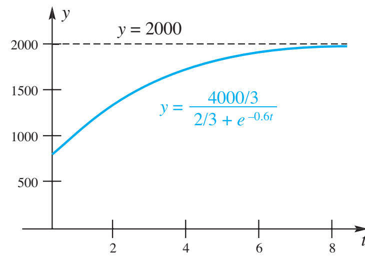


Figura 2

Así que la población en el instante $t = 2$ es

$$y = \frac{4000/3}{2/3 + e^{-0.6 \cdot 2}} \approx 1378$$

En la figura 2 se muestra un bosquejo del tamaño de la población. ■

Revisión de conceptos

1. Si el grado del polinomio $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$, entonces $f(x) = p(x)/q(x)$ se denomina función racional _______.

2. Para integrar la función racional impropia $f(x) = (x^2 + 4)/(x + 1)$, primero la reescribimos como $f(x) =$ _______.

3. Si $(x - 1)(x + 1) + 3x + x^2 = ax^2 + bx + c$, entonces $a =$ ______, $b =$ _______ y $c =$ _______.

4. $(3x + 1)/[(x - 1)^2(x^2 + 1)]$ puede descomponerse en la forma _______.

Conjunto de problemas 7.5

En los problemas del 1 al 40 utilice el método de la descomposición en fracciones parciales para realizar la integración que se pide.

1. $\int \frac{1}{x(x + 1)}\,dx$

2. $\int \frac{2}{x^2 + 3x}\,dx$

3. $\int \frac{3}{x^2 - 1}\,dx$

4. $\int \frac{5x}{2x^3 + 6x^2}\,dx$

5. $\int \frac{x - 11}{x^2 + 3x - 4}\,dx$

6. $\int \frac{x - 7}{x^2 - x - 12}\,dx$

7. $\int \frac{3x - 13}{x^2 + 3x - 10}\,dx$

8. $\int \frac{x + \pi}{x^2 - 3\pi x + 2\pi^2}\,dx$

9. $\int \frac{2x + 21}{2x^2 + 9x - 5}\,dx$

10. $\int \frac{2x^2 - x - 20}{x^2 + x - 6}\,dx$

11. $\int \frac{17x - 3}{3x^2 + x - 2}\,dx$

12. $\int \frac{5 - x}{x^2 - x(\pi + 4) + 4\pi}\,dx$

13. $\int \frac{2x^2 + x - 4}{x^3 - x^2 - 2x}\,dx$

14. $\int \frac{7x^2 + 2x - 3}{(2x - 1)(3x + 2)(x - 3)}\,dx$

15. $\int \frac{6x^2 + 22x - 23}{(2x - 1)(x^2 + x - 6)}\,dx$

16. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{4x^3 - 28x^2 + 56x - 32}\,dx$

17. $\int \frac{x^3}{x^2 + x - 2}\,dx$

18. $\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 5x + 6}\,dx$

19. $\int \frac{x^4 + 8x^2 + 8}{x^3 - 4x}\,dx$

20. $\int \frac{x^6 + 4x^3 + 4}{x^3 - 4x^2}\,dx$

21. $\int \frac{x + 1}{(x - 3)^2}\,dx$

22. $\int \frac{5x + 7}{x^2 + 4x + 4}\,dx$

23. $\int \frac{3x + 2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}\,dx$

24. $\int \frac{x^6}{(x - 2)^2(1 - x)^5}\,dx$

25. $\int \frac{3x^2 - 21x + 32}{x^3 - 8x^2 + 16x}\,dx$

26. $\int \frac{x^2 + 19x + 10}{2x^4 + 5x^3}\,dx$

27. $\int \frac{2x^2 + x - 8}{x^3 + 4x}\,dx$

28. $\int \frac{3x + 2}{x(x + 2)^2 + 16x}\,dx$

29. $\int \frac{2x^2 - 3x - 36}{(2x - 1)(x^2 + 9)}\,dx$

30. $\int \frac{1}{x^4 - 16}\,dx$

31. $\int \frac{1}{(x - 1)^2(x + 4)^2}\,dx$

32. $\int \frac{x^3 - 8x^2 - 1}{(x + 3)(x^2 - 4x + 5)}\,dx$

33. $\int \frac{(\operatorname{sen}^3 t - 8\operatorname{sen}^2 t - 1)\cos t}{(\operatorname{sen} t + 3)(\operatorname{sen}^2 t - 4\operatorname{sen} t + 5)}\,dt$

34. $\int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^4 t - 16}\,dt$

35. $\int \frac{x^3 - 4x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

36. $\int \frac{(\operatorname{sen} t)(4\cos^2 t - 1)}{(\cos t)(1 + 2\cos^2 t + \cos^4 t)}\,dt$

37. $\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 16x}{x^5 + 8x^3 + 16x}\,dx$

38. $\int_4^6 \frac{x - 17}{x^2 + x - 12}\,dx$

39. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos\theta}{(1 - \operatorname{sen}^2\theta)(\operatorname{sen}^2\theta + 1)^2}\,d\theta$

40. $\int_1^5 \frac{3x + 13}{x^2 + 4x + 3}\,dx$

En los problemas del 41 al 44 resuelva la ecuación diferencial logística que representa el crecimiento de la población con la condición inicial dada. Después utilice la solución para predecir el tamaño de la población en el instante $t = 3$.

41. $y' = y(1 - y), y(0) = 0.5$

42. $y' = \frac{1}{10}y(12 - y), y(0) = 2$

43. $y' = 0.0003y\,(8000 - y), y(0) = 1000$

44. $y' = 0.001y\,(4000 - y), y(0) = 100$

45. Resuelva la ecuación logística para una constante arbitraria de proporcionalidad k, capacidad L y condición inicial $y(0) = y_0$.

46. Explique qué le sucede a la solución de la ecuación diferencial logística, si el tamaño de la población inicial es *mayor* que la capacidad máxima.

47. Sin resolver la ecuación logística ni hacer referencia a su solución, explique cómo sabe que si $y_0 < L$, entonces el tamaño de la población está creciendo.

48. Suponiendo que $y_0 < L$, ¿para qué valores de t la gráfica del tamaño de la población $y(t)$ es cóncava hacia arriba?

49. Suponga que la Tierra no puede mantener una población mayor a 16 mil millones de personas y que había 2 mil millones de personas en 1925 y 4 mil millones en 1975. Entonces, si y es la población t años después de 1925, un modelo aproximado es la ecuación diferencial logística

$$\frac{dy}{dt} = ky(16 - y)$$

(a) Resuelva la ecuación diferencial.

(b) Pronostique el tamaño de la población en 2015.

(c) ¿Cuándo la población será de 9 mil millones?

50. Resuelva el problema 49 suponiendo que el límite superior para la población es de 10 mil millones.

51. La ley de acción de masas en química resulta en la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x), \qquad k > 0, \quad a > 0, \quad b > 0$$

en donde x es la cantidad de una sustancia en el instante t como resultado de la reacción de otras dos. Suponga que $x = 0$ cuando $t = 0$.

(a) Resuelva la ecuación diferencial en el caso $b > a$.

(b) Demuestre que $x \to a$ cuando $t \to \infty$ (si $b > a$).

(c) Suponga que $a = 2$ y $b = 4$ y que 1 gramo de sustancia se formó en 20 minutos. ¿Cuánta habrá en 1 hora?

(d) Resuelva la ecuación diferencial si $a = b$.

52. La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = k(y - m)(M - y)$$

con $k > 0$ y $0 \le m < y_0 < M$ se utiliza para modelar algunos problemas de crecimiento. Resuelva la ecuación y encuentre $\lim_{t\to\infty} y$.

53. Como un modelo para la producción de la tripsina, a partir del tripsinógeno en la digestión, los bioquímicos han propuesto el modelo

$$\frac{dy}{dt} = k(A - y)(B + y)$$

donde $k > 0$, A es la cantidad límite de tripsinógeno y B es la cantidad original de tripsina. Resuelva esta ecuación diferencial.

54. Evalúe

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x(\operatorname{sen}^2 x + 1)^2}\,dx$$

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** propia **2.** $x - 1 + \frac{5}{x + 1}$ **3.** 2; 3; −1 **4.** $\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$

7.6 Estrategias de integración

A lo largo de este capítulo hemos presentado varias técnicas para determinar una antiderivada (o integral indefinida) de una función dada. Ahora debe ser claro que mientras la derivación es un proceso directo, la antiderivación no. La regla de la suma, la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena pueden utilizarse para determinar la derivada de casi cualquier función, pero no existe un método infalible para la determinación de antiderivadas. Sólo existe un conjunto de técnicas que uno podría aplicar. Así, en gran medida, la antiderivación es un proceso de prueba y error; cuando un método no funciona, hay que buscar otro. Sin embargo, podemos dar las siguientes estrategias para la determinación de antiderivadas.

1. Buscar una *sustitución* que haga que la integral se vea como una de las fórmulas de integración básicas de la primera sección de este capítulo. Por ejemplo,

$$\int \operatorname{sen} 2x\,dx, \int xe^{-x^2}\,dx, \int x\sqrt{x^2 - 1}\,dx$$

puede evaluarse utilizando sustituciones sencillas.

2. Busque situaciones en donde tenga el producto de dos funciones, y donde la derivada de una de ellas por la antiderivada de la otra sea una de las fórmulas básicas de integración de la sección 7.1. Para estas integrales se puede utilizar la *integración*

por partes. Por ejemplo, $\int xe^x\,dx$ y $\int x \operatorname{senh} x\,dx$ pueden evaluarse utilizando la integración por partes.

3. *Sustituciones trigonométricas*

   Si el integrando tiene $\sqrt{a^2 - x^2}$, considere la sustitución $x = a \operatorname{sen} t$.
   Si el integrando tiene $\sqrt{x^2 + a^2}$, considere la sustitución $x = a \tan t$.
   Si el integrando tiene $\sqrt{x^2 - a^2}$, considere la sustitución $x = a \sec t$.

4. Si el integrando es una función racional propia, es decir, el grado del numerador es menor que el del denominador, entonces descomponga el integrando por medio del método de *fracciones parciales*. Con frecuencia, los términos en la suma resultante pueden integrase de uno en uno. Si el integrando es una función racional impropia, realice la división larga para escribirla como la suma de un polinomio y una función racional propia. Luego aplique el método de fracciones parciales a la función racional propia.

Estas sugerencias, junto con un poco de ingenio, le harán recorrer un gran camino en la evaluación de antiderivadas.

Tablas de integrales Al interior de la contraportada de este libro hay 110 fórmulas de integración (indefinida). Existen tablas grandes, tal como las que se encuentran en *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae* (publicado por CRC Press) y *Handbook of Mathematical Functions* (editado por Abramowitz y Stegun, publicado por Dover), pero la lista de 110 será suficiente para nuestros propósitos. Lo importante que se debe tener en cuenta es que, con frecuencia, usted debe utilizar estas fórmulas junto con el método de sustitución para evaluar una integral indefinida. Por esto, muchas tablas de integrales, incluyendo las del final del libro, utilizan u como la variable de integración, en lugar de x. Debe considerar a u como alguna función de x (puede ser x misma). El ejemplo siguiente muestra cómo una fórmula puede utilizarse para evaluar varias integrales por medio del método de sustitución.

EJEMPLO 1 Utilice la fórmula (54)

$$(54) \quad \int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

para evaluar las siguientes integrales:

(a) $\int \sqrt{9 - x^2}\,dx$ (b) $\int \sqrt{16 - 4y^2}\,dy$

(c) $\int y\sqrt{1 - 4y^4}\,dy$ (d) $\int e^t\sqrt{100 - e^{2t}}\,dt$

SOLUCIÓN

(a) En esta integral tenemos $a = 3$ y $u = x$, por lo que

$$\int \sqrt{9 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{3} + C$$

Para la parte (b) hemos identificado $4y^2$ como $(2y)^2$, así que la sustitución adecuada es $u = 2y$ y $du = 2\,dy$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{16 - 4y^2}\,dy &= \frac{1}{2}\int \sqrt{4^2 - (2y)^2}\,(2\,dy)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2y}{2}\sqrt{4^2 - (2y)^2} + \frac{4^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{2y}{4}\right) + C\\ &= \frac{y}{2}\sqrt{16 - 4y^2} + 4\operatorname{sen}^{-1}\frac{y}{2} + C\end{aligned}$$

La parte (c) requiere un poco más de trabajo. Podría intentarse la sustitución $u = 1 - 4y^4$, pero entonces $du = -16y^3\,dy$. La presencia de y^3 en la expresión du es problemática porque sólo tenemos a y en el resto del integrando. Para esta parte debemos ver el radical como $\sqrt{1-(2y^2)^2}$ haciendo que se pueda aplicar la fórmula (54) con la sustitución $u = 2y^2$ y $du = 4y\,dy$. Así,

$$\begin{aligned}\int y\sqrt{1-4y^4}\,dy &= \frac{1}{4}\int \sqrt{1-(2y^2)^2}\,(4y\,dy)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{2y^2}{2}\sqrt{1-(2y^2)^2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{2y^2}{1}\right) + C\\ &= \frac{y^2}{4}\sqrt{1-4y^4} + \frac{1}{8}\operatorname{sen}^{-1} 2y^2 + C\end{aligned}$$

Tablas y sustitución

En el ejemplo 1 fuimos capaces de evaluar cuatro integrales, aparentemente no relacionadas, por medio de la misma fórmula de la tabla de integrales. Cada una necesitó una sustitución diferente. Cuando utilice una tabla de integrales para ayudarse a evaluar una integral, tenga en cuenta el método de sustitución.

Para la parte (d) debemos identificar que el radical puede escribirse como $\sqrt{100-(e^t)^2}$ y que debemos realizar la sustitución $u = e^t$ y $du = e^t dt$. Así,

$$\begin{aligned}\int e^t\sqrt{100-e^{2t}}\,dt &= \int \sqrt{10^2-(e^t)^2}\,(e^t\,dt)\\ &= \frac{e^t}{2}\sqrt{10^2-(e^t)^2} + \frac{10^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{e^t}{10} + C\\ &= \frac{e^t}{2}\sqrt{100-e^{2t}} + 50\operatorname{sen}^{-1}\frac{e^t}{10} + C\end{aligned}$$

■

Sistemas de álgebra computacional y calculadoras Hoy día, un sistema de álgebra computacional, como *Maple, Mathematica* o *Derive*, puede utilizarse para evaluar integrales indefinidas o definidas. Muchas calculadoras también son capaces de evaluar integrales. Si tales sistemas los utiliza para evaluar *integrales definidas*, es importante distinguir si el sistema le proporciona una respuesta *exacta*, por lo común obtenida con la aplicación del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, o si le da una *aproximación* (utilizando algo similar al método de la parábola de la sección 4.6, aunque quizás un poco más sofisticado). Podría parecer que las dos son igualmente buenas en aplicaciones prácticas, y si tuviéramos que evaluar sólo una integral, esto podría ser correcto. Sin embargo, en muchos casos, el resultado de la integral definida se utilizará en cálculos subsecuentes. En un caso como éste es más preciso, y con frecuencia más sencillo, determinar la respuesta precisa y luego utilizar la respuesta exacta en cálculos posteriores. Por ejemplo, si $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ se necesita en cálculos subsecuentes, sería mejor determinar una antiderivada y utilizar el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo para obtener

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\tan^{-1} x]_0^1 = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}$$

En cálculos posteriores, el uso de $\pi/4$ sería preferible a 0.785398, que es lo que proporciona *Mathematica* como una aproximación numérica a la integral.

Sin embargo, en algunos casos no es posible evaluar una integral definida aplicando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, ya que algunas funciones no tienen antiderivadas que puedan expresarse en términos de funciones elementales. Nuestra falta de habilidad para determinar una fórmula sencilla para una antiderivada no nos absuelve de la tarea de determinar el valor de la integral definida. Significa que debemos utilizar un método numérico para *aproximar* la integral definida. Muchos problemas prácticos conducen a esta situación, en donde la integral necesaria no es tratable y debemos recurrir a un método numérico. Analizamos la integración numérica en la sección 4.6. Por lo común, un CAS utilizará un método similar al de la regla de la parábola, pero con un poco más de sofisticación.

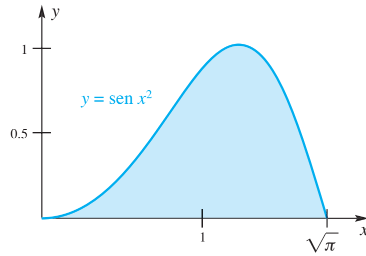


Figura 1

EJEMPLO 2 Determine el centro de masa de la lámina homogénea que se muestra en la figura 1.

SOLUCIÓN Al aplicar la fórmula de la sección 5.6, tenemos

$$m = \delta \int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x^2\, dx$$

$$M_y = \delta \int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen} x^2\, dx$$

$$M_x = \frac{\delta}{2} \int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}^2 x^2\, dx$$

Entre estas integrales, sólo la segunda puede evaluarse por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. Para la primera y la tercera no existen antiderivadas que puedan expresarse en términos de funciones elementales. Por lo tanto, debemos recurrir a una aproximación para las integrales. Un CAS proporciona los siguientes valores para estas integrales

$$m = \delta \int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x^2\, dx \approx 0.89483\, \delta$$

$$M_y = \delta \int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen} x^2\, dx = \delta \left[-\frac{1}{2} \cos x^2 \right]_0^{\sqrt{\pi}} = \delta$$

$$M_x = \frac{\delta}{2} \int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}^2 x^2\, dx \approx 0.33494\, \delta$$

Observe que el CAS fue capaz de proporcionar un valor exacto para la segunda integral y aproximaciones para la primera y la tercera. Con base en estos resultados, podemos calcular

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \approx \frac{\delta}{0.89483\, \delta} \approx 1.1175$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} \approx \frac{0.33494\, \delta}{0.89483\, \delta} \approx 0.3743$$

■

También existen situaciones en donde el límite superior de una integral es desconocido. Si éste es el caso, entonces el uso del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo se prefiere sobre el uso de una aproximación numérica. Los dos ejemplos siguientes ilustran esto. Los dos problemas, en principio son lo mismo, pero los métodos de solución son, por necesidad, diferentes.

EJEMPLO 3 Una varilla tiene densidad igual a $\delta(x) = \exp(-x/4)$ para $x > 0$. ¿En dónde debe cortarse la varilla de modo que la masa desde 0 hasta el corte sea igual a 1?

SOLUCIÓN Sea a el punto de corte. Entonces necesitamos que

$$1 = \int_0^a \delta(x)\, dx = \int_0^a \exp(-x/4)\, dx = 4 - 4e^{-a/4}$$

Al resolver para a se obtiene

$$1 = 4 - 4e^{-a/4}$$

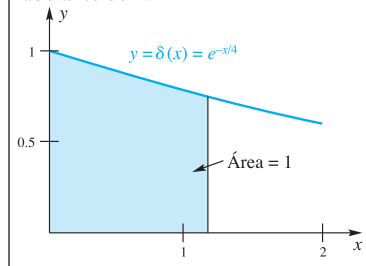
$$4e^{-a/4} = 3$$

$$a = -4 \ln \frac{3}{4} \approx 1.1507$$

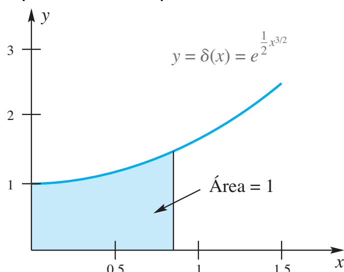
Aquí obtuvimos la respuesta exacta, $a = -4 \ln(3/4)$, que pudimos aproximar como 1.1507, si necesitásemos una aproximación. ■

≈ Una respuesta aproximada

La masa es la integral de la densidad, así que la masa puede considerarse como el área bajo la curva de la densidad. En la posición $x = 0$, la densidad es 1 y disminuye lentamente conforme x aumenta. Para hacer que el área bajo la curva de la densidad sea igual a 1, esperaríamos tener que elegir el punto de corte un poco más adelante de 1.



> **Otra aproximación**
>
> Utilizando el hecho de que la masa es el área bajo la curva de la densidad, con base en la siguiente figura vemos que el corte debe hacerse en algún punto entre 0.5 y 1. Esto nos proporciona un punto de inicio para aproximar la respuesta.



EJEMPLO 4 Una varilla tiene densidad igual a $\delta(x) = \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)$, para $x > 0$. ¿En dónde debe cortarse la varilla para que la masa desde 0 hasta el punto de corte sea igual a uno?

Utilice el método de bisección para aproximar el punto de corte, con una precisión de dos decimales.

SOLUCIÓN Nuevamente, sea a la posición del corte. Entonces necesitamos que

$$1 = \int_0^a \delta(x)\,dx = \int_0^a \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx$$

La antiderivada de $\exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)$ no puede expresarse en términos de funciones elementales, por lo que no podemos utilizar el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo para evaluar la integral definida. Estamos forzados a aproximar la integral por medio de métodos numéricos. El problema es que debemos tener fijos los límites superior e inferior para aproximarla; pero en este caso el límite superior es la variable a. Un poco de ensayo y error, junto con un programa para aproximar integrales definidas, conduce a lo siguiente:

$a = 1$; $\quad \int_0^1 \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx \approx 1.2354 \quad$ $a = 1$ es demasiado grande

$a = 0.5$; $\quad \int_0^{0.5} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx \approx 0.5374 \quad$ $a = 0.5$ es demasiado pequeño

En este momento sabemos que el valor buscado de a está entre 0.5 y 1.0. El punto medio de [0.5, 1.0] es 0.75, por lo que intentamos con 0.75:

$a = 0.75$; $\quad \int_0^{0.75} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx \approx 0.85815 \quad$ $a = 0.75$ es demasiado pequeño

Continuando de esta manera,

$a = 0.875$; $\quad \int_0^{0.875} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx \approx 1.0385 \quad$ $a = 0.875$ es demasiado grande

$a = 0.8125$; $\quad \int_0^{0.8125} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx \approx 0.94643 \quad$ $a = 0.8125$ es demasiado pequeño

$a = 0.84375$; $\quad \int_0^{0.84375} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx \approx 0.99198 \quad$ $a = 0.84375$ es demasiado pequeño

$a = 0.859375$; $\quad \int_0^{0.859375} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx \approx 1.0151 \quad$ $a = 0.859375$ es demasiado grande

$a = 0.8515625$; $\quad \int_0^{0.8515625} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx \approx 1.0035 \quad$ $a = 0.8515625$ es demasiado grande

$a = 0.84765625$; $\quad \int_0^{0.84765625} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right)dx \approx 0.99775 \quad$ $a = 0.84765625$ es demasiado pequeño

En este punto, hemos atrapado a a entre 0.84765625 y 0.8515625, por lo que el punto de corte con dos decimales correctos debe ser $a = 0.85$. ■

EJEMPLO 5 Utilice el método de Newton para aproximar la solución de la ecuación del ejemplo 4.

SOLUCIÓN La ecuación que se resolverá puede escribirse como

$$\int_0^a \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right) dx - 1 = 0$$

Sea $F(a)$ el lado izquierdo de esta ecuación. Entonces pedimos una aproximación para la solución de $F(a) = 0$. Recuerde que el método de Newton es un método iterativo definido mediante

$$a_{n+1} = a_n - \frac{F(a_n)}{F'(a_n)}$$

En este caso, podemos utilizar el Primer Teorema Fundamental del Cálculo para obtener

$$F'(a) = \exp\left(\frac{1}{2}a^{3/2}\right)$$

Iniciamos con $a_1 = 1$, como nuestra aproximación inicial (que, por la solución del ejemplo 3, sabemos que es alta). Entonces

$$a_2 = 1 - \frac{\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right) dx - 1}{\exp\left(\frac{1}{2}1^{3/2}\right)} \approx 0.857197$$

$$a_3 = 0.857197 - \frac{\int_0^{0.857197} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right) dx - 1}{\exp\left(\frac{1}{2}0.857197^{3/2}\right)} \approx 0.849203$$

$$a_4 = 0.849203 - \frac{\int_0^{0.849203} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right) dx - 1}{\exp\left(\frac{1}{2}0.849203^{3/2}\right)} \approx 0.849181$$

$$a_5 = 0.849181 - \frac{\int_0^{0.849181} \exp\left(\frac{1}{2}x^{3/2}\right) dx - 1}{\exp\left(\frac{1}{2}0.849181^{3/2}\right)} \approx 0.849181$$

Nuestra aproximación para el punto de corte es 0.849181. Observe que el método de Newton requirió menos trabajo y proporcionó una respuesta más exacta. ■

Funciones definidas por medio de tablas Ahora es común tener datos recolectados en una computadora a partir de un sistema de puntos periódicos en el tiempo, a menudo muy frecuentemente, tanto como una vez por segundo. Cuando los datos recolectados representan una función que debe integrarse, en realidad no podemos utilizar el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. En lugar de eso, debemos aplicar un método numérico que sólo utilice los puntos muestreados.

EJEMPLO 6 Con frecuencia, a los automóviles se les instalan dispositivos que hacen un seguimiento instantáneo del consumo de gasolina (medido en millas por galón). Suponga que una computadora está conectada al automóvil de modo que recolecta el consumo instantáneo de gasolina así como la velocidad instantánea. En la figura 2 aparece una gráfica que muestra la velocidad (millas por hora) y consumo de gasolina (en millas por galón) para un viaje de 2 horas. La curva superior (negra) muestra la velocidad, mientras que la curva inferior (gris) muestra el consumo de gasolina. El consumo varía mucho, dependiendo principalmente de si el automóvil sube o baja una colina. Parte de la información se muestra en la siguiente tabla. ¿Qué distancia recorrió el automóvil en este viaje de dos horas y cuánto consumió de gasolina?

Tiempo (minutos)	Velocidad (millas/h)	Consumo de gasolina (millas/gal)	Velocidad/consumo de gasolina
0	36	20.00	1.80
1	37	22.35	1.66
2	36	23.67	1.52
3	36	28.75	1.25
⋮	⋮	⋮	⋮
118	42	24.30	1.73
119	40	24.83	1.61
120	41	26.19	1.57

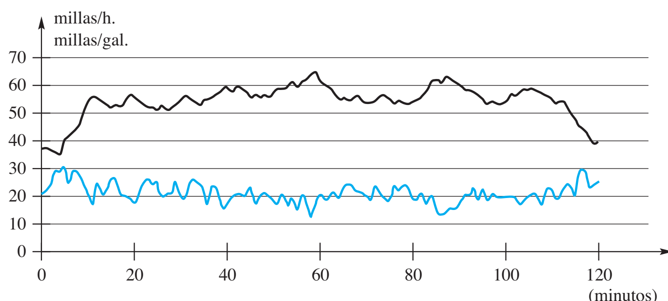


Figura 2

≈ Una aproximación burda

La figura sugiere que el consumo promedio de gasolina es de alrededor de 20 millas por galón y que la velocidad promedio es de aproximadamente 50 millas por hora. Al cabo de 2 horas (120 minutos) el automóvil habría recorrido alrededor de 100 millas, y más o menos a 20 millas por galón, se habrían consumido

$$\frac{100 \text{ millas}}{20 \text{ millas por galón}} = 5 \text{ galones.}$$

Esperamos que nuestra respuesta esté cerca de 5 galones.

SOLUCIÓN Utilizaremos la regla del trapecio para aproximar las integrales. La distancia recorrida es la integral definida de la velocidad instantánea, así que

$$D = \int_0^2 \frac{ds}{dt}dt \approx \frac{2-0}{2\cdot 120}[36 + 2(37 + 36 + \cdots + 40) + 41] = 109.4 \text{ millas}$$

La cantidad total de gasolina consumida es la integral de $\frac{df}{dt}$, donde $f(t)$ es la cantidad de gasolina en el tanque del automóvil en el instante t. Observe que el consumo de gasolina está dado en millas por galón, que es ds/df. La última columna en la tabla anterior es la velocidad ds/dt dividida entre ds/df. Por lo tanto, la gasolina consumida es

$$\int_0^2 \frac{df}{dt}\,dt = \int_0^2 \frac{ds/dt}{ds/df}\,dt$$

$$\approx \frac{2-0}{2\cdot 120}[1.80 + 2(1.66 + 1.52 + \cdots + 1.61) + 1.57]$$

$$\approx 5.30 \text{ galones}$$

■

Funciones especiales Muchas integrales definidas que no pueden evaluarse por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, surgen con tanta frecuencia en matemáticas aplicadas que reciben nombres especiales. A continuación están algunas de estas funciones de acumulación, junto con sus nombres comunes y abreviaturas:

la función error $\quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

la integral del seno $\quad \operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$

la integral seno de Fresnel $\quad S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt$

la integral coseno de Fresnel $\quad C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt$

Existen otras; véase *Handbook of Mathematical Functions* para muchas más. Los algoritmos, que con frecuencia incluyen series infinitas, se han desarrollado para aproximar estas funciones. Por lo común, estos algoritmos son precisos y eficientes. De hecho, no es más difícil (para una computadora) aproximar la integral de Fresnel $S(1)$ que aproximar el seno de 1. Debido a que muchos problemas prácticos llegan a incluir tales funciones, es importante conocer que existen y cómo determinar aproximaciones para ellas.

EJEMPLO 7 Exprese la masa de la lámina del ejemplo 2 en términos de la integral seno de Fresnel.

SOLUCIÓN Se determinó que la masa es

$$m = \delta \int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x^2 \, dx$$

Si hacemos la sustitución $x = t\sqrt{\pi/2}$, entonces $x^2 = t^2 \pi/2$ y $dx = \sqrt{\pi/2}\, dt$. Los límites en la integral definida también deben transformarse

$$x = 0 \Rightarrow t = 0$$
$$x = \sqrt{\pi} \Rightarrow t = \sqrt{2}$$

Por lo tanto,

$$m = \delta \int_0^{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{t^2\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, dt$$
$$= \delta\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$$
$$= \delta\sqrt{\frac{\pi}{2}} S\left(\sqrt{2}\right) \approx 0.895\,\delta$$

■

Revisión de conceptos

1. Las tablas de integrales son muy útiles cuando se utilizan junto con el método de ______.

2. Tanto $\int (x^2 + 9)^{3/2}\, dx$ y $\int (\operatorname{sen}^2 x + 1)^{3/2} \cos x\, dx$ pueden evaluarse mediante la fórmula número ______.

3. Al utilizar un CAS para evaluar una integral definida es importante saber si el sistema nos proporciona una respuesta exacta o un(a) ______.

4. La integral del seno evaluada en $t = 0$ es $S(0) =$ ______.

Conjunto de problemas 7.6

En los problemas del 1 al 12 evalúe la integral dada.

1. $\int xe^{-5x}\, dx$

2. $\int \frac{x}{x^2 + 9}\, dx$

3. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\, dx$

4. $\int \frac{x}{x^2 - 5x + 6}\, dx$

5. $\int \cos^4 2x\, dx$

6. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx$

7. $\int_1^2 \frac{1}{x^2 + 6x + 8}\, dx$

8. $\int_0^{1/2} \frac{1}{1 - t^2}\, dt$

9. $\int_0^5 x\sqrt{x + 2}\, dx$

10. $\int_3^4 \frac{1}{t - \sqrt{2t}}\, dt$

11. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx$

12. $\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} 2x|\, dx$

En los problemas del 13 al 30 utilice la tabla de integrales de la cubierta interior al final del libro, quizá combinada con una sustitución, para evaluar las integrales dadas.

13. (a) $\int x\sqrt{3x + 1}\, dx$ (b) $\int e^x\sqrt{3e^x + 1}\, e^x\, dx$

14. (a) $\int 2t\sqrt{3 - 4t}\, dt$ (b) $\int \cos t\sqrt{3 - 4\cos t} \operatorname{sen} t\, dt$

15. (a) $\int \frac{dx}{9 - 16x^2}$ (b) $\int \frac{e^x}{9 - 16e^{2x}}\, dx$

16. (a) $\int \frac{dx}{5x^2 - 11}$ (b) $\int \frac{x}{5x^4 - 11}\, dx$

17. (a) $\int x^2\sqrt{9 - 2x^2}\, dx$

(b) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\sqrt{9 - 2\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

18. (a) $\int \frac{\sqrt{16 - 3t^2}}{t}\, dt$ (b) $\int \frac{\sqrt{16 - 3t^6}}{t}\, dt$

19. (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 + 3x^2}}$ (b) $\int \frac{x}{\sqrt{5 + 3x^4}}\, dx$

20. (a) $\int t^2\sqrt{3 + 5t^2}\, dt$ (b) $\int t^8\sqrt{3 + 5t^6}\, dt$

21. (a) $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2t - 3}}$ (b) $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 3t - 5}}$

22. (a) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x + 1}\, dx$ (b) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{x - 2}\, dx$

23. (a) $\int \frac{y}{\sqrt{3y + 5}}\, dy$ (b) $\int \frac{\operatorname{sen} t \cos t}{\sqrt{3\operatorname{sen} t + 5}}\, dt$

24. (a) $\int \frac{dz}{z\sqrt{5 - 4z}}$ (b) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x\sqrt{5 - 4\cos x}}\, dx$

25. $\int \operatorname{senh}^2 3t\, dt$

26. $\int \frac{\operatorname{sech}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

27. $\displaystyle\int \frac{\cos t \operatorname{sen} t}{\sqrt{2\cos t + 1}}\, dt$

28. $\displaystyle\int \cos t \operatorname{sen} t \sqrt{4\cos t - 1}\, dt$

29. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 t \operatorname{sen} t}{\sqrt{\cos t + 1}}\, dt$ **30.** $\displaystyle\int \frac{1}{(9 + x^2)^3}\, dx$

Utilice un CAS para evaluar las integrales definidas en los problemas del 31 al 40. Si el CAS no proporciona una respuesta exacta en términos de funciones elementales, proporcione una aproximación numérica.

31. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}\, dx$ **32.** $\displaystyle\int_0^{1} \operatorname{sech} \sqrt[3]{x}\, dx$

33. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{12} x\, dx$ **34.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4 \frac{x}{2}\, dx$

35. $\displaystyle\int_1^{4} \frac{\sqrt{t}}{1 + t^8}\, dt$ **36.** $\displaystyle\int_0^{3} x^4 e^{-x/2}\, dx$

37. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + 2\cos^5 x}\, dx$ **38.** $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^3}{4 + \tan x}\, dx$

39. $\displaystyle\int_2^{3} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}\, dx$ **40.** $\displaystyle\int_1^{3} \frac{du}{u\sqrt{2u - 1}}$

En los problemas del 41 al 48 se da la densidad de una varilla. Determine c de modo que la masa de 0 hasta c sea igual a 1. Siempre que sea posible encuentre una solución exacta. Si no es posible, determine una aproximación para c. (Véanse los ejemplos 4 y 5.)

41. $\delta(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ **42.** $\delta(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

43. $\delta(x) = \ln(x + 1)$ **44.** $\delta(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

45. $\delta(x) = 2e^{-x^{3/2}}$ **46.** $\delta(x) = \ln(x^3 + 1)$

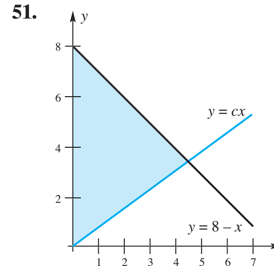
47. $\delta(x) = 6\cos\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$ **48.** $\delta(x) = 4\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

49. Determine c de modo que $\displaystyle\int_0^{c} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} x^{3/2} e^{-x/2}\, dx = 0.90$.

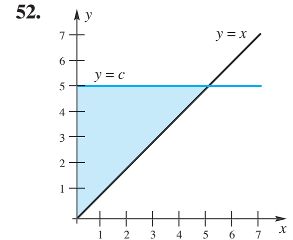
50. Determine c de modo que $\displaystyle\int_{-c}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = 0.95$. *Sugerencia:* use simetría.

En los problemas del 51 al 54 se da la gráfica de $y = f(x)$ junto con la gráfica de una recta. Determine c de modo que el componente x del centro de masa de la lámina homogénea sombreada sea igual a 2.

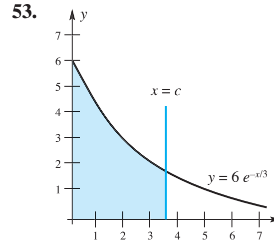
51.



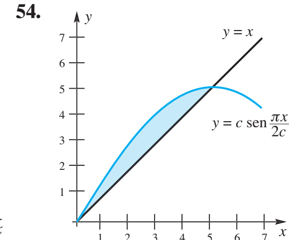
52.



53.



54.



55. Determine las siguientes derivadas.

(a) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{erf}(x)$ (b) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{Si}(x)$

56. Determine las derivadas de las funciones de Fresnel

(a) $\dfrac{d}{dx}S(x)$ (b) $\dfrac{d}{dx}C(x)$

57. ¿En qué intervalos (en el lado no negativo de la recta real) la función error es creciente? ¿Es cóncava hacia arriba?

58. ¿En qué subintervalos de $[0, 2]$ la función de Fresnel $S(x)$ es creciente? ¿Es cóncava hacia arriba?

59. ¿En qué subintervalos de $[0, 2]$, la función de Fresnel $C(x)$ es creciente? ¿Es cóncava hacia arriba?

60. Determine las coordenadas del primer punto de inflexión de la función de Fresnel $S(x)$ que se encuentra a la derecha del origen.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** sustitución **2.** 53 **3.** aproximación **4.** 0

7.7 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

1. Para evaluar $\displaystyle\int x \operatorname{sen}(x^2)\, dx$, se hace la sustitución $u = x^2$.

2. Para evaluar $\displaystyle\int \frac{x}{9 + x^4}\, dx$, se hace la sustitución $u = x^2$.

3. Para evaluar $\displaystyle\int \frac{x^3}{9 + x^4}\, dx$, se hace la sustitución $u = x^2$.

4. Para evaluar $\displaystyle\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 5}\, dx$, se inicia completando el cuadrado del denominador.

5. Para evaluar $\displaystyle\int \frac{3}{x^2 - 3x + 5}\, dx$, se inicia completando el cuadrado del denominador.

6. Para evaluar $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4 - 5x^2}}\, dx$, se hace la sustitución $u = \sqrt{5}x$.

7. Para evaluar $\int \frac{t+2}{t^3-9t}\,dt$, se utilizan fracciones parciales.

8. Para evaluar $\int \frac{t^4}{t^2-1}\,dt$, se utiliza integración por partes.

9. Para evaluar $\int \operatorname{sen}^6 x \cos^2 x\,dx$, se usan fórmulas para el medio ángulo.

10. Para evaluar $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$, se utiliza integración por partes.

11. Para evaluar $\int \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}}\,dx$, se utiliza una sustitución trigonométrica.

12. Para evaluar $\int x^2\sqrt[3]{3-2x}\,dx$, se hace $u=\sqrt[3]{3-2x}$.

13. Para evaluar $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^5 x\,dx$, se reescribe el integrando como $\operatorname{sen}^2 x(1-\operatorname{sen}^2 x)^2\cos x$.

14. Para evaluar $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx$, se hace una sustitución trigonométrica.

15. Para evaluar $\int x^2\ln x\,dx$, se utiliza integración por partes.

16. Para evaluar $\int \operatorname{sen} 2x\cos 4x\,dx$, se utilizan las fórmulas para el medio ángulo.

17. $\frac{x^2}{x^2-1}$ puede expresarse en la forma $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$.

18. $\frac{x^2+2}{x(x^2-1)}$ puede expresarse en la forma

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

19. $\frac{x^2+2}{x(x^2+1)}$ puede expresarse en la forma $\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$.

20. $\frac{x+2}{x^2(x^2-1)}$ puede expresarse en la forma

$$\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

21. Para completar el cuadrado de ax^2+bx se suma $(b/2)^2$.

22. Cualquier polinomio con coeficientes reales puede factorizarse en un producto de polinomios lineales con coeficientes reales.

23. Dos polinomios en x tienen los mismos valores para toda x si y sólo si los coeficientes de términos del mismo grado son idénticos.

24. La integral $\int x^2\sqrt{25-4x^2}\,dx$ puede evaluarse mediante la fórmula 57 de la tabla de integrales, junto con una sustitución adecuada.

25. La integral $\int x\sqrt{25-4x^2}\,dx$ puede evaluarse mediante la fórmula 57 de la tabla de integrales, junto con una sustitución adecuada.

26. $\operatorname{erf}(0) < \operatorname{erf}(1)$

27. Si $C(x)=\int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt$, entonces $C'(x)=\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$.

28. La función integral del seno $\operatorname{Si}(x)=\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ es una función creciente en el intervalo $[0,\infty)$.

Problemas de examen

En los problemas del 1 al 42 evalúe cada integral.

1. $\int_0^4 \frac{t}{\sqrt{9+t^2}}\,dt$

2. $\int \cot^2(2\theta)\,d\theta$

3. $\int_0^{\pi/2} e^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$

4. $\int_0^{\pi/4} x\operatorname{sen} 2x\,dx$

5. $\int \frac{y^3+y}{y+1}\,dy$

6. $\int \operatorname{sen}^3(2t)\,dt$

7. $\int \frac{y-2}{y^2-4y+2}\,dy$

8. $\int_0^{3/2} \frac{dy}{\sqrt{2y+1}}$

9. $\int \frac{e^{2t}}{e^t-2}\,dt$

10. $\int \frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\tan x}\,dx$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{16+4x-2x^2}}$

12. $\int x^2e^x\,dx$

13. $\int \frac{dy}{\sqrt{2+3y^2}}$

14. $\int \frac{w^3}{1-w^2}\,dw$

15. $\int \frac{\tan x}{\ln|\cos x|}\,dx$

16. $\int \frac{3\,dt}{t^3-1}$

17. $\int \operatorname{senh} x\,dx$

18. $\int \frac{(\ln y)^5}{y}\,dy$

19. $\int x\cot^2 x\,dx$

20. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

21. $\int \frac{\ln t^2}{t}\,dt$

22. $\int \ln(y^2+9)\,dy$

23. $\int e^{t/3}\operatorname{sen} 3t\,dt$

24. $\int \frac{t+9}{t^3+9t}\,dt$

25. $\int \operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$

26. $\int \cos^4\left(\frac{x}{2}\right)dx$

27. $\int \tan^3 2x\sec 2x\,dx$

28. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

29. $\int \tan^{3/2} x\sec^4 x\,dx$

30. $\int \frac{dt}{t(t^{1/6}+1)}$

31. $\int \frac{e^{2y}\,dy}{\sqrt{9-e^{2y}}}$

32. $\int \cos^5 x\sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$

33. $\int e^{\ln(3\cos x)}\,dx$

34. $\int \frac{\sqrt{9-y^2}}{y}\,dy$

35. $\int \frac{e^{4x}}{1+e^{8x}}\,dx$

36. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^4}\,dx$

37. $\int \frac{w}{\sqrt{w+5}}\,dw$

38. $\int \frac{\operatorname{sen} t\,dt}{\sqrt{1+\cos t}}$

39. $\int \frac{\operatorname{sen} y\cos y}{9+\cos^4 y}\,dy$

40. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-6x-x^2}}$

41. $\int \frac{4x^2+3x+6}{x^2(x^2+3)}\,dx$

42. $\int \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}$

43. Exprese la descomposición en fracciones parciales de cada función racional sin calcular los coeficientes exactos. Por ejemplo,

$$\frac{3x+1}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

(a) $\dfrac{3-4x^2}{(2x+1)^3}$ (b) $\dfrac{7x-41}{(x-1)^2(2-x)^3}$

(c) $\dfrac{3x+1}{(x^2+x+10)^2}$ (d) $\dfrac{(x+1)^2}{(x^2-x+10)^2(1-x^2)^2}$

(e) $\dfrac{x^5}{(x+3)^4(x^2+2x+10)^2}$ (f) $\dfrac{(3x^2+2x-1)^2}{(2x^2+x+10)^3}$

44. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región bajo la gráfica de

$$y = \frac{1}{\sqrt{3x-x^2}}$$

desde $x = 1$ hasta $x = 2$ alrededor del

(a) eje x; (b) eje y

45. Encuentre la longitud de la curva $y = x^2/16$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

46. La región bajo la curva

$$y = \frac{1}{x^2+5x+6}$$

desde $x = 0$ hasta $x = 3$ se hace girar alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido que se genera.

47. Si la curva dada en el problema 46 se hace girar alrededor del eje y, encuentre el volumen del sólido.

48. Encuentre el volumen del sólido que se crea al hacer girar la región acotada por el eje x y la curva $y = 4x\sqrt{2-x}$ alrededor del eje y.

49. Encuentre el volumen cuando el área creada por el eje x, el eje y, la curva $y = 2(e^x - 1)$ y la curva $x = \ln 3$ se hace girar alrededor de la recta $x = \ln 3$.

50. Encuentre el área de la región acotada por el eje x, la curva $y = 18/\left(x^2\sqrt{x^2+9}\right)$, y las rectas $x = \sqrt{3}$ y $x = 3\sqrt{3}$.

51. Encuentre el área de la región acotada por la curva $s = t/(t-1)^2$, $s = 0$, $t = -6$ y $t = 0$.

≈ **52.** Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región

$$\left\{(x, y): -3 \le x \le -1, \frac{6}{x\sqrt{x+4}} \le y \le 0\right\}$$

alrededor del eje x. Haga un dibujo.

≈ **53.** Encuentre la longitud del segmento de la curva $y = \ln(\text{sen } x)$ desde $x = \pi/6$ hasta $x = \pi/3$.

54. Utilice la tabla de integrales para evaluar las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{81-4x^2}}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int e^x(9-e^{2x})^{3/2}\,dx$

55. Utilice la tabla de integrales para evaluar las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \cos x\sqrt{\text{sen}^2 x + 4}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{1-4x^2}\,dx$

56. Evalúe las primeras dos derivadas de la integral del seno $\text{Si}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\text{sen } t}{t}\,dt$.

57. Una varilla tiene densidad $\delta(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$. Utilice el método de Newton para determinar el valor de c, de modo que la masa de la varilla desde 0 hasta c sea 0.5.

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

Evalúe los límites de los problemas del 1 al 14.

1. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

2. $\lim_{x \to 3} \dfrac{2x + 1}{x + 5}$

3. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

4. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

5. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

6. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{x}$

7. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

8. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x + 1}{x + 5}$

9. $\lim_{x \to \infty} e^{-x}$

10. $\lim_{x \to \infty} e^{-x^2}$

11. $\lim_{x \to \infty} e^{2x}$

12. $\lim_{x \to -\infty} e^{-2x}$

13. $\lim_{x \to \infty} \tan^{-1} x$

14. $\lim_{x \to \infty} \sec^{-1} x$

Trace las funciones dadas en los problemas 15 a 18 en el dominio $0 \leq x \leq 10$ y plantee una conjetura acerca de $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

15. $f(x) = xe^{-x}$

16. $f(x) = x^2 e^{-x}$

17. $f(x) = x^3 e^{-x}$

18. $f(x) = x^4 e^{-x}$

19. Trace una gráfica de $y = x^{10} e^{-x}$ en algún dominio que le permita plantear una conjetura acerca del $\lim_{x \to \infty} x^{10} e^{-x}$.

20. Experimente con varios enteros positivos n y haga una conjetura acerca de $\lim_{x \to \infty} x^n e^{-x}$.

Evalúe las integrales de los problemas del 21 al 28 para los valores de a que se indican.

21. $\displaystyle\int_0^a e^{-x}\, dx$; $a = 1, 2, 4, 8, 16$

22. $\displaystyle\int_0^a xe^{-x^2}\, dx$; $a = 1, 2, 4, 8, 16$

23. $\displaystyle\int_0^a \frac{x}{1 + x^2}\, dx$; $a = 1, 2, 4, 8, 16$

24. $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1 + x}\, dx$; $a = 1, 2, 4, 8, 16$

25. $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x^2}\, dx$; $a = 2, 4, 8, 16$

26. $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x^3}\, dx$; $a = 2, 4, 8, 16$

27. $\displaystyle\int_a^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$; $a = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$

28. $\displaystyle\int_a^4 \frac{1}{x}\, dx$; $a = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$

CAPÍTULO 8 Formas indeterminadas e integrales impropias

8.1 Formas indeterminadas del tipo 0/0

He aquí tres problemas de límites conocidos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}, \qquad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6}, \qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

El primero se trató con amplitud en la sección 1.4 y el tercero, en realidad, define la derivada de $f'(a)$. Los tres límites tienen una característica común. En cada caso está incluido un cociente y, en cada caso, tanto el numerador como el denominador tienen a 0 como su límite. Un intento de aplicar la parte 7 del teorema principal de límites (teorema 1.3A), que dice que el límite de un cociente es igual al cociente de los límites, lleva al resultado sin sentido 0/0. En realidad, el teorema no se aplica, ya que requiere que el límite del denominador sea diferente de 0. No estamos diciendo que estos límites no existan, sólo que el teorema principal de límites no los determinará.

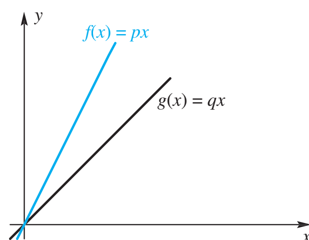
Puede recordar que un intrincado argumento geométrico nos condujo a la conclusión $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x = 1$ (teorema 1.4B). Por otra parte, la técnica algebraica de factorización conduce a

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x+2} = \frac{6}{5}$$

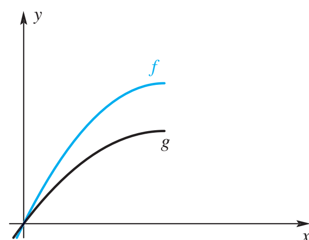
¿No sería bueno tener un procedimiento estándar para manejar todos los problemas para los cuales los límites del numerador y el denominador sean cero? Esto es esperar demasiado. Sin embargo, existe una regla sencilla que funciona de maravilla en una amplia variedad de tales problemas.

Interpretación geométrica de la regla de L'Hôpital

Estudie los siguientes diagramas. Ellos deben hacer que la regla de L'Hôpital parezca muy razonable. (Véanse los problemas del 38 a 42.)



$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{px}{qx} = \frac{p}{q} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$



$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Regla de L'Hôpital En 1696, Guillaume François Antoine de L'Hôpital publicó el primer libro sobre cálculo diferencial; incluía la siguiente regla, que él aprendió de su maestro Johann Bernoulli.

Teorema A Regla de L'Hôpital para formas del tipo 0/0

Suponga que $\lim_{x\to u} f(x) = \lim_{x\to u} g(x) = 0$. Si $\lim_{x\to u}[f'(x)/g'(x)]$ existe en cualquiera de los sentidos finito o infinito (es decir, si este límite es un número finito o $-\infty$ o $+\infty$), entonces

$$\lim_{x\to u}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to u}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Antes de intentar demostrar este teorema, lo ilustramos. Obsérvese que la regla de L'Hôpital nos permite reemplazar un límite por otro, el cual puede ser más sencillo y, en particular, podría tener la forma 0/0.

EJEMPLO 1 Utilice la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

SOLUCIÓN En la sección 1.4 trabajamos duro para demostrar estos dos resultados. Después de haber notado que el intento de evaluar ambos límites por medio de sustitución conduce a la forma 0/0, ahora podemos establecer los resultados deseados en dos líneas (pero véase el problema 25). Por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{D_x \operatorname{sen} x}{D_x x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{D_x(1-\cos x)}{D_x x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{1} = 0$$

■

EJEMPLO 2 Encuentre $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6}$ y $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+3x-10}{x^2-4x+4}$.

SOLUCIÓN Ambos límites tienen la forma 0/0, de modo que por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6} = \lim_{x\to 3}\frac{2x}{2x-1} = \frac{6}{5}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+3x-10}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to 2^+}\frac{2x+3}{2x-4} = \infty$$

El primero de estos límites fue manejado al inicio de este apartado mediante factorización y simplificación. Por supuesto, de cualquier forma obtenemos la misma respuesta. ■

EJEMPLO 3 Encuentre $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\ln(1+x)}$.

SOLUCIÓN El numerador y el denominador tienen límite 0. De aquí que,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 2x}{1/(1+x)} = \frac{2}{1} = 2$$

■

Algunas veces, $\lim f'(x)/g'(x)$ también tiene la forma indeterminada 0/0. Entonces podemos aplicar de nueva cuenta la regla de L'Hôpital, como lo ilustramos ahora. Cada aplicación de la regla de L'Hôpital está señalada con el símbolo Ⓛ.

EJEMPLO 4 Encuentre $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$.

SOLUCIÓN Por medio de la regla de L'Hôpital aplicada tres veces en sucesión

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} \overset{\text{Ⓛ}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}$$

$$\overset{\text{Ⓛ}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{6x}$$

$$\overset{\text{Ⓛ}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}$$

■

Aunque tengamos una regla elegante, no significa que debamos utilizarla de manera indiscriminada. En particular, siempre debemos asegurar que se puede aplicar; es decir, debemos asegurar que el límite tiene la forma indeterminada 0/0. De otra forma, conducirá a toda clase de errores, como lo ilustramos a continuación.

EJEMPLO 5 Encuentre $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + 3x}$.

SOLUCIÓN Podríamos intentar escribir

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + 3x} \overset{\text{L}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x + 3} \overset{\text{L}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{INCORRECTO}$$

La primera aplicación de la regla de L'Hôpital fue correcta; la segunda no, ya que en ese paso, el límite no tenía la forma 0/0. He aquí lo que debía hacerse

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + 3x} \overset{\text{L}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x + 3} = 0 \quad \text{CORRECTO}$$

Detenemos la derivación tan pronto como el numerador o el denominador tengan un límite distinto de cero. ■

Aun si las condiciones de la regla de L'Hôpital se cumplen podrían no ayudarnos; veamos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Encuentre $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{x^{-1}}$.

SOLUCIÓN Ya que el numerador y el denominador tienden a cero, el límite es indeterminado de la forma 0/0. Así, las condiciones del teorema A se satisfacen. Podríamos aplicar la regla de L'Hôpital de manera indefinida.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{x^{-1}} \overset{\text{L}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{x^{-2}} \overset{\text{L}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{2x^{-3}} = \cdots$$

Es claro que sólo estamos complicando el problema. Un mejor enfoque es hacer primero un poco de álgebra

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{x^{-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$$

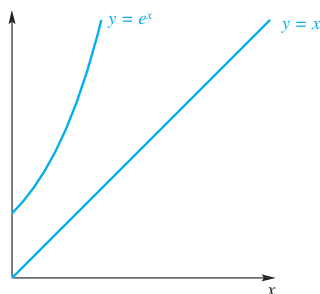


Figura 1

Escrito de esta manera, el límite está indeterminado en la forma ∞/∞, que es el tema de la siguiente sección. Sin embargo, debemos ser capaces de adivinar que el límite es cero considerando que e^x crece mucho más rápido que x (véase la figura 1). Una demostración rigurosa vendrá más adelante (ejemplo 1 de la sección 8.2). ■

Teorema del valor medio de Cauchy La demostración de la regla de L'Hôpital depende de una extensión del teorema del valor medio debida a Augustin Louis Cauchy (1789–1857).

Teorema B **Teorema del valor medio de Cauchy**

Sean f y g funciones derivables en (a, b) y continuas en $[a, b]$. Si $g'(x) \neq 0$ para toda x en (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Observe que este teorema se reduce al ordinario teorema del valor medio para derivadas (teorema 3.6A) cuando $g(x) = x$.

Demostración Es tentador aplicar el teorema del valor medio al numerador y al denominador del lado izquierdo de la conclusión. Si lo hacemos, obtenemos

(1) $$f(b) - f(a) = f'(c_1)(b - a)$$

y

(2) $$g(b) - g(a) = g'(c_2)(b - a)$$

para elecciones apropiadas de c_1 y c_2. Si sólo c_1 y c_2 fuesen iguales, podríamos dividir la primera igualdad entre la segunda y estaría hecho; pero no existe razón para esperar tal coincidencia. Sin embargo, este intento no es un fracaso completo, ya que (2) da la valiosa información de que $g(\mathrm{b}) - g(a) \neq 0$, un hecho que necesitaremos posteriormente (esto se deduce de la hipótesis que $g'(x) \neq 0$ para toda x en (a, b)).

Recuerde que la demostración del teorema del valor medio para derivadas (teorema 3.6A) se sustenta en la introducción de una función auxiliar s. Si tratamos de imitar esa demostración, llegaremos a la siguiente elección para $s(x)$. Sea

$$s(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

No hay división entre cero, ya que antes establecimos que $g(b) - g(a) \neq 0$. Además, observe que $s(a) = 0 = s(b)$. También s es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b); esto se sigue de los correspondientes hechos para f y g. Así, por el teorema del valor medio para derivadas, existe un número c en (a, b) tal que

$$s'(c) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a} = \frac{0 - 0}{b - a} = 0$$

Pero

$$s'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0$$

de modo que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

que es lo que deseábamos demostrar. ■

Demostración de la regla de L'Hôpital

Demostración Regrésese al teorema A, que en realidad establece varios teoremas en uno. Sólo demostraremos el caso en el que L es finito y el límite es el límite unilateral $\lim_{x \to a^+}$.

Las hipótesis para el teorema A implican más de lo que explícitamente dicen. En particular, la existencia de $\lim_{x \to a^+}[f'(x)/g'(x)]$ implica que tanto $f'(x)$ como $g'(x)$ existen en, por lo menos, un pequeño intervalo (a, b] y que allí $g'(x) \neq 0$. En a todavía no sabemos que f y g estén definidas, pero sabemos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a^+} g(x) = 0$. Así, podemos definir (o redefinir, si es necesario) a $f(a)$ y a $g(a)$ como cero y, por lo tanto, hacer a f y a g continuas (por la derecha) en a. Todo esto es para decir que f y g satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio de Cauchy en $[a, b]$. En consecuencia, existe un número c en (a, b) tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

o, como $f(a) = 0 = g(a)$,

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Cuando hacemos $b \to a^+$ y, por lo tanto, forzando a que $c \to a^+$, obtenemos

$$\lim_{b \to a^+} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{c \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

que es equivalente a lo que queríamos demostrar.

Una demostración muy semejante funciona para el caso de los límites por la izquierda y, en consecuencia, para límites por los dos lados. Las demostraciones para los casos en donde a o L es infinito son más difíciles, y los omitiremos. ■

Revisión de conceptos

1. La regla de L'Hôpital es útil para determinar $\lim_{x \to a} [f(x)/g(x)]$, en donde _____ y _____ son cero.

2. La regla de L'Hôpital dice que bajo condiciones apropiadas $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = \lim_{x \to a}$ _____.

3. De la regla de L'Hôpital, podemos concluir que $\lim_{x \to 0} (\tan x)/x = \lim_{x \to 0}$ _____ = _____ pero la regla de L'Hôpital no nos da información acerca de $\lim_{x \to 0} (\cos x)/x$ porque _____.

4. La demostración de la regla de L'Hôpital depende del teorema _____.

Conjunto de problemas 8.1

En los problemas del 1 al 24 encuentre el límite que se indica. Asegúrese de tener una forma indeterminada antes de aplicar la regla de L'Hôpital.

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{2x - \operatorname{sen} x}{x}$

2. $\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos x}{\frac{1}{2}\pi - x}$

3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} 2x}{\tan x}$

4. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan^{-1} 3x}{\operatorname{sen}^{-1} x}$

5. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 3x - 10}$

6. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 3x^2 + x}{x^3 - 2x}$

7. $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 1}$

8. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x^2}{x^2 - 1}$

9. $\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\ln(\operatorname{sen} x)^3}{\frac{1}{2}\pi - x}$

10. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2 \operatorname{sen} x}$

11. $\lim_{t \to 1} \dfrac{\sqrt{t} - t^2}{\ln t}$

12. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{7^{\sqrt{x}} - 1}{2^{\sqrt{x}} - 1}$

13. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos 2x}{7x^2}$

14. $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{3 \operatorname{sen} x}{\sqrt{-x}}$

15. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{\operatorname{sen} 2x - 2x}$

16. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - \tan x}{x^2 \operatorname{sen} x}$

17. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen} x - x}$

18. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - \ln(1 + x) - 1}{x^2}$

19. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan^{-1} x - x}{8x^3}$

20. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{x^2}$

21. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1 - \cos x - x \operatorname{sen} x}{2 - 2\cos x - \operatorname{sen}^2 x}$

22. $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen} x + \tan x}{e^x + e^{-x} - 2}$

23. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x \sqrt{1 + \operatorname{sen} t}\, dt}{x}$

24. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\int_0^x \sqrt{t} \cos t\, dt}{x^2}$

25. En la sección 1.4 trabajamos muy duro para demostrar que $\lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)/x = 1$; la regla de L'Hôpital nos permite demostrar esto en una línea. Sin embargo, aun si tuviésemos la regla de L'Hôpital, digamos al final de la sección 1.3, no nos hubiese ayudado. Explique por qué. (En realidad necesitamos establecer $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ en la forma que lo hicimos en la sección 1.4.)

26. Encuentre $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\tan x}$.

Sugerencia: comience por decidir por qué la regla de L'Hôpital no es aplicable. Después encuentre el límite por otros medios.

27. Para la figura 2, calcule los siguientes límites:

(a) $\lim_{t \to 0^+} \dfrac{\text{área del triángulo } ABC}{\text{área de la región curva } ABC}$

(b) $\lim_{t \to 0^+} \dfrac{\text{área de la región curva } BCD}{\text{área de la región curva } ABC}$

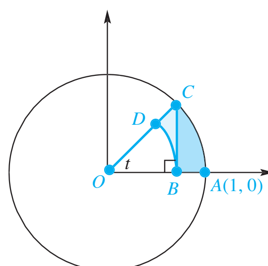


Figura 2

28. En la figura 3, $CD = DE = DF = t$. Encuentre cada límite.

(a) $\lim_{t\to 0^+} y$ (b) $\lim_{t\to 0^+} x$

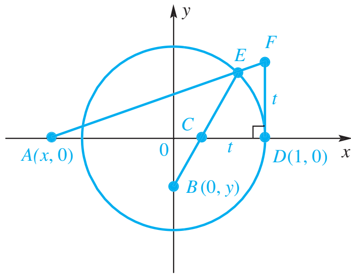


Figura 3

29. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ c, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Qué valor de c hace que $f(x)$ sea continua en $x = 0$?

30. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x - 1}, & \text{si } x \neq 1 \\ c, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

¿Qué valor de c hace que $f(x)$ sea continua en $x = 1$?

31. Mediante los conceptos de la sección 5.4, puede demostrar que el área de la superficie del elipsoide alargado obtenido al hacer girar la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ $(a > b)$, alrededor del eje x es

$$A = 2\pi b^2 + 2\pi ab\left[\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right]$$

¿A dónde se aproxima A cuando $a \to b^+$? Utilice la regla de L'Hôpital para demostrar que esto sucede.

32. Determine constantes a, b y c de tal modo que

$$\lim_{x\to 1} \frac{ax^4 + bx^3 + 1}{(x - 1)\operatorname{sen} \pi x} = c$$

33. La regla de L'Hôpital en su forma de 1696 decía esto: Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = f'(a)/g'(a)$, con tal que $f'(a)$ y $g'(a)$ existan y $g'(a) \neq 0$. Demuestre este resultado sin recurrir al teorema del valor medio de Cauchy.

CAS *Utilice un CAS para evaluar los límites de los problemas 34 al 37.*

34. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4}$

35. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2/2 - x^3/6}{x^4}$

36. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^3 \operatorname{sen} x}$ **37.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{\operatorname{arcsen} x - x}$

GC *Para los problemas del 38 al 41 grafique el numerador $f(x)$ y el denominador $g(x)$ en la misma ventana de graficación para cada uno de estos dominios $-1 \le x \le 1$, $-0.1 \le x \le 0.1$ y $-0.01 \le x \le 0.01$. Con base en la gráfica, estime los valores de $f'(x)$ y $g'(x)$ y utilice éstos para aproximar el límite dado.*

38. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x - \operatorname{sen} x}{x}$ **39.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x/2}{x}$

40. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^{2x} - 1}$ **41.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^{-x} - 1}$

EXPL **42.** Utilice el concepto de **aproximación lineal** a una función (véase la sección 2.9) para explicar la interpretación geométrica de la regla de L'Hôpital en el recuadro al margen próximo al teorema A.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $\lim_{x\to a} f(x)$; $\lim_{x\to a} g(x)$ **2.** $f'(x)/g'(x)$ **3.** $\sec^2 x$; 1; $\lim_{x\to 0} \cos x \neq 0$ **4.** Del valor medio de Cauchy.

8.2 Otras formas indeterminadas

En la solución al ejemplo 6 de la sección anterior nos enfrentamos al siguiente problema de límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$$

Esto es común a una clase de problemas de la forma $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$, en donde el numerador y el denominador crecen indefinidamente; les llamamos forma indeterminada del tipo ∞/∞. Resulta que la regla de L'Hôpital también se aplica en esta situación; esto es,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Una demostración rigurosa es muy difícil, pero existe una manera intuitiva de ver que el resultado tiene que ser cierto. Imagine que $f(t)$ y $g(t)$ representan las posiciones de dos automóviles sobre el eje t en el instante t (véase la figura 1). Estos dos automóviles, f y g, están en una viaje sin fin, con velocidades respectivas $f'(t)$ y $g'(t)$. Ahora, si

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)} = L$$

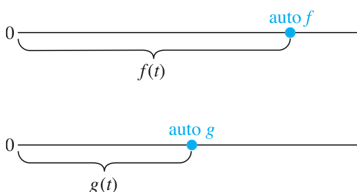


Figura 1

entonces, básicamente el auto f viaja a casi L veces tan rápido como el auto g. Por lo tanto, es razonable decir que, a la larga, viajará casi L veces más lejos; esto es,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{g(t)} = L$$

A esto no le llamamos demostración, pero hace plausible un resultado que ahora establecemos de manera formal.

Teorema A **Regla de L'Hôpital para formas del tipo ∞/∞**

Suponga que $\lim_{x\to u}|f(x)| = \lim_{x\to u}|g(x)| = \infty$. Si $\lim_{x\to u}[f'(x)/g'(x)]$ existe en el sentido finito o infinito, entonces

$$\lim_{x\to u}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to u}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aquí u puede significar cualquiera de los símbolos $a, a^-, a^+, -\infty$ o $+\infty$.

La forma indeterminada ∞/∞ Utilizamos el teorema A para terminar el ejemplo 6 de la sección anterior.

EJEMPLO 1 Encuentre $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$.

SOLUCIÓN Tanto x como e^x tienden a ∞ cuando $x\to\infty$. De aquí que, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{D_x x}{D_x e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$$ ■

He aquí un resultado general del mismo tipo.

EJEMPLO 2 Demuestre que si a es cualquier número real positivo, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^x} = 0$.

SOLUCIÓN Suponga, como un caso especial, que $a = 2.5$. Entonces, tres aplicaciones de la regla de L'Hôpital proporcionan

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2.5}}{e^x} \overset{\text{(L)}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2.5x^{1.5}}{e^x} \overset{\text{(L)}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(2.5)(1.5)x^{0.5}}{e^x} \overset{\text{(L)}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(2.5)(1.5)(0.5)}{x^{0.5}e^x} = 0$$

Un argumento similar funciona para cualquier $a > 0$. Denótese con m al máximo entero menor que a. Entonces, $m + 1$ aplicaciones de la regla de L'Hôpital da

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^x} \overset{\text{(L)}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{ax^{a-1}}{e^x} \overset{\text{(L)}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{a(a-1)x^{a-2}}{e^x} \overset{\text{(L)}}{=} \cdots \overset{\text{(L)}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-m)}{x^{m+1-a}e^x} = 0$$

■

EJEMPLO 3 Demuestre que si a es cualquier número real positivo, $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a} = 0$.

Vea cómo crecen

En ciencias de la computación uno pone cuidadosa atención a la cantidad de tiempo necesaria para realizar una tarea. Por ejemplo, para ordenar x elementos por medio del algoritmo "de la burbuja" toma un tiempo proporcional a x^2, mientras que el algoritmo "rápido" (*quick sort*) $x \ln x$, una gran mejoría. He aquí una tabla que ilustra cómo algunas funciones comunes crecen cuando x aumenta de 10 a 100 a 1000.

$\ln x$	2.3	4.6	6.9
$\sqrt{x}$	3.2	10	31.6
x	10	100	1000
$x \ln x$	23	461	6908
x^2	100	10000	10^6
e^x	2.2×10^4	2.7×10^{43}	10^{434}

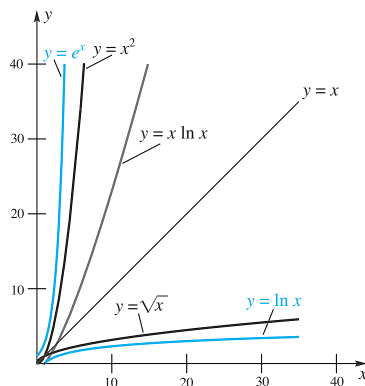


Figura 2

SOLUCIÓN Tanto $\ln x$ como x^a tienden a ∞ cuando $x \to \infty$. De aquí que, por medio de una aplicación de la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^a} \overset{L}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{ax^{a-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{ax^a} = 0$$

■

≈ Los ejemplos 2 y 3 dicen algo que es valioso recordar: *para x suficientemente grande, e^x crece más rápido cuando x aumenta que cualquier potencia constante de x, mientras que $\ln x$ crece más lentamente que cualquier potencia constante de x*. Por ejemplo, cuando x es suficientemente grande, e^x crece más rápido que x^{100} y $\ln x$ crece más lentamente que $\sqrt[100]{x}$. La tabla en el margen y la figura 2 ofrecen ilustración adicional.

EJEMPLO 4 Encuentre $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$.

SOLUCIÓN Cuando $x \to 0^+$, $\ln x \to -\infty$ y $\cot x \to \infty$, de modo que la regla de L'Hôpital se puede aplicar,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} \overset{L}{=} \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1/x}{-\csc^2 x}\right]$$

Esto aún es una indeterminación como aparece, pero en lugar de aplicar otra vez la regla de L'Hôpital (lo cual sólo hace que las cosas empeoren), rescribimos la expresión entre corchetes como

$$\frac{1/x}{-\csc^2 x} = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = -\operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Así,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x \to 0^+} \left[-\operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right] = 0 \cdot 1 = 0$$

■

Las formas indeterminadas $0 \cdot \infty$ y $\infty - \infty$ Supóngase que $A(x) \to 0$, pero $B(x) \to \infty$. ¿Qué ocurre con el producto $A(x)B(x)$? Trabajan dos fuerzas en competencia, tendiendo a jalar el producto en direcciones opuestas. ¿Cuál ganará esta batalla, A o B, o ninguna? Depende de cuál es más fuerte (es decir, cuál hace su trabajo más rápido) o si están niveladas. La regla de L'Hôpital nos ayudará a decidir, pero sólo después de transformar el problema a la forma $0/0$ o ∞/∞.

EJEMPLO 5 Encuentre $\lim_{x \to \pi/2} (\tan x \cdot \ln \operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Ya que $\lim_{x \to \pi/2} \ln \operatorname{sen} x = 0$ y $\lim_{x \to \pi/2} |\tan x| = \infty$, ésta es una forma indeterminada $0 \cdot \infty$. Podemos reescribirla como una forma $0/0$ por medio del artificio simple de cambiar $\tan x$ como $1/\cot x$. Así,

$$\lim_{x \to \pi/2} (\tan x \cdot \ln \operatorname{sen} x) = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\cot x}$$

$$\overset{L}{=} \lim_{x \to \pi/2} \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x}{-\csc^2 x}$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} (-\cos x \cdot \operatorname{sen} x) = 0$$

■

EJEMPLO 6 Encuentre $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

SOLUCIÓN El primer término crece sin cota; lo mismo que el segundo. Decimos que el límite está en una forma indeterminada $\infty - \infty$. La regla de L'Hôpital determinará el resultado, pero sólo después de reescribir el problema de manera que se pueda aplicar la regla. En este caso, las dos fracciones deben combinarse, un procedimiento que cambia el problema a una forma 0/0. Dos aplicaciones de la regla de L'Hôpital dan

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} \overset{L}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{x\cdot 1/x + \ln x - 1}{(x-1)(1/x)+\ln x}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{x\ln x}{x-1+x\ln x} \overset{L}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{1+\ln x}{2+\ln x} = \frac{1}{2}$$

■

Las formas indeterminadas 0^0, ∞^0, 1^∞ Ahora regresemos a tres formas indeterminadas del tipo exponencial. Aquí, el truco es no considerar la expresión original sino su logaritmo. Por lo común, la regla de L'Hôpital se aplicará al logaritmo.

EJEMPLO 7 Encuentre $\lim_{x\to 0^+}(x+1)^{\cot x}$.

SOLUCIÓN Esto adquiere la forma indeterminada 1^∞. Sea $y = (x+1)^{\cot x}$, de modo que

$$\ln y = \cot x \ln(x+1) = \frac{\ln(x+1)}{\tan x}$$

Mediante la regla de L'Hôpital para formas 0/0, obtenemos

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{\tan x} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{\sec^2 x} = 1$$

Ahora $y = e^{\ln y}$, y como la función exponencial $f(x) = e^x$ es continua,

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+}\exp(\ln y) = \exp\left(\lim_{x\to 0^+}\ln y\right) = \exp 1 = e$$ ■

EJEMPLO 8 Encuentre $\lim_{x\to \pi/2^-}(\tan x)^{\cos x}$.

SOLUCIÓN Ésta tiene la forma indeterminada ∞^0. Sea $y = (\tan x)^{\cos x}$, de modo que

$$\ln y = \cos x \cdot \ln \tan x = \frac{\ln \tan x}{\sec x}$$

Entonces

$$\lim_{x\to \pi/2^-}\ln y = \lim_{x\to \pi/2^-}\frac{\ln \tan x}{\sec x} \overset{L}{=} \lim_{x\to \pi/2^-}\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot \sec^2 x}{\sec x \tan x}$$

$$= \lim_{x\to \pi/2^-}\frac{\sec x}{\tan^2 x} = \lim_{x\to \pi/2^-}\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\pi/2^-} y = e^0 = 1$$ ■

Resumen Hemos clasificado ciertos problemas de límites como formas indeterminadas, utilizando siete símbolos $0/0, \infty/\infty, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0$ y 1^∞. Cada uno implica una competencia de fuerzas opuestas, lo cual significa que el resultado no es obvio. Sin embargo, con la ayuda de la regla de L'Hôpital, que sólo se aplica directamente a las formas $0/0$ e ∞/∞, por lo común podemos determinar el límite.

Existen muchas otras posibilidades simbolizadas, por ejemplo, $0/\infty, \infty/0, \infty + \infty, \infty \cdot \infty, 0^\infty$ e ∞^∞. Y a éstas, ¿por qué no denominarlas como formas indeterminadas? Porque en cada caso las fuerzas trabajan juntas, no en competencia.

EJEMPLO 9 Encuentre $\lim_{x\to 0^+}(\text{sen } x)^{\cot x}$.

SOLUCIÓN Podríamos llamar a ésta una forma 0^∞, pero no es indeterminada. Observe que sen x se aproxima a cero y elevada al exponente cot x, un número que está aumentando, sólo sirve para hacer que se aproxime más rápido a cero. Así,

$$\lim_{x\to 0^+}(\text{sen } x)^{\cot x} = 0$$ ■

Revisión de conceptos

1. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces la regla de L'Hôpital dice que $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a}$ ______.

2. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ es una forma indeterminada. Para aplicar la regla de L'Hôpital, podemos reescribir este último límite como ______.

3. Siete formas indeterminadas se estudiaron en este texto. Se simbolizan por medio de $0/0, \infty/\infty, 0 \cdot \infty$ y ______.

4. e^x crece más rápido que cualquier potencia de x, pero ______ crece más lentamente que cualquier potencia de x.

Conjunto de problemas 8.2

En los problemas del 1 al 40 encuentre cada límite. Asegúrese de que tiene una forma indeterminada antes de aplicar la regla de L'Hôpital.

1. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x^{10000}}{x}$

2. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{2^x}$

3. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^{10000}}{e^x}$

4. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x}{\ln(100x + e^x)}$

5. $\lim_{x\to\pi/2} \dfrac{3\sec x + 5}{\tan x}$

6. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \text{sen}^2 x}{3\ln\tan x}$

7. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(\ln x^{1000})}{\ln x}$

8. $\lim_{x\to(1/2)^-} \dfrac{\ln(4 - 8x)^2}{\tan \pi x}$

9. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cot x}{\sqrt{-\ln x}}$

10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\csc^2 x}{\cot^2 x}$

11. $\lim_{x\to 0}(x \ln x^{1000})$

12. $\lim_{x\to 0} 3x^2 \csc^2 x$

13. $\lim_{x\to 0}(\csc^2 x - \cot^2 x)$

14. $\lim_{x\to\pi/2}(\tan x - \sec x)$

15. $\lim_{x\to 0^+}(3x)^{x^2}$

16. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\csc x}$

17. $\lim_{x\to(\pi/2)^-}(5\cos x)^{\tan x}$

18. $\lim_{x\to 0}\left(\csc^2 x - \dfrac{1}{x^2}\right)^2$

19. $\lim_{x\to 0}(x + e^{x/3})^{3/x}$

20. $\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\cos 2x)^{x-\pi/2}$

21. $\lim_{x\to\pi/2}(\text{sen } x)^{\cos x}$

22. $\lim_{x\to\infty} x^x$

23. $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

24. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$

25. $\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{2/x}$

26. $\lim_{x\to -\infty}(e^{-x} - x)$

27. $\lim_{x\to 0^+}(\text{sen } x)^x$

28. $\lim_{x\to 0}(\cos x - \text{sen } x)^{1/x}$

29. $\lim_{x\to 0}\left(\csc x - \dfrac{1}{x}\right)$

30. $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

31. $\lim_{x\to 0^+}(1 + 2e^x)^{1/x}$

32. $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x}{\ln x}\right)$

33. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$

34. $\lim_{x\to 0^+}(x^{1/2}\ln x)$

35. $\lim_{x\to\infty} e^{\cos x}$

36. $\lim_{x\to\infty}[\ln(x + 1) - \ln(x - 1)]$

37. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\ln x}$

38. $\lim_{x\to 0^+}(\ln x \cot x)$

39. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\int_1^x \sqrt{1 + e^{-t}}\,dt}{x}$

40. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\int_1^x \text{sen } t\,dt}{x - 1}$

41. Encuentre cada límite. *Sugerencia:* transforme a problemas que incluyan una variable continua x. Suponga que $a > 0$.

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

(c) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$

(d) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$

42. Encuentre cada límite.

(a) $\lim_{x\to 0^+} x^x$ (b) $\lim_{x\to 0^+} (x^x)^x$

(c) $\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)}$ (d) $\lim_{x\to 0^+} ((x^x)^x)^x$

(e) $\lim_{x\to 0^+} x^{(x^{(x^x)})}$

43. Grafique $y = x^{1/x}$, para $x > 0$. Muestre lo que sucede para x muy pequeña y x muy grande. Indique el valor máximo.

44. Determine cada límite.

(a) $\lim_{x\to 0^+} (1^x + 2^x)^{1/x}$ (b) $\lim_{x\to 0^-} (1^x + 2^x)^{1/x}$

(c) $\lim_{x\to \infty} (1^x + 2^x)^{1/x}$ (d) $\lim_{x\to -\infty} (1^x + 2^x)^{1/x}$

45. Para $k \geq 0$, encuentre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$$

Sugerencia: aunque esto tiene la forma ∞/∞, la regla de L'Hôpital no es de ayuda. Piense en una suma de Riemann.

46. Sean $c_1, c_2, \ldots, c_n$ constantes positivas con $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$, y sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números positivos. Tome logaritmos naturales y después utilice la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{t\to 0^+} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^t \right)^{1/t} = x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdots x_n^{c_n} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{c_i}$$

Aquí $\prod$ significa producto; esto es, $\prod_{i=1}^{n} a_i$ significa $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$. En particular, si a, b, x y y son positivas y $a + b = 1$, entonces

$$\lim_{t\to 0^+} (ax^t + by^t)^{1/t} = x^a y^b$$

47. Verifique la última proposición en el problema 46 calculando cada uno de los siguientes límites.

(a) $\lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{2}2^t + \frac{1}{2}5^t\right)^{1/t}$ (b) $\lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{5}2^t + \frac{4}{5}5^t\right)^{1/t}$

(c) $\lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{10}2^t + \frac{9}{10}5^t\right)^{1/t}$

48. Considere $f(x) = n^2 x e^{-nx}$.

(a) Haga la gráfica de $f(x)$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ en $[0, 1]$ en la misma ventana de graficación.

(b) Para $x > 0$, encuentre $\lim_{n\to\infty} f(x)$.

(c) Evalúe $\int_0^1 f(x)\, dx$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

(d) Haga una conjetura acerca de $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\, dx$. Después justifique su respuesta de manera rigurosa.

CAS **49.** Encuentre los puntos máximo absoluto y mínimo absoluto (si existen) para $f(x) = (x^{25} + x^3 + 2^x)e^{-x}$ en $[0, \infty)$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** $f'(x)/g'(x)$ **2.** $\lim_{x\to a} f(x)/[1/g(x)]$ o $\lim_{x\to a} g(x)/[1/f(x)]$ **3.** $\infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ **4.** $\ln x$

8.3 Integrales impropias: límites de integración infinitos

En la definición de $\int_a^b f(x)\, dx$, se supuso que el intervalo $[a, b]$ era finito. Sin embargo, en muchas aplicaciones de física, economía y probabilidad queremos permitir a a o a b (o a ambas) ser ∞ o $-\infty$. Por lo tanto, debemos encontrar la manera de dar significado a símbolos como

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + x^2}\, dx, \qquad \int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\, dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx$$

Estas integrales se denominan **integrales impropias** con límites infinitos.

Un límite infinito Considere la función $f(x) = xe^{-x}$. Tiene mucho sentido preguntar por $\int_0^1 xe^{-x}\, dx$ o $\int_0^2 xe^{-x}\, dx$, o hasta por $\int_0^b xe^{-x}\, dx$, en donde b es cualquier número positivo. Como lo indica la tabla de la siguiente página, conforme aumenta el límite superior en la integral definida, el valor de la integral (el área bajo la curva) aumenta, pero aparentemente no sin cota (al menos, en este ejemplo). Para darle significado a $\int_0^\infty xe^{-x}\, dx$, empezamos integrando desde 0 hasta un límite superior arbitrario, digamos b, que al utilizar integración por partes da

$$\int_0^b xe^{-x}\, dx = [-xe^{-x}]_0^b - \int_0^b (-e^{-x})\, dx = 1 - e^{-b} - be^{-b}$$

Ahora, imagine que el valor de b avanza hacia infinito. (Véase la siguiente tabla). Como lo muestra el cálculo precedente, si hacemos $b \to \infty$, el valor de la integral definida converge a 1. Por lo tanto, parece natural definir

$$\int_0^\infty xe^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b xe^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} (1 - e^{-b} - be^{-b}) = 1$$

Integral	Figura	Valor exacto	Aproximación numérica
$\int_0^1 xe^{-x}\,dx$		$1 - e^{-1} - 1e^{-1}$	0.2642
$\int_0^2 xe^{-x}\,dx$		$1 - e^{-2} - 2e^{-2}$	0.5940
$\int_0^3 xe^{-x}\,dx$		$1 - e^{-3} - 3e^{-3}$	0.8009
$\int_0^b xe^{-x}\,dx$	Para una b arbitraria	$1 - e^{-b} - be^{-b}$	
$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$	Sea $b \to \infty$	$\lim\limits_{b\to\infty}\left[1 - e^{-b} - be^{-b}\right] = 1$	

He aquí la definición general.

Definición

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Si los límites de la derecha existen y tienen valores finitos, entonces decimos que las correspondientes integrales impropias **convergen** y tienen esos valores. De otra forma, se dice que la integral **diverge**.

EJEMPLO 1 Encuentre, si es posible, $\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\int_a^{-1} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_a^{-1} e^{-x^2}(-2x\,dx) = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_a^{-1}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-a^2}$$

Así,

$$\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-a^2}\right] = -\frac{1}{2e}$$

Decimos que la integral converge y tiene valor $-1/2e$ 

EJEMPLO 2 Encuentre si es posible, $\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x \, dx$.

SOLUCIÓN

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x \, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \operatorname{sen} x \, dx = \lim_{b\to\infty} [-\cos x]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} [1 - \cos b]$$

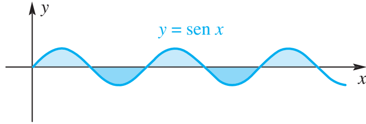


Figura 1

El último límite no existe; concluimos que la integral dada diverge. Considere el significado geométrico de $\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x \, dx$ para apoyar este resultado (véase la figura 1). ■

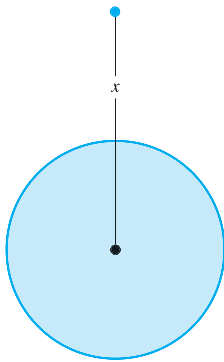


Figura 2

EJEMPLO 3 De acuerdo con la ley del inverso de los cuadrados de Newton, la fuerza que ejerce la Tierra sobre una cápsula espacial es $-k/x^2$, en donde x es la distancia (en millas, por ejemplo) desde la cápsula al centro de la Tierra (véase la figura 2). Por lo tanto, la fuerza $F(x)$ requerida para elevar a la cápsula es $F(x) = k/x^2$. ¿Cuánto trabajo se realiza al impulsar una cápsula de 1000 libras fuera del campo de atracción terrestre?

SOLUCIÓN Podemos evaluar k observando que en $x = 3960$ millas (el radio de la Tierra) $F = 1000$ libras. Ésta da $k = 1000(3960)^2 \approx 1.568 \times 10^{10}$. Por lo tanto, el trabajo realizado en millas-libra es

$$1.568 \times 10^{10} \int_{3960}^{\infty} \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{b\to\infty} 1.568 \times 10^{10} \left[-\frac{1}{x}\right]_{3960}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} 1.568 \times 10^{10} \left[-\frac{1}{b} + \frac{1}{3960}\right]$$

$$= \frac{1.568 \times 10^{10}}{3960} \approx 3.96 \times 10^6$$ ■

Ambos límites infinitos Ahora podemos dar una definición para $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$.

Definición

Si $\int_{-\infty}^{0} f(x) \, dx$ y $\int_0^{\infty} f(x) \, dx$ convergen, entonces se dice que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$ converge y tiene valor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{0} f(x) \, dx + \int_0^{\infty} f(x) \, dx$$

En caso contrario, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$.

EJEMPLO 4 Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} \, dx$ o establezca que diverge.

SOLUCIÓN

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} \, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{1 + x^2} \, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} [\tan^{-1} x]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} [\tan^{-1} b - \tan^{-1} 0] = \frac{\pi}{2}$$

Ya que el integrando es una función par.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \qquad \blacksquare$$

Utilizaremos la notación $[F(x)]_a^{\infty}$ para querer decir $\lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$. Definiciones similares se aplican a $[F(x)]_{-\infty}^{a}$ y a $[F(x)]_{-\infty}^{\infty}$. Observe que en ninguno de estos casos estamos "sustituyendo" infinito. Cada uno está definido como un límite que coincide con nuestro enfoque de determinar las integrales impropias.

Funciones de densidad de probabilidad Cuando introdujimos por primera vez las variables aleatorias y funciones de densidad de probabilidad, en la sección 5.7, tuvimos que restringir la atención a casos en donde el conjunto de resultados posibles era acotado. En muchas situaciones no existe límite superior (o inferior) para el conjunto de resultados posibles. Por ejemplo, no hay cota superior en la durabilidad de una batería, o qué tan fuerte es una mezcla de concreto. Ahora que hemos analizado integrales impropias, podemos prescindir de esta restricción.

Si la FDP $f(x)$ de una variable aleatoria continua X está definida como 0 fuera del conjunto de resultados posibles, entonces los requerimientos para una FDP son

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

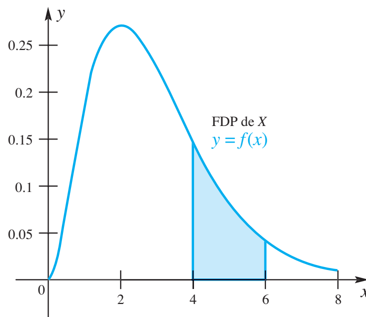


Figura 3

La FDP de una variable aleatoria nos permite encontrar probabilidades por medio de integración; por ejemplo, la figura 3 ilustra la probabilidad de que X esté entre 4 y 6.

Entonces, la media y la varianza de una variable aleatoria están definidas por

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

La varianza σ^2 de una variable aleatoria es una medida de la dispersión, o "dispersidad" de la probabilidad, y puede calcularse así (véase el problema 41 de la sección 5.7)

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Cuando σ^2 es pequeña, la distribución de probabilidad está, para decirlo de manera informal, concentrada muy cerca, alrededor de la media; cuando σ^2 es grande, la probabilidad está más dispersa.

Los dos ejemplos siguientes, y algunos de los ejercicios, introducen varias familias útiles de distribuciones de probabilidad.

EJEMPLO 5 La **distribución exponencial**, que en ocasiones se utiliza para modelar tiempos de vida de componentes eléctricos o mecánicos, tiene FDP

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } 0 \leq x \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde λ es alguna constante positiva.

(a) Muestre que es una FDP válida.
(b) Determine la media μ y la varianza σ^2.
(c) Determine la función de distribución acumulada (FDA) $F(x)$.
(d) Si el tiempo de vida de un componente X, medida en horas, es una variable aleatoria que tiene una distribución exponencial con $\lambda = 0.01$, ¿cuál es la probabilidad de que el componente funcione al menos 20 horas?

SOLUCIÓN

(a) La función f siempre es no negativa y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$
$$= 0 + [-e^{-\lambda x}]_0^{\infty}$$
$$= 1$$

por lo que $f(x)$ es una FDP válida.

(b)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\,dx + \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

Aplicamos integración por partes en la segunda integral: $u = x$, $dv = \lambda e^{-\lambda x}dx$, por lo que $du = dx$, $v = -e^{-\lambda x}$. Así que,

$$E(X) = [-x\lambda e^{-\lambda x}]_0^{\infty} - \int_{0}^{\infty} (-e^{-\lambda x})\,dx$$
$$= (-0 + 0) + \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}$$
$$= \frac{1}{\lambda}$$

La varianza es

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$
$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0\,dx + \int_{0}^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx - \frac{1}{\lambda^2}$$
$$= [-x^2 e^{-\lambda x}]_0^{\infty} - \int_{0}^{\infty} (-e^{-\lambda x})\,2x\,dx - \frac{1}{\lambda^2}$$
$$= (-0 + 0) + 2\int_{0}^{\infty} x e^{-\lambda x}\,dx - \frac{1}{\lambda^2}$$
$$= 2\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

(c) Para $x < 0$, la FDA es $F(x) = P(X \le x) = 0$. Para $x \ge 0$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\,dt$$
$$= 0 + [-e^{-\lambda t}]_0^{x}$$
$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

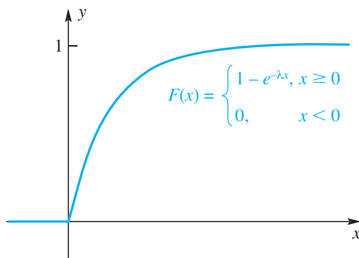


Figura 4

En la figura 4 se muestra un ejemplo de la FDA.

(d) Haga $\lambda = 0.0$. La probabilidad de que el componente funcione al menos 20 horas es la probabilidad de que el tiempo de vida sea de 20 horas o más:

$$\begin{aligned} P(X > 20) &= \int_{20}^{\infty} 0.01e^{-0.01x}\,dx \\ &= [-e^{-0.01x}]_{20}^{\infty} \\ &= 0 - (-e^{-0.01\cdot 20}) \\ &= e^{-0.2} \\ &\approx 0.819 \end{aligned}$$

■

La **distribución normal** es la conocida curva en forma de campana. En realidad es una familia de distribuciones, ya que la media μ puede ser cualquier número y la varianza puede ser cualquier número positivo σ^2. La distribución normal con parámetros μ y σ^2 tiene FDP

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp[-(x - \mu)^2/2\sigma^2]$$

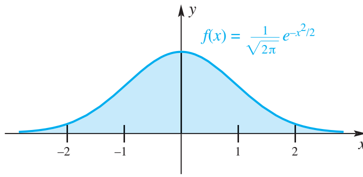


Figura 5

(Los parámetros μ y σ^2 resultan ser la media y la varianza, respectivamente, por lo que se justifica el uso de las letras griegas μ y σ.) La figura 5 muestra una gráfica de la FDP para la distribución normal con media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1$. Es sorprendentemente difícil demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp[-(x - \mu)^2/2\sigma^2]\,dx = 1$$

Otras propiedades de la distribución normal incluyen lo siguiente:

(a) su gráfica es simétrica con respecto a la recta $x = \mu$;

(b) tiene un máximo en $x = \mu$;

(c) tiene puntos de inflexión cuando $x = \mu \pm \sigma$;

(d) la media es μ;

(e) la varianza es σ^2.

El problema 33 incluye algunas otras propiedades de la FDP normal. La distribución normal con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$ se denomina **distribución normal estándar**. Ésta es la distribución normal que se graficó en la figura 5.

EJEMPLO 6 Demuestre que

(a) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx = 0$$

(b) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2/2}\,dx = 1$$

SOLUCIÓN

(a) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{b} e^{-x^2/2}(-x\,dx)\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right]_0^b$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Como $xe^{-x^2/2}$ es una función impar,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2/2}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Así,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2/2}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

(b) Como $e^{-x^2/2}$ es una función par y dado que $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx = 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{2}$$

Entonces, aplicamos integración por partes y la regla de L'Hôpital.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} x^2e^{-x^2/2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{b}(x)(e^{-x^2/2}x)\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[-xe^{-x^2/2}\right]_0^b + \int_0^b e^{-x^2/2}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(0 + \int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx\right) = \frac{1}{2}$$

Como $x^2e^{-x^2/2}$ es una función par, obtenemos una contribución similar a la izquierda del cero, y así

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$ ■

La paradoja de la trompeta de Gabriel Suponga que la curva $y = 1/x$ en $[1, \infty)$ se hace girar alrededor del eje x, con lo que se genera una superficie denominada trompeta de Gabriel (véase la figura 6). Afirmamos que

1. el volumen V de esta trompeta es finito;
2. el área de la superficie A de la trompeta es infinita.

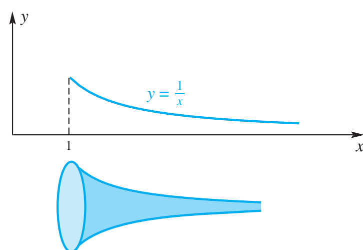


Figura 6

Al poner los resultados en términos prácticos, parecen decir que la trompeta puede llenarse con una cantidad finita de pintura y que, incluso, no hay suficiente pintura para pintar su superficie interna. Antes de que tratemos de esclarecer esta paradoja, establecemos (1) y (2). Utilizamos los resultados para el volumen de la sección 5.2 y para el área de la superficie de la sección 5.4.



Hans Memling (1425/40–1494). El *Juicio final*, detalle del panel derecho: el ángel hace sonar una trompeta y el condenado cae al infierno. Museo Promorskie, Gdansk, Polonia. Scala/Art Resource, N. Y.

$$V = \int_1^\infty \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \lim_{b\to\infty} \pi \int_1^b x^{-2}\, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{\pi}{x}\right]_1^b = \pi$$

$$A = \int_1^\infty 2\pi y\, ds = \int_1^\infty 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1 + \left(\frac{-1}{x^2}\right)^2}\, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} 2\pi \int_1^b \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3}\, dx$$

Ahora,

$$\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} > \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} = \frac{1}{x}$$

Así,

$$\int_1^b \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3}\, dx > \int_1^b \frac{1}{x}\, dx = \ln b$$

y como $\ln b \to \infty$ cuando $b \to \infty$, concluimos que A es infinita.

¿Hay algo erróneo en nuestras matemáticas? No. Imagine que la trompeta se corta por un lado, se abre y se aplana. Dada una cantidad finita de pintura, posiblemente no podríamos pintar esta superficie con una capa de grosor *uniforme*. Sin embargo, podríamos hacerlo si permitimos que la capa de pintura se haga cada vez más delgada conforme nos alejamos del extremo más ancho de la trompeta. Y por supuesto, esto es exactamente lo que sucede cuando llenamos la trompeta sin abrir con π unidades cúbicas de pintura. (Pintura imaginaria puede extenderse a un grosor arbitrario.)

Este problema implica el estudio de dos integrales de la forma $\int_1^\infty 1/x^p\, dx$. Para referencia posterior, ahora analizamos esta integral para todos los valores de p.

Gabriel pavimenta una calle

Cuando se le pidió pavimentar una calle infinita $0 \le x < \infty, 0 \le y \le 1$ con oro puro, Gabriel obedeció pero hizo que el grosor h del oro en x satisficiera

$$h = e^{-x}$$

¿Cuánto oro necesitó?

$$V = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\,[-e^{-x}]_0^b = 1$$

Sólo una unidad cúbica.

EJEMPLO 7 Demuestre que $\int_1^\infty 1/x^p\, dx$ diverge para $p \le 1$ y converge para $p > 1$.

SOLUCIÓN En nuestra solución de la trompeta de Gabriel, demostramos que la integral diverge para $p = 1$. Si $p \neq 1$,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}\, dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}\right]\left[\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right] = \begin{cases} \infty & \text{si } p < 1 \\ \dfrac{1}{p-1} & \text{si } p > 1 \end{cases}$$

La conclusión se sigue. ■

Revisión de conceptos

1. La $\int_a^\infty f(x)\, dx$ se dice que ________, si $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\, dx$ existe y es finito.

2. La $\int_0^\infty \cos x\, dx$ no converge porque ________ no existe.

3. La $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ se dice que diverge si ________ o ________ divergen.

4. La $\int_1^\infty (1/x^p)\, dx$ converge si y sólo si ________.

Conjunto de problemas 8.3

En los problemas del 1 al 24 evalúe cada integral impropia o demuestre que diverge.

1. $\int_{100}^{\infty} e^x\, dx$ **2.** $\int_{-\infty}^{-5} \frac{dx}{x^4}$

3. $\int_{1}^{\infty} 2xe^{-x^2}\, dx$ **4.** $\int_{-\infty}^{1} e^{4x}\, dx$

5. $\int_{9}^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt{1 + x^2}}$ **6.** $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\pi x}}$

7. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{1.00001}}$ **8.** $\int_{10}^{\infty} \frac{x}{1 + x^2}\, dx$

9. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{0.99999}}$ **10.** $\int_{1}^{\infty} \frac{x}{(1 + x^2)^2}\, dx$

11. $\int_{e}^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx$ **12.** $\int_{e}^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx$

13. $\int_{2}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$ **14.** $\int_{1}^{\infty} xe^{-x}\, dx$

15. $\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{(2x - 3)^3}$ **16.** $\int_{4}^{\infty} \frac{dx}{(\pi - x)^{2/3}}$

17. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}\, dx$ **18.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 16)^2}$

19. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 10}\, dx$ **20.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{e^{2|x|}}\, dx$

21. $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} x\, dx$ *Sugerencia:* utilice una tabla de integrales o un CAS.

22. $\int_{1}^{\infty} \operatorname{csch} x\, dx$

23. $\int_{0}^{\infty} e^{-x} \cos x\, dx$ *Sugerencia:* utilice una tabla de integrales o un CAS.

24. $\int_{0}^{\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx$

25. Encuentre el área de la región bajo la curva $y = 2/(4x^2 - 1)$ a la derecha de $x = 1$. *Sugerencia:* utilice fracciones parciales.

26. Encuentre el área de la región bajo la curva $y = 1/(x^2 + x)$ a la derecha de $x = 1$.

27. Suponga que la Ley de Newton para la fuerza debida a la gravedad tuviese la forma $-k/x$ en lugar de $-k/x^2$ (véase el ejemplo 3). Demuestre que entonces sería imposible enviar cualquier cosa fuera del campo de atracción terrestre.

28. Si una cápsula de 1000 libras sólo pesa 165 libras en la Luna (con radio de 1080 millas), ¿cuánto trabajo se hace al impulsar esta cápsula fuera del campo de atracción gravitacional de la Luna? (Véase el ejemplo 3.)

29. Supóngase que una compañía espera que su utilidad anual dentro de t años sea $f(t)$ dólares y que se considera que el interés se compone de manera continua a una tasa anual de r. Entonces el valor presente de todas las utilidades futuras (UF) puede demostrarse que es

$$FP = \int_{0}^{\infty} e^{-rt} f(t)\, dt$$

Encuentre la UF si $r = 0.08$ y $f(t) = 100{,}000$.

30. Resuelva el problema 29 suponiendo que $f(t) = 100{,}000 + 1000t$.

31. Una variable aleatoria continua X tiene una **distribución uniforme** si tiene una función de densidad de probabilidades de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{si } x \le a \text{ o } x \ge b \end{cases}$$

(a) Demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.

(b) Encuentre la media μ y la varianza σ^2 de la distribución uniforme.

(c) Si $a = 0$ y $b = 10$, encuentre la probabilidad de que X sea menor a 2.

32. Una variable aleatoria X tiene una **distribución Weibull** si tiene función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta - 1} e^{-(x/\theta)^{\beta}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

(a) Demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$. (Suponga que $b > 1$).

(b) Si $\theta = 3$ y $\beta = 2$, encuentre la media μ y la varianza σ^2.

(c) Si durabilidad de un monitor de computadora es una variable aleatoria X que tiene distribución Weibull con $\theta = 3$ y $\beta = 2$ (en donde la edad se mide en años) encuentre la probabilidad de que un monitor se descomponga antes de dos años.

33. Haga un bosquejo de la gráfica de la función de densidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

y demuestre, por medio de cálculo, que σ es la distancia desde la media μ hasta la abscisa de uno de los puntos de inflexión.

CAS **34.** La función de densidad de probabilidad Pareto tiene la forma

$$f(x) = \begin{cases} \frac{CM^k}{x^{k+1}} & \text{si } x \ge M, \\ 0 & \text{si } x < M \end{cases}$$

donde k y M son constante positivas.

(a) Determine el valor de C que hace a $f(x)$ una función de densidad de probabilidad.

(b) Para el valor de C que encontró en la parte (a), determine el valor de la media μ. ¿La media es finita para toda k positiva? Si no es así, ¿cómo depende la media de k?

(c) Para el valor de C que encontró en la parte (a), determine la varianza σ^2. ¿Cómo depende la varianza de k?

35. Con frecuencia, la distribución de Pareto es utilizada para modelar distribuciones de ingreso. Suponga que en alguna economía, la distribución del ingreso sigue una distribución de Pareto con $k = 3$. Suponga que el ingreso medio es de $20,000.

(a) Determine M y C.

(b) Determine la varianza σ^2.

(c) Determine la fracción de asalariados que ganan más de $100,000. (*Nota:* es lo mismo que preguntar cuál es la probabilidad de que al elegir de manera aleatoria a una persona ésta tenga un ingreso de más de $100,000).

36. En teoría electromagnética, el potencial magnético u en un punto sobre el eje de una bobina circular está dada por

$$u = Ar\int_a^\infty \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

en donde A, r y a son constantes. Evalúe u.

37. Existe una sutileza en la definición de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ilustrado por medio de lo siguiente. Demuestre que

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x\,dx$ diverge y

(b) $\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \operatorname{sen} x\,dx = 0$.

38. Considere un alambre infinito que coincide con la parte positiva del eje x y que tiene densidad de masa $\delta(x) = (1 + x^2)^{-1}, 0 \le x < \infty$.

(a) Calcule la masa total del alambre.

(b) Demuestre que este alambre no tiene centro de masa.

39. Proporcione un ejemplo de una región en el primer cuadrante que dé un sólido de volumen finito cuando se hace girar alrededor del eje x, pero que dé un sólido de volumen infinito cuando se hace girar alrededor del eje y.

40. Sea f una función continua no negativa en $0 \le x < \infty$ con $\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$. Demuestre que

(a) si $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe debe ser 0;

(b) es posible que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ no exista.

CAS **41.** Podemos utilizar una computadora para aproximar $\int_1^\infty f(x)\,dx$ tomando b muy grande en $\int_1^b f(x)\,dx$ *con tal que* sepamos que la primera integral converge. Calcule $\int_1^{100} (1/x^p)\,dx$ para $p = 2, 1.1, 1.01, 1$ y 0.99. Observe que esto no da idea de que la integral $\int_1^\infty (1/x^p)\,dx$ converge para $p > 1$ y diverge para $p \le 1$.

CAS **42.** Aproxime $\int_0^a \frac{1}{\pi}(1 + x^2)^{-1}\,dx$ para $a = 10, 50$ y 100.

CAS **43.** Aproxime $\int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)\,dx$ para $a = 1, 2, 3$ y 4.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** converge **2.** $\lim_{b\to\infty}\int_0^b \cos x\,dx$ **3.** $\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$; $\int_0^\infty f(x)\,dx$ **4.** $p > 1$

8.4 Integrales impropias: integrandos infinitos

Considerando la gran cantidad de integraciones complicadas que hemos hecho, he aquí una que parece muy sencilla pero que es incorrecta.

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-2}^{1} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \qquad \text{Error}$$

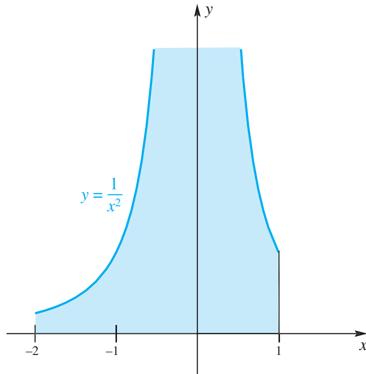


Figura 1

Una mirada a la figura 1 nos dice que algo está muy mal. El valor de la integral (si existe uno) tiene que ser un número positivo. (¿Por qué?)

¿En dónde está nuestro error? Para responder, nos regresamos a la sección 4.2. Recuerde que para que una función sea integrable en el sentido estándar (o propio) debe ser acotada. Nuestra función, $f(x) = 1/x^2$, no está acotada, así que no es integrable en el sentido propio. Decimos que $\int_{-2}^{1} x^{-2}\,dx$ es una integral impropia con un integrando infinito (*integrando no acotado* es un término más preciso aunque menos interesante).

Hasta ahora, hemos evitado con cuidado integrandos infinitos en todos nuestros ejemplos y problemas. Podríamos continuar haciendo esto, pero sería evitar una clase de integrales que tienen aplicaciones importantes. Nuestra tarea para esta sección es definir y analizar esta nueva clase de integrales.

Integrandos que son infinitos en un punto frontera

Damos la definición para el caso en donde f tiende a infinito en el punto frontera del lado derecho del intervalo de integración. Existe una definición completamente análoga para el caso en donde f tiende a infinito en el punto frontera del lado izquierdo.

Definición

Sea f continua en el intervalo semiabierto $[a, b)$ y supóngase que $\lim_{x\to b^-} |f(x)| = \infty$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

con tal que este límite exista y sea finito, en cuyo caso decimos que la integral converge. De otra forma, decimos que la integral diverge.

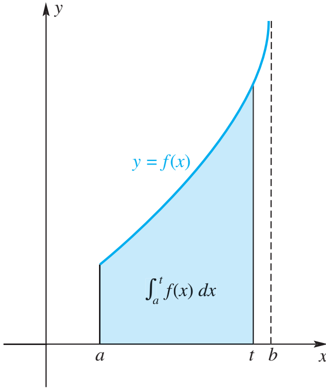


Figura 2

Observe la interpretación geométrica en la figura 2.

EJEMPLO 1 Evalúe, si es posible, la integral impropia $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

SOLUCIÓN Observe que en 2 el integrando tiene a infinito.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{t\to 2^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{t\to 2^-} \left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^t$$

$$= \lim_{t\to 2^-} \left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{0}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}$$ ■

EJEMPLO 2 Evalúe, si es posible, $\displaystyle\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\int_0^{16} x^{-1/4}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^{16} x^{-1/4}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{4}{3}x^{3/4}\right]_t^{16}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{32}{3} - \frac{4}{3}t^{3/4}\right] = \frac{32}{3}$$ ■

Dos ejemplos clave

Del ejemplo 7 de la sección 8.3 aprendimos que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

converge si y sólo si $p > 1$. Del ejemplo 4 de esta sección aprendimos que

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^p}\,dx$$

converge si y sólo si $p < 1$. La primera tiene un límite de integración infinito, la segunda tiene un integrando infinito. Si se siente como en casa con estas dos integrales, también debe sentirse cómodo con cualesquiera otras integrales impropias con la que se encuentre.

EJEMPLO 3 Evalúe, si es posible, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} [\ln x]_t^1$$

$$= \lim_{t\to 0^+} [-\ln t] = \infty$$

Concluimos que la integral diverge. ■

EJEMPLO 4 Muestre que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ converge si $p < 1$, pero diverge si $p \geq 1$.

SOLUCIÓN El ejemplo 3 se hizo cargo del caso $p = 1$. Si $p \neq 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 x^{-p}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_t^1$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{t^{p-1}}\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} & \text{si } p < 1 \\ \infty & \text{si } p > 1 \end{cases}$$ ■

EJEMPLO 5 Haga una gráfica de la hipocicloide de cuatro vértices, $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ y determine su perímetro.

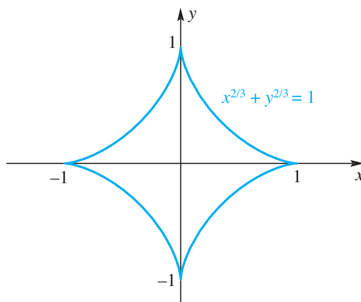


Figura 3

≈ **SOLUCIÓN** La gráfica se muestra en la figura 3. Para encontrar el perímetro, es suficiente con determinar la longitud L de la parte del primer cuadrante y multiplicarla por cuatro. Estimamos que L será un poco más de $\sqrt{2} \approx 1.4$. Su valor exacto (véase la sección 5.4) es

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$

Por medio de derivación implícita de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, obtenemos

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0$$

o

$$y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

Así,

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}} = 1 + \frac{1 - x^{2/3}}{x^{2/3}} = \frac{1}{x^{2/3}}$$

y de esta manera

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}}\, dx$$

El valor de esta integral impropia puede deducirse de la solución al ejemplo 4; es $L = 1/\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}$. Concluimos que la hipocicloide tiene perímetro $4L = 6$. ■

Integrandos que son infinitos en un punto interior La integral $\int_{-2}^{1} 1/x^2\, dx$ de nuestra introducción tiene un integrando que tiende a infinito en $x = 0$, un punto interior del intervalo $[-2, 1]$. He aquí la definición apropiada para dar significado a tal integral.

Definición

Sea f continua en $[a, b]$ excepto en un número c, en donde $a < c < b$, y supóngase que $\lim_{x \to c} |f(x)| = \infty$. Entonces definimos

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

siempre que ambas integrales de la derecha convergen. En caso contrario, decimos que $\int_a^b f(x)\, dx$ diverge.

EJEMPLO 6 Demuestre que $\int_{-2}^{1} 1/x^2\, dx$ diverge.

SOLUCIÓN

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = \int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2}\, dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx$$

La segunda integral de la derecha diverge, por el ejemplo 4. Esto es suficiente para dar la conclusión. ■

EJEMPLO 7 Evalúe, si es posible, la integral impropia $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$.

SOLUCIÓN El integrando tiende a infinito en $x = 1$ (véase la figura 4). Así,

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{s \to 1^+} \int_s^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{t \to 1^-} [3(x-1)^{1/3}]_0^t + \lim_{s \to 1^+} [3(x-1)^{1/3}]_s^3$$

$$= 3 \lim_{t \to 1^-} [(t-1)^{1/3} + 1] + 3 \lim_{s \to 1^+} [2^{1/3} - (s-1)^{1/3}]$$

$$= 3 + 3(2^{1/3}) \approx 6.78$$ ■

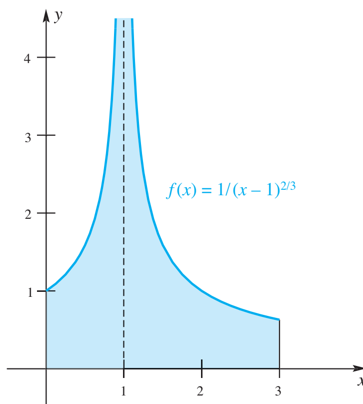


Figura 4

Revisión de conceptos

1. La integral $\int_0^1 (1/\sqrt{x})\,dx$ no existe en el sentido propio, ya que la función $f(x) = 1/\sqrt{x}$ es ______ en el intervalo $(0, 1]$.

2. Considerada como una integral impropia, $\int_0^1 (1/\sqrt{x})\,dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 x^{-1/2}\,dx =$ ______.

3. La integral impropia $\int_0^4 \left(1/\sqrt{4 - x}\right) dx$ se define por ______.

4. La integral impropia $\int_0^1 (1/x^p)\,dx$ converge si y sólo si ______.

Conjunto de problemas 8.4

En los problemas del 1 al 32 evalúe cada integral impropia o demuestre que diverge.

1. $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$

2. $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{4/3}}$

3. $\int_3^{10} \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$

4. $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$

5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

6. $\int_{100}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

7. $\int_{-1}^3 \frac{1}{x^3}\,dx$

8. $\int_5^{-5} \frac{1}{x^{2/3}}\,dx$

9. $\int_{-1}^{128} x^{-5/7}\,dx$

10. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx$

11. $\int_0^4 \frac{dx}{(2-3x)^{1/3}}$

12. $\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} \frac{x}{(16-2x^2)^{2/3}}\,dx$

13. $\int_0^{-4} \frac{x}{16-2x^2}\,dx$

14. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

15. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x+1)^{4/3}}$

16. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2+x-2}$

17. $\int_0^3 \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$

18. $\int_0^{27} \frac{x^{1/3}}{x^{2/3}-9}\,dx$

19. $\int_0^{\pi/4} \tan 2x\,dx$

20. $\int_0^{\pi/2} \csc x\,dx$

21. $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\,dx$

22. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}}\,dx$

23. $\int_0^{\pi/2} \tan^2 x \sec^2 x\,dx$

24. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x}{(\tan x - 1)^2}\,dx$

25. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos x - 1}$

26. $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(-x)}}$

27. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x-1}}$

28. $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

29. $\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$

30. $\int_1^{10} \frac{dx}{x \ln^{100} x}$

31. $\int_{2c}^{4c} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4c^2}}$

32. $\int_c^{2c} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+xc-2c^2}}, c > 0$

33. Con frecuencia, es posible cambiar una integral impropia en una propia por medio del uso de la integración por partes. Considere $\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$. Utilice la integración por partes en el intervalo $[c, 1]$ donde $0 < c < 1$ para demostrar que

$$\int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 1 - \frac{2\sqrt{c}}{c+1} + 2\int_c^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2}$$

y así concluir que tomando el límite cuando $c \to 0$ una integral impropia puede convertirse en una integral propia.

34. Utilice integración por partes y la técnica del problema 33 para transformar la integral impropia $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$ en una integral propia.

35. Si $f(x)$ tiende a infinito en a y b, entonces definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

en donde c es cualquier punto entre a y b, siempre que, por supuesto, las últimas dos integrales converjan. En caso contrario, decimos que la integral dada diverge. Utilice esto para evaluar $\int_{-3}^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ o demuestre que diverge.

36. Evalúe $\int_{-3}^3 \frac{x}{9-x^2}\,dx$ o demuestre que diverge. Véase el problema 35.

37. Evalúe $\int_{-4}^4 \frac{1}{16-x^2}\,dx$ o demuestre que diverge. Véase el problema 35.

38. Evalúe $\int_{-1}^1 \frac{1}{x\sqrt{-\ln|x|}}\,dx$ o demuestre que diverge.

39. Si $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$, definimos

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 f(x)\,dx + \lim_{b \to \infty} \int_1^b f(x)\,dx$$

con tal que ambos límites existan. En caso contrario, decimos que $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ diverge. Demuestre que $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ diverge para toda p.

40. Suponga que f es continua en $[0, \infty)$ excepto en $x = 1$, en donde $\lim_{x \to 1} |f(x)| = \infty$. ¿Cómo definiría $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$?

41. Encuentre el área de la región entre las curvas $y = (x - 8)^{-2/3}$ y $y = 0$ para $0 \le x < 8$.

42. Encuentre el área de la región entre las curvas $y = 1/x$ y $y = 1/(x^3 + x)$ para $0 < x \le 1$.

43. Sea R la región en el primer cuadrante debajo de la curva $y = x^{-2/3}$ y a la izquierda de $x = 1$.

(a) Demuestre que el área de R es finita encontrando su valor.

(b) Demuestre que el volumen del sólido generado al hacer girar R alrededor del eje x es infinito.

44. Encuentre b de modo que $\int_0^b \ln x\, dx = 0$.

45. ¿La integral $\int_0^1 \frac{\text{sen } x}{x}\, dx$ es impropia? Explique.

EXPL **46. (Prueba de comparación)** Si $0 \le f(x) \le g(x)$ en $[a, \infty)$, puede demostrarse que la convergencia de $\int_a^\infty g(x)\, dx$ implica la convergencia de $\int_a^\infty f(x)\, dx$, y la divergencia de $\int_a^\infty f(x)\, dx$ implica la divergencia de $\int_a^\infty g(x)\, dx$. Utilice esto para demostrar que $\int_1^\infty \frac{1}{x^4(1 + x^4)}\, dx$ converge.
Sugerencia: en $[1, \infty)$, $1/[x^4(1 + x^4)] \le 1/x^4$.

47. Utilice la prueba de comparación del problema 46 para demostrar que $\int_1^\infty e^{-x^2}\, dx$ converge. *Sugerencia:* $e^{-x^2} \le e^{-x}$ en $[1, \infty)$.

48. Utilice la prueba de comparación del problema 46 para demostrar que $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x + 2} - 1}\, dx$

49. Utilice la prueba de comparación del problema 46 para determinar si $\int_1^\infty \frac{1}{x^2 \ln(x + 1)}\, dx$ converge o diverge.

50. Formule una prueba de comparación para integrales impropias con integrandos infinitos.

51. (a) Utilice el ejemplo 2 de la sección 8.2 para demostrar que para cualquier número positivo n existe un número M tal que

$$0 < \frac{x^{n-1}}{e^x} \le \frac{1}{x^2} \text{ para } x \ge M$$

(b) Utilice la parte (a) y el problema 46 para demostrar que $\int_1^\infty x^{n-1}e^{-x}\, dx$ converge.

52. Utilizando el problema 50 demuestre que $\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}\, dx$ converge para $n > 0$.

EXPL **53. (Función gamma)** Sea $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\, dx$, $n > 0$. Por los problemas 51 y 52, esta integral converge. Demuestre cada uno de lo siguiente (observe que la función gamma está definida para cualquier número positivo real n):

(a) $\Gamma(1) = 1$ (b) $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$

(c) $\Gamma(n + 1) = n!$, si n es un entero positivo.

CAS **54.** Evalúe $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\, dx$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5, con lo que se confirma el problema 53(c).

55. La función de densidad de probabilidad **gamma** es

$$f(x) = \begin{cases} Cx^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

donde α y β son constantes positivas. (Tanto las distribuciones gamma como la Weibull son utilizadas en modelos de tiempo de vida de personas, animales y equipos).

(a) Determine el valor de C, dependiente de α y β, que hace a $f(x)$ una función de densidad de probabilidad.

(b) Para el valor de C, que encontró en la parte (a), determine el valor de la media μ.

(c) Para el valor de C, que encontró en la parte (a), determine la varianza σ^2.

EXPL **56.** La **transformada de Laplace**, nombrada así en honor del matemático francés Pierre–Simon de Laplace (1749–1827), de una función $f(x)$ está dada mediante $L\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt$. Las transformadas de Laplace se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales.

(a) Demuestre que la transformada de Laplace de t^a está dada por $\Gamma(\alpha + 1)/s^{\alpha+1}$ y está definida para $s > 0$.

(b) Demuestre que la transformada de Laplace de $e^{\alpha t}$ está dada por $1/(s - \alpha)$ y está definida por $s > \alpha$.

(c) Demuestre que la transformada de Laplace de $\text{sen}(\alpha t)$ está dada por $\alpha/(s^2 + \alpha^2)$ y está definida para $s > 0$).

57. Interprete cada una de las siguientes integrales como un área y después calcule esta área por medio de una integración con respecto a y, evalúe:

(a) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1 - x}{x}}\, dx$ (b) $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\, dx$

EXPL **58.** Suponga que $0 < p < q$ y que $\int_0^\infty \frac{1}{x^p + x^q}\, dx$ converge. ¿Qué puede decir acerca de p y q?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** no acotada **2.** 2 **3.** $\lim_{b \to 4^-} \int_0^b \left(1/\sqrt{4 - x}\right) dx$ **4.** $p < 1$

8.5 Repaso del capítulo

Examen de conceptos

Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{100}}{e^x} = 0$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{1/10}}{\ln x} = \infty$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{1000x^4 + 1000}{0.001x^4 + 1} = \infty$

4. $\lim_{x\to\infty} xe^{-1/x} = 0$

5. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

6. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = 1$.

7. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} \left\{\lim_{x\to a} [f(x)]^n\right\} = 1$.

8. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = 0$. (Suponga $f(x) \geq 0$ para $x \neq a$).

9. Si $\lim_{x\to a} f(x) = -1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = -\infty$.

10. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = 0$.

11. Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$, entonces $\lim_{x\to\infty} [f(x) - 3g(x)] = 0$.

12. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{|g(x)|} = \infty$. (Suponga que $g(x) \neq 0$ para $x \neq a$).

13. Si $\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = 2$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = e^2$.

14. Si $f(x) \neq 0$ para $x \neq a$ y $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a} [1 + f(x)]^{1/f(x)} = e$.

15. Si $p(x)$ es un polinomio, entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$.

16. Si $p(x)$ es un polinomio, entonces $\lim_{x\to 0} \frac{p(x)}{e^x} = p(0)$.

17. Si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables y $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, entonces $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

18. $\int_0^1 \frac{1}{x^{1.001}}\, dx$ converge.

19. $\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\, dx$ diverge para toda $p > 0$.

20. Si f es continua en $[0, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_0^\infty f(x)\, dx$ converge.

21. Si f es una función par y $\int_0^\infty f(x)\, dx$ converge, entonces $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ converge.

22. Si $\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\, dx$ existe y es finita, entonces $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ converge.

23. Si f' es continua en $[0, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_0^\infty f'(x)\, dx$ converge.

24. Si $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$ en $[0, \infty)$, entonces $\int_0^\infty f(x)\, dx$ converge.

25. $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{x}\, dx$ es una integral impropia.

Problemas de examen

Determine cada límite en los problemas del 1 al 18.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\tan x}$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \tan x}{\frac{1}{3}x^2}$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2}$

5. $\lim_{x\to 0} 2x \cot x$

6. $\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(1 - x)}{\cot \pi x}$

7. $\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t^2}$

8. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{\ln x}$

9. $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{1/x}$

10. $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$

11. $\lim_{x\to 0^+} x^x$

12. $\lim_{x\to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{2/x}$

13. $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \ln x$

14. $\lim_{t\to\infty} t^{1/t}$

15. $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right)$

16. $\lim_{x\to\pi/2} \frac{\tan 3x}{\tan x}$

17. $\lim_{x\to\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{\tan x}$

18. $\lim_{x\to\pi/2} \left(x \tan x - \frac{\pi}{2} \sec x\right)$

En los problemas del 19 al 38 evalúe la integral impropia dada o demuestre que diverge.

19. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x + 1)^2}$

20. $\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2}$

21. $\int_{-\infty}^1 e^{2x}\, dx$

22. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - x}$

23. $\int_0^\infty \frac{dx}{x + 1}$

24. $\int_{1/2}^2 \frac{dx}{x(\ln x)^{1/5}}$

25. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + x^4}$

26. $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{(2 - x)^2}$

27. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{2x + 3}$

28. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x - 1}}$

29. $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

30. $\int_0^\infty \frac{dx}{e^{x/2}}$

31. $\int_3^5 \frac{dx}{(4 - x)^{2/3}}$

32. $\int_2^\infty xe^{-x^2}\, dx$

33. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2 + 1}\, dx$

34. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1 + x^4}\, dx$

35. $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 1}\, dx$

36. $\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^3}\, dx$

37. $\int_{-3}^3 \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$

38. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\tan x}{(\ln \cos x)^2}\, dx$

39. ¿Para qué valores de p la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\, dx$ converge y para qué valores diverge?

40. ¿Para qué valores de p la integral $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx$ converge y para cuáles diverge?

En los problemas del 41 al 44 utilice la prueba de comparación (véase el problema 46 de la sección 8.4) para decidir si cada una de las siguientes integrales convergen o divergen.

41. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^6 + x}}$

42. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{e^{2x}}\, dx$

43. $\int_3^\infty \frac{\ln x}{x}\, dx$

44. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}\, dx$

PROBLEMAS DE REPASO E INTRODUCCIÓN

De la sección 0.1 recuerde que la recíproca de la implicación $P \Rightarrow Q$ es $Q \Rightarrow P$, y la contrapositiva es no $Q \Rightarrow$ no P. *En los problemas del 1 al 8 proporcione la recíproca y la contrapositiva de las proposiciones dadas. ¿Cuáles, entre la proposición original, su recíproca y su contrapositiva son siempre verdaderas?*

1. Si $x > 0$, entonces $x^2 > 0$.

2. Si $x^2 > 0$, entonces $x > 0$.

3. Si f es diferenciable en c, entonces f es continua en c.

4. Si f es continua en c, entonces f es diferenciable en c.

5. Si f es continua por la derecha en c, entonces f es continua en c.

6. Si la derivada de f siempre es cero, entonces f es una función constante. [Suponga que f es diferenciable para toda x].

7. Si $f(x) = x^2$, entonces $f'(x) = 2x$.

8. Si $a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

En los problemas del 9 al 12 evalúe la suma dada.

9. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

10. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$

11. $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i}$

12. $\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^k}{2^k}$

Evalúe los siguientes límites.

13. $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{2x + 1}$

14. $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{2n^2 + 1}$

15. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$

16. $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{e^n}$

¿Cuál de las integrales impropias converge?

17. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$

18. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$

19. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1.001}}\, dx$

20. $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1}\, dx$

21. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx$

22. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$

Apéndice

A.1 Inducción matemática

Con frecuencia, en matemáticas nos enfrentamos a la tarea de querer establecer si una cierta proposición P_n es verdadera para cada entero $n \geq 1$ (o tal vez para cada entero $n \geq N$). He aquí tres ejemplos:

1. P_n: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. Q_n: $2^n > n + 20$
3. R_n: $n^2 - n + 41$ es primo

La proposición P_n es verdadera para cada entero positivo y Q_n es verdadera para cada entero mayor o igual a 5 (como mostraremos en breve). La tercera proposición, R_n, es interesante. Observe que para $n = 1, 2, 3,...$, los valores de $n^2 - n + 41$ son 41, 43, 47, 53, 61, . . . , (números primos hasta este momento). De hecho, obtendremos un número primo para cada n hasta 40; pero en $n = 41$, la fórmula proporciona el número compuesto 1681 = (41)(41). Mostrar la verdad de una proposición para 40 (o 40 millones) casos individuales puede hacer una proposición plausible, pero ciertamente esto no demuestra que sea verdadera para toda n. El salto entre cualquier número finito de casos y *todos* los casos es infinitamente grande.

¿Qué hay que hacer? ¿Hay un procedimiento para establecer que una proposición P_n es verdadera para *toda* n? Una respuesta afirmativa la da el **principio de inducción matemática.**

Principio de inducción matemática

Sea $\{P_n\}$ una serie de proposiciones (enunciados) que satisfacen estas dos condiciones:

(i) P_N es verdadera (por lo general, N será 1).
(ii) Que P_i sea verdadera implica que P_{i+1}, $i \geq N$.

Entonces, P_n es verdadera para todo entero $n \geq N$.

No demostraremos este principio; con frecuencia se le considera como un axioma y esperamos que sea evidente. Después de todo, si la primera ficha de dominó cae y cada ficha golpea a la siguiente, entonces toda la serie de fichas caerá. Nuestro esfuerzo irá dedicado a ilustrar la forma de usar la inducción matemática.

EJEMPLO 1 Demuestre que

$$P_n: \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

es verdadera para cada $n \geq 1$.

SOLUCIÓN Observamos primero que

$$P_1: \quad 1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

es un enunciado verdadero.

En segundo lugar, demostraremos la implicación (ii). Comenzamos escribiendo los enunciados P_i y P_{i+1}.

$$P_i: \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + i^2 = \frac{i(i+1)(2i+1)}{6}$$

$$P_{i+1}: \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + i^2 + (i+1)^2 = \frac{(i+1)(i+2)(2i+3)}{6}$$

Debemos demostrar que P_i implica P_{i+1}, de modo que suponemos que P_i es verdadera. Entonces el lado izquierdo de P_{i+1} se puede escribir como sigue (*indica donde usamos P_i):

$$[1^2 + 2^2 + \cdots + i^2] + (i + 1)^2 \overset{*}{=} \frac{i(i + 1)(2i + 1)}{6} + (i + 1)^2$$

$$= (i + 1)\frac{2i^2 + i + 6i + 6}{6}$$

$$= \frac{(i + 1)(i + 2)(2i + 3)}{6}$$

Esta cadena de igualdades conduce al enunciado P_{i+1}. Así, la verdad de P_i realmente implica la verdad de P_{i+1}. Por el principio de inducción matemática, P_n es verdadera para cada entero positivo n. ■

EJEMPLO 2 Demuestre que P_n: $2^n > n + 20$ es verdadera para cada entero $n \geq 5$.

SOLUCIÓN Primero observemos que la proposición P_5: $2^5 > 5 + 20$ es verdadera. En segundo lugar, supongamos que P_i: $2^i > i + 20$ es verdadera y tratemos de deducir a partir de esto que P_{i+1}: $2^{i+1} > i + 1 + 20$ es verdadera. Pero

$$2^{i+1} = 2 \cdot 2^i \overset{*}{>} 2(i + 20) = 2i + 40 > i + 21$$

Leída de izquierda a derecha, ésta es la proposición P_{i+1}. Concluimos que P_n es verdadera para $n \geq 5$. ■

EJEMPLO 3 Demuestre que

$$P_n: \quad x - y \text{ es un factor de } x^n - y^n$$

es verdadera para cada entero $n \geq 1$.

SOLUCIÓN En forma trivial, $x - y$ es un factor de $x - y$, de modo que P_1 es verdadera. Suponga que $x - y$ es un factor de $x^i - y^i$; es decir,

$$x^i - y^i = Q(x, y)(x - y)$$

para algún polinomio $Q(x, y)$. Entonces

$$x^{i+1} - y^{i+1} = x^{i+1} - x^i y + x^i y - y^{i+1}$$

$$= x^i(x - y) + y(x^i - y^i)$$

$$\overset{*}{=} x^i(x - y) + y\,Q(x, y)(x - y)$$

$$= [x^i + yQ(x, y)](x - y)$$

Así, la verdad de P_i realmente implica la verdad de P_{i+1}. Por el principio de inducción matemática, concluimos que P_n es verdadera para toda $n \geq 1$. ■

Conjunto de problemas A.1

En los problemas del 1 al 8 use el principio de inducción matemática para demostrar que la proposición dada es verdadera para cada entero $n \geq 1$.

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$

2. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

3. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) = \dfrac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$

4. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \dfrac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$

5. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n + 1)}{2}\right]^2$

6. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \dfrac{n(n + 1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$

7. $n^3 - n$ es divisible entre 6.

8. $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ es divisible entre 9.

En los problemas del 9 al 12 determine el primer entero N para el que sea verdadera la proposición para cada n ≥ N, y luego demuestre la proposición para cada n ≥ N.

9. $3n + 25 < 3^n$

10. $n - 100 > \log_{10} n$

11. $n^2 \leq 2^n$

12. $|\text{sen } nx| \leq n|\text{sen } x|$ para toda x

En los problemas del 13 al 20 indique la conclusión sobre P_n que puede extraerse con la información dada.

13. P_5 es verdadera y P_i verdadera implica que P_{i+2} es verdadera.

14. P_1 y P_2 son verdaderas y P_i verdadera implica que P_{i+2} es verdadera.

15. P_{30} es verdadera y P_i verdadera implica que P_{i+1} es verdadera.

16. P_{30} es verdadera y P_i verdadera implica que P_{i+1} y P_{i-1} son verdaderas.

17. P_1 es verdadera y P_i verdadera implica que P_{4i} y P_{i-1} son verdaderas.

18. P_1 es verdadera y P_{2i} verdadera implica que P_{2i+1} es verdadera.

19. P_1 y P_2 son verdaderas y P_i y P_{i+1} verdaderas implican que P_{i+2} es verdadera.

20. P_1 es verdadera y P_j verdadera para $j \leq i$ implica que P_{i+1} es verdadera.

En los problemas del 21 al 27 decida para cuáles n es verdadera la proposición dada y luego use inducción matemática (tal vez en alguna de las formas alternativas que haya descubierto en los problemas del 13 al 20) para demostrar lo siguiente.

21. $x + y$ es un factor de $x^n + y^n$.

22. La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono convexo con n lados (sin agujeros ni dientes) es $(n-2)\pi$.

23. El número de diagonales de un polígono convexo con n lados es $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

24. $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{3}{5}$

25. $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right)\left(1 - \dfrac{1}{16}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}$

26. Sean $f_0 = 0, f_1 = 1$ y $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ para $n \geq 0$ (ésta es la sucesión de Fibonacci). Entonces

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

27. Sean $a_0 = 0, a_1 = 1$ y $a_{n+2} = (a_{n+1} + a_n)/2$ para $n \geq 0$. Entonces

$$a_n = \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

28. ¿Cuál es el error en el siguiente argumento que propone demostrar que todas las personas en cualquier conjunto de n personas tienen la misma edad? La afirmación es verdadera para un conjunto que consta de una persona. Suponga que es verdadera para cualquier conjunto de i personas y considere un conjunto W de $i + 1$ personas. Podemos pensar W como la unión de conjuntos X y Y, cada uno con i personas (por ejemplo, trace una figura cuando W tiene 6 personas). Por hipótesis, cada uno de estos conjuntos consta de personas con la misma edad. Pero X y Y se traslapan (en $X \cap Y$) de modo que todos los elementos de $W = X \cup Y$ tienen la misma edad.

A.2 Demostración de varios teoremas

Teorema A Teorema principal de límites

Sea n un entero positivo, k una constante, y f y g funciones con límites en c. Entonces

1. $\lim_{x \to c} k = k$
2. $\lim_{x \to c} x = c$
3. $\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$
4. $\lim_{x \to c}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$
5. $\lim_{x \to c}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$
6. $\lim_{x \to c}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$
7. $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$, siempre siempre que $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$
8. $\lim_{x \to c}[f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$
9. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$, siempre que $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ cuando n sea par

Demostración Casi al final de la sección 1.3 demostramos las partes de 1 a 5, de modo que deberíamos comenzar con la parte 6. Sin embargo, primero demostraremos un caso particular de la parte 8:

$$\lim_{x \to c}[g(x)]^2 = \left[\lim_{x \to c} g(x)\right]^2$$

Para ver esto, recuerde que hemos demostrado que $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$ (ejemplo 7 de la sección 1.2), de modo que $f(x) = x^2$ es continua en todas partes. Así, por el teorema de composición de límites (teorema 1.6E),

$$\lim_{x\to c}[g(x)]^2 = \lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left[\lim_{x\to c} g(x)\right] = \left[\lim_{x\to c} g(x)\right]^2$$

Ahora escribimos

$$f(x)g(x) = \frac{1}{4}\left\{[f(x) + g(x)]^2 - [f(x) - g(x)]^2\right\}$$

y aplicamos las partes 3, 4 y 5, más lo que acabamos de demostrar. Se demuestra la parte 6.

Para demostrar la parte 7 aplicamos el teorema de la composición de límites con $f(x) = 1/x$ y usamos el ejemplo 8 de la sección 1.2. Entonces

$$\lim_{x\to c}\frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = \frac{1}{\lim_{x\to c} g(x)}$$

Por último, por la parte 6,

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right] = \lim_{x\to c} f(x)\cdot\lim_{x\to c}\frac{1}{g(x)}$$

de donde se sigue el resultado.

La parte 8 es consecuencia del uso repetido de la parte 6 (técnicamente, por inducción matemática).

Demostraremos la parte 9 sólo para raíces cuadradas. Sea $f(x) = \sqrt{x}$, que es continua para números positivos por el ejemplo 5 de la sección 1.2. Por el teorema de composición de límites,

$$\lim_{x\to c}\sqrt{g(x)} = \lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = \sqrt{\lim_{x\to c} g(x)}$$

que es equivalente al resultado deseado. ■

Teorema B Regla de la cadena

Si g es diferenciable en a y f es diferenciable en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es diferenciable en a y

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

Demostración Daremos una demostración que se generaliza con facilidad a dimensiones superiores. Por hipótesis, f es diferenciable en $b = g(a)$; es decir, existe un número $f'(b)$ tal que

(1) $$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(b + \Delta u) - f(b)}{\Delta u} = f'(b)$$

Definimos una función ε que depende de Δu como

$$\varepsilon(\Delta u) = \frac{f(b + \Delta u) - f(b)}{\Delta u} - f'(b)$$

y multiplicamos ambos lados por Δu para obtener

(2) $$f(b + \Delta u) - f(b) = f'(b)\,\Delta u + \Delta u\,\varepsilon(\Delta u)$$

La existencia del límite en (1) es equivalente a que $\varepsilon(\Delta u) \to 0$ cuando $\Delta u \to 0$ en (2). Si en (2) reemplazamos Δu por $g(a + \Delta x) - g(a)$ y b por $g(a)$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(g(a + \Delta x)) - f(g(a)) &= f'(g(a))[g(a + \Delta x) - g(a)] \\ &\quad + [g(a + \Delta x) - g(a)]\varepsilon(\Delta u) \end{aligned}$$

o bien, al dividir ambos lados entre Δx,

(3) $$\begin{aligned} \frac{f(g(a + \Delta x)) - f(g(a))}{\Delta x} &= f'(g(a))\frac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x} \\ &\quad + \frac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x}\varepsilon(\Delta u) \end{aligned}$$

En (3), hagamos $\Delta x \to 0$. Como g es diferenciable en a, es continua ahí, de modo que $\Delta x \to 0$ implica que $\Delta u \to 0$; esto, a su vez, implica que $\varepsilon(\Delta u) \to 0$. Concluimos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(a + \Delta x)) - f(g(a))}{\Delta x} = f'(g(a)) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x} + 0$$

Es decir, $f \circ g$ es diferenciable en a y

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a) \qquad \blacksquare$$

Teorema C Regla de la potencia

Si r es racional, entonces x^r es diferenciable en cualquier x que esté en un intervalo abierto donde x^{r-1} sea real y

$$D_x(x^r) = rx^{r-1}$$

Demostración Considere primero el caso en que $r = 1/q$, con q un entero positivo. Recuerde que $a^q - b^q$ se factoriza como

$$a^q - b^q = (a - b)(a^{q-1} + a^{q-2}b + \cdots + ab^{q-2} + b^{q-1})$$

de modo que

$$\frac{a - b}{a^q - b^q} = \frac{1}{a^{q-1} + a^{q-2}b + \cdots + ab^{q-2} + b^{q-1}}$$

Así, si $f(t) = t^{1/q}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t \to x} \frac{t^{1/q} - x^{1/q}}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{t^{1/q} - x^{1/q}}{(t^{1/q})^q - (x^{1/q})^q} \\ &= \lim_{t \to x} \frac{1}{t^{(q-1)/q} + t^{(q-2)/q}x^{1/q} + \cdots + x^{(q-1)/q}} \\ &= \frac{1}{qx^{(q-1)/q}} = \frac{1}{q}x^{1/q-1} \end{aligned}$$

Ahora, por la regla de la cadena y con p un entero,

$$D_x(x^{p/q}) = D_x[(x^{1/q})^p] = p(x^{1/q})^{p-1}D_x(x^{1/q}) = px^{p/q-1/q}\frac{1}{q}x^{1/q-1} = \frac{p}{q}x^{p/q-1} \qquad \blacksquare$$

Teorema D Límites de vectores

Sea $\mathbf{F}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$. Entonces $\mathbf{F}$ tiene un límite en c si y sólo si f y g tienen límites en c. En ese caso,

$$\lim_{t \to c} \mathbf{F}(t) = \left[\lim_{t \to c} f(t)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t \to c} g(t)\right]\mathbf{j}$$

Demostración Primero, observe que para cualquier vector $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$,

$$|u_1| \le \|\mathbf{u}\| \le |u_1| + |u_2|$$

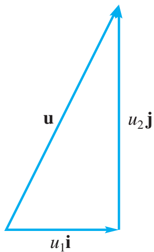


Figura 1

Este hecho se ve fácilmente en la figura 1.

Ahora suponga que $\lim_{t \to c} \mathbf{F}(t) = \mathbf{L} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$. Esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ correspondiente, tal que

$$0 < |t - c| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{F}(t) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$$

Pero, por la parte izquierda de la desigualdad en el recuadro,

$$|f(t) - a| \leq \|\mathbf{F}(t) - \mathbf{L}\|$$

y así

$$0 < |t - c| < \delta \Rightarrow |f(t) - a| < \varepsilon$$

Esto muestra que $\lim_{t \to c} f(t) = a$. Un argumento similar establece que $\lim_{t \to c} g(t) = b$. Esto concluye la primera mitad de nuestro teorema.

Recíprocamente, suponga que

$$\lim_{t \to c} f(t) = a \quad \text{y} \quad \lim_{t \to c} g(t) = b$$

y sea $\mathbf{L} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Para cualquier $\varepsilon > 0$, tal que $\delta > 0$ existe $0 < |t - c| < \delta$ implica que

$$|f(t) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |g(t) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto, por la parte derecha de la desigualdad en el recuadro,

$$0 < |t - c| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{F}(t) - \mathbf{L}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Así,

$$\lim_{t \to c} \mathbf{F}(t) = \mathbf{L} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} = \lim_{t \to c} f(t)\,\mathbf{i} + \lim_{t \to c} g(t)\,\mathbf{j}$$ ■

Respuestas a problemas con número impar

Conjunto de problemas 0.1

1. 16 **3.** -148 **5.** $\frac{58}{91}$ **7.** $\frac{1}{24}$ **9.** $\frac{6}{49}$ **11.** $\frac{7}{15}$

13. $\frac{1}{3}$ **15.** 2 **17.** $3x^2 - x - 4$ **19.** $6x^2 - 15x - 9$

21. $9t^4 - 6t^3 + 7t^2 - 2t + 1$ **23.** $x + 2, x \neq 2$

25. $t - 7, t \neq -3$ **27.** $\dfrac{2(3x + 10)}{x(x + 2)}$

29. **(a)** 0; **(b)** No definida; **(c)** 0; **(d)** No definida; **(e)** 0; **(f)** 1

31. 0.08333 . . . **33.** 0.142857 . . . **35.** 3.6666 . . .

37. $\frac{41}{333}$ **39.** $\frac{254}{99}$ **41.** $\frac{1}{5}$

43. Aquellos números racionales que pueden expresarse mediante un decimal que termina seguido con ceros.

49. Irracional **51.** 20.39230485 **53.** 0.00028307388

55. 0.000691744752 **59.** 132,700,874 pies

61. 651,441 pies de tablas

63. **(a)** Si me quedo en casa, entonces llueve. Si no me quedo en casa, entonces no llueve.

(b) Si la candidata será contratada, entonces cumple con todos los requisitos.

65. **(a)** Si un triángulo es un triángulo rectángulo, entonces $a^2 + b^2 = c^2$. Si un triángulo no es un triángulo rectángulo, entonces $a^2 + b^2 \neq c^2$.

(b) Si la medida del ángulo ABC es mayor que 0° y menor que 90°, es agudo. Si la medida del ángulo ABC es menor que 0° o mayor que 90°, entonces no es agudo.

67. **(a)** La proposición, la recíproca y la contrapositiva son verdaderas.

(b) La proposición, la recíproca y la contrapositiva son verdaderas.

69. **(a)** Algunos triángulos isósceles no son equiláteros. La negación es verdadera.

(b) Todos los números reales son enteros. La proposición original es verdadera. **(c)** Algún número natural es mayor que su cuadrado. La proposición original es verdadera.

71. **(a)** Verdadera; **(b)** Falsa; **(c)** Falsa; **(d)** Verdadera; **(e)** Verdadera

75. **(a)** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ o 3^5; **(b)** $2 \cdot 2 \cdot 31$ o $2^2 \cdot 31$

(c) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 17$ o $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17$

81. **(a)** Racional; **(b)** Racional; **(c)** Racional; **(d)** Irracional

Conjunto de problemas 0.2

1. **(a)** [recta numérica]

(b) [recta numérica]

(c) [recta numérica]

(d) [recta numérica]

(e) [recta numérica]

(f) [recta numérica]

3. $(-2, \infty)$;

5. $\left[-\frac{5}{2}, \infty\right)$;

7. $(-2, 1)$;

9. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$;

11. $\left(-1 - \sqrt{13}, -1 + \sqrt{13}\right)$;

13. $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$;

15. $[-4, 3)$;

17. $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{5}, \infty\right)$;

19. $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$;

21. $(-2, 1) \cup (3, \infty)$;

23. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup [3, \infty)$;

25. $(-\infty, -1) \cup (0, 6)$;

27. **(a)** Falsa; **(b)** Verdadera; **(c)** Falsa

31. **(a)** $(-2, 1)$; **(b)** $(-2, \infty)$; **(c)** No hay valores

33. **(a)** $[-3, -1] \cup [2, \infty)$; **(b)** $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$; **(c)** $(-2, -1) \cup (1, 2)$

35. $(-\infty, -3] \cup [7, \infty)$ **37.** $\left[-\dfrac{15}{4}, \dfrac{5}{4}\right]$

39. $(-\infty, -7] \cup [42, \infty)$ **41.** $(-\infty, 1) \cup \left(\dfrac{7}{5}, \infty\right)$

43. $\left(-\dfrac{1}{3}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{1}{9}\right)$ **45.** $(-\infty, -1] \cup [4, \infty)$

47. $(-\infty, -6) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ **53.** $\frac{\varepsilon}{3}$ **55.** $\frac{\varepsilon}{6}$ **57.** 0.0064 pulg.

59. $\left(-\infty, \frac{7}{3}\right) \cup (5, \infty)$ **61.** $\left(-\frac{4}{5}, \frac{16}{3}\right)$ **77.** $\dfrac{60}{11} \leq R \leq \dfrac{120}{13}$

Conjunto de problemas 0.3

1. 2 **3.** $\sqrt{170}$

(1, 1) (3, 1)

(4, 5) (5, −8)

7. $(-1, 3), (-1, -1)$; $(7, 3), (7, -1)$; $(1, 1), (5, 1)$

9. $\dfrac{\sqrt{61}}{2}$ **11.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

13. $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ **15.** $(x-2)^2+(y-5)^2=5$

17. Centro $=(-1,3)$; radio $=\sqrt{10}$

19. Centro $=(6,0)$; radio $=1$

21. Centro $=\left(-2,-\frac{3}{4}\right)$; radio $=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$

23. 1 **25.** $\frac{9}{7}$ **27.** $-\frac{5}{3}$ **29.** $y=-x+4$; $x+y-4=0$

31. $y=2x+3$; $2x-y+3=0$

33. $y=\frac{5}{2}x-2$; $5x-2y-4=0$

35. Pendiente $=-\frac{2}{3}$; intercepción con el eje $y=\frac{1}{3}$

37. Pendiente = -5; intercepción con el eje $y=4$

39. **(a)** $y=2x-9$; **(b)** $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$; **(c)** $y=-\frac{2}{3}x-1$; **(d)** $y=\frac{3}{2}x-\frac{15}{2}$; **(e)** $y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$; **(f)** $x=3$; **(g)** $y=-3$

41. $y=\frac{3}{2}x+2$ **43.** Está por arriba de la recta.

45. $(-1,2)$; $y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$ **47.** $(3,1)$; $y=-\frac{4}{3}x+5$

49. Inscrita; $(x-4)^2+(y-1)^2=4$; circunscrita: $(x-4)^2+(y-1)^2=8$

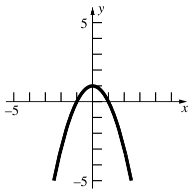
55. $d=2\sqrt{3}+4$ **61.** $18+2\sqrt{17}+4\pi\approx 38.8$

63. $\dfrac{7}{5}$ **65.** $\dfrac{18}{13}$ **67.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **69.** $y=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}$ **71.** $r=1$

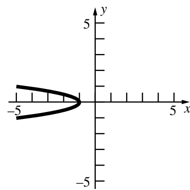
73. $x+\sqrt{3}y=12$ y $x-\sqrt{3}y=12$ **77.** 8

Conjunto de problemas 0.4

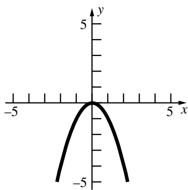
1.



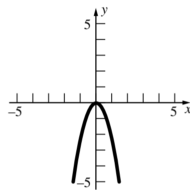
3.



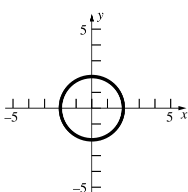
5.



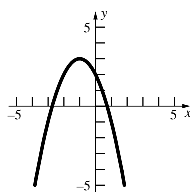
7.



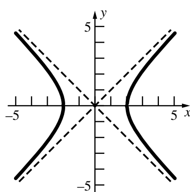
9.



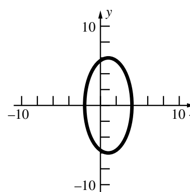
11.



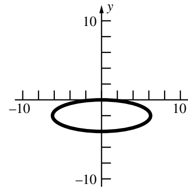
13.



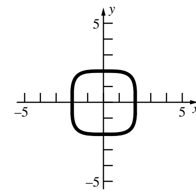
15.



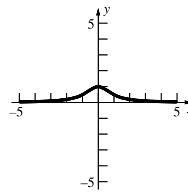
17.



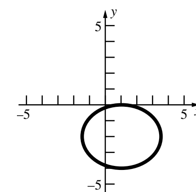
19.



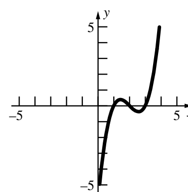
21.



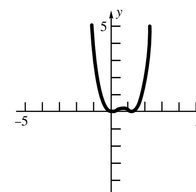
23.



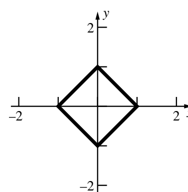
25.



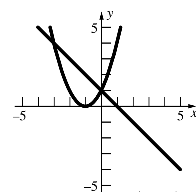
27.



29.

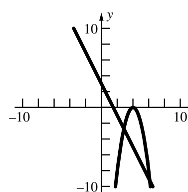


31.



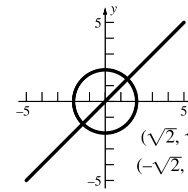
$(0,1)$, $(-3,4)$

33.



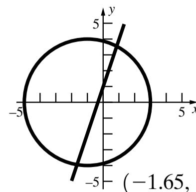
$\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{11},-6+\sqrt{11}\right)$,
$\left(\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{11},-6-\sqrt{11}\right)$

35.



$(\sqrt{2},\sqrt{2})$,
$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$

37.



$(-1.65,-3.95)$,
$(0.85, 3.55)$

39. **(a)** (2) **(b)** (1) **(c)** (3) **(d)** (4)

41. Cuatro distancias distintas.

Conjunto de problemas 0.5

1. **(a)** 0; **(b)** -3; **(c)** 1; **(d)** $1-k^2$; **(e)** -24; **(f)** $\frac{15}{16}$; **(g)** $-2h-h^2$; **(h)** $-2h-h^2$; **(i)** $-4h-h^2$

3. **(a)** -1; **(b)** -1000; **(c)** 100; **(d)** $\dfrac{1}{y^2-1}$; **(e)** $-\dfrac{1}{x+1}$; **(f)** $\dfrac{x^2}{1-x^2}$

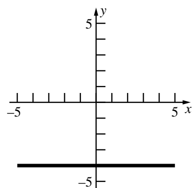
5. **(a)** No definido; **(b)** 2.658; **(c)** 0.841

7. **(a)** No es una función; **(b)** $f(x) = \dfrac{1 - x}{x + 1}$;
(c) $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$; **(d)** $f(x) = \dfrac{x}{1 - x}$

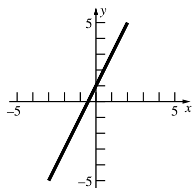
9. $4a + 2h$ **11.** $-\dfrac{3}{x^2 - 4x + hx - 2h + 4}$

13. **(a)** $\{z \in \text{reales}: z \geq -\frac{3}{2}\}$; **(b)** $\{v \in \text{reales}: v \neq \frac{1}{4}\}$;
(c) $\{x \in \text{reales}: |x| \geq 3\}$; **(d)** $\{y \in \text{reales}: |y| \leq 5\}$

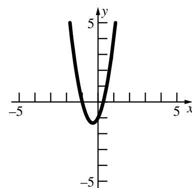
15. Par



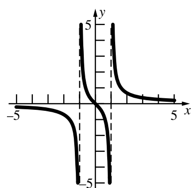
17. Ninguna



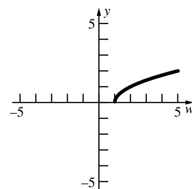
19. Ninguna



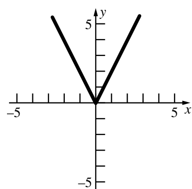
21. Impar



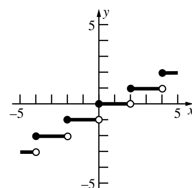
23. Ninguna



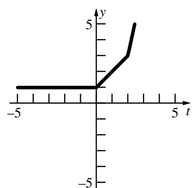
25. Par



27. Ninguna

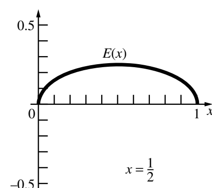


29. Ninguna



31. $T(x) = 5000 + 805x$, $\{x \in \text{integrales}: 0 \leq x \leq 100\}$;
$u(x) = \frac{5000}{x} + 805$, $\{x \in \text{integrales}: 0 < x \leq 100\}$

33. $E(x) = x - x^2$



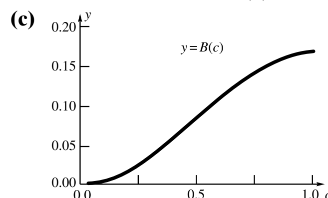
35. $L(x) = \sqrt{h^2 - x^2}$

37. **(a)** $E(x) = 24 + 0.40x$; **(b)** 240 millas

39. $A(d) = \dfrac{2d - \pi d^2}{4}$, $\left\{d \in \text{reales}: 0 < d < \dfrac{1}{\pi}\right\}$

41. **(a)** $B(0) = 0$ **(b)** $B\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}B(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

(c)

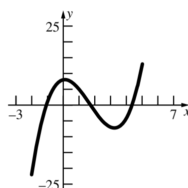


45. **(a)** $f(1.38) \approx 0.2994$, $f(4.12) \approx 3.6852$

(b)

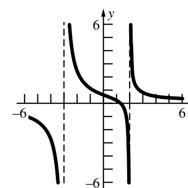
x	$f(x)$
−4	−4.05
−3	−3.1538
−2	−2.375
−1	−1.8
0	−1.25
1	−0.2
2	1.125
3	2.3846
4	3.55

47.



(a) $\{y \in \text{reales}: -22 \leq y \leq 13\}$;
(b) $[-1.1, 1.7] \cup [4.3, 5]$

49.



(a) intercepción x $\frac{4}{3}$, intercepción y $\frac{2}{3}$;
(b) todos los reales;
(c) $x = -3, x = 2$; **(d)** $y = 0$

Conjunto de problemas 0.6

1. **(a)** 9; **(b)** 0; **(c)** $\frac{3}{2}$; **(d)** 4; **(e)** 16; **(f)** 25

3. **(a)** $t^3 + 1 + \dfrac{1}{t}$; **(b)** $\dfrac{1}{r^3} + 1$; **(c)** $\dfrac{1}{r^3 + 1}$; **(d)** $(z^3 + 1)^3$;
(e) $125t^3 + 1 - \dfrac{1}{5t}$; **(f)** $\dfrac{1}{t^3} + 1 - t$

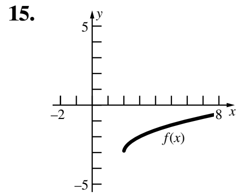
5. $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$; $(g \circ f)(x) = 1 + \sqrt{x^2 - 4}$

7. 1.188 **9.** 4.789

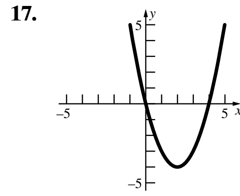
11. **(a)** $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x + 7$;
(b) $g(x) = x^{15}$, $f(x) = x^2 + x$

13. $p = f \circ g \circ h$ si $f(x) = 1/x$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^2 + 1$;
$p = f \circ g \circ h$ si $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = x^2$

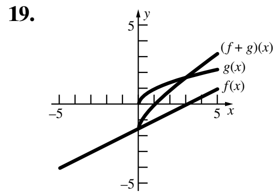
15.



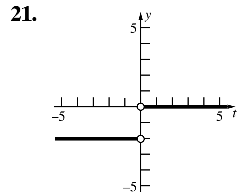
17.



19.



21.



23. **(a)** Par; **(b)** Impar; **(c)** Par; **(d)** Par; **(e)** Impar

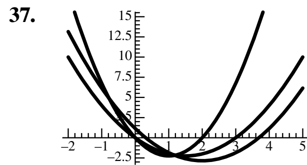
25. No, en ambos casos. (Considere $f(x) = x^2 + x$ y $f(x) = x^3 + 1$).

27. **(a)** $P = \sqrt{t + \sqrt{t} + 27}$; **(b)** $P \approx 7$

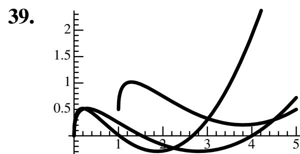
29. $D(t) = \begin{cases} 400t & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ \sqrt{250{,}000t^2 - 180{,}000t + 90{,}000} & \text{si } t > 1 \end{cases}$

33. **(a)** $\dfrac{1}{1 - x}$; **(b)** x; **(c)** $1 - x$

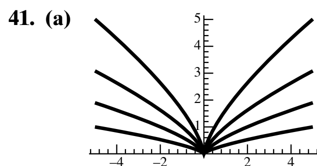
37.



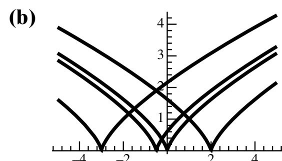
39.



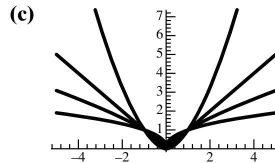
41. **(a)**



(b)



(c)



Conjunto de problemas 0.7

1. **(a)** $\frac{\pi}{6}$; **(b)** $\frac{\pi}{4}$; **(c)** $-\frac{\pi}{3}$; **(d)** $\frac{4\pi}{3}$; **(e)** $-\frac{37\pi}{18}$; **(f)** $\frac{\pi}{18}$;

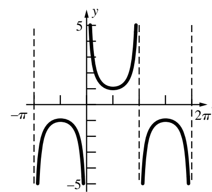
3. **(a)** 0.5812; **(b)** 0.8029; **(c)** −1.1624; **(d)** 4.1907; **(e)** −6.4403; **(f)** 0.1920;

5. **(a)** 68.37; **(b)** 0.8845; **(c)** 0.4855; **(d)** −0.3532;

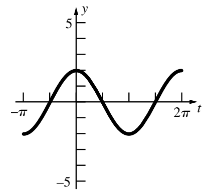
7. **(a)** 46.097; **(b)** 0.0789

9. **(a)** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; **(b)** −1; **(c)** $-\sqrt{2}$; **(d)** 1; **(e)** 1; **(f)** −1

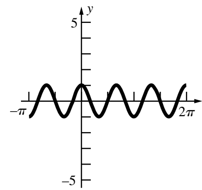
15. **(a)**



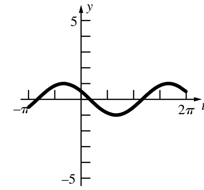
(b)



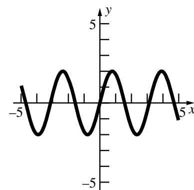
(c)



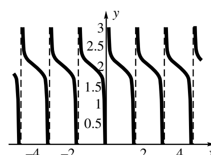
(d)



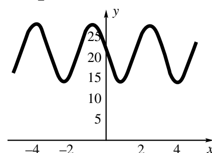
17. Periodo = π; Amplitud = 2



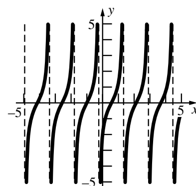
19. Periodo $= \frac{\pi}{2}$; corrimiento: 2 unidades hacia arriba



21. Periodo = π; amplitud = 7; corrimiento: 21 unidades hacia arriba, $\frac{3}{2}$ unidades hacia la izquierda



23. Periodo $= \frac{\pi}{2}$; corrimiento: $\frac{\pi}{6}$ unidades hacia la derecha



25. **(a)** Par; **(b)** Par; **(c)** Impar; **(d)** Par; **(e)** Par; **(f)** Impar

27. $\frac{1}{4}$ **29.** $\frac{1}{8}$ **31.** $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

35. 336 rev/min **37.** 28 rev/sec

39. **(a)** $\frac{\pi}{3}$; **(b)** $\frac{5\pi}{6}$

41. **(a)** 0.1419; **(b)** 1.8925; **(c)** 1.7127

43. 25 cm^2 **45.** $r^2 \operatorname{sen}\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi r^2}{2}\operatorname{sen}^2\dfrac{t}{2}$

47. 67.5°F

49. Conforme t aumenta, el punto en el borde de la rueda se moverá alrededor del círculo de radio 2.

(a) $x(2) \approx 1.902$; $y(2) \approx 0.618$; $x(6) \approx -1.176$; $y(6) \approx -1.618$; $x(10) = 0$; $y(10) = 2$; $x(0) = 0$; $y(0) = 2$

(b) $x(t) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}t\right)$, $y(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right)$

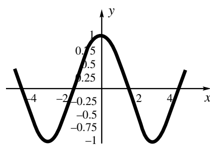
(c) El punto está en (2, 0), cuando $\frac{\pi}{5}t = \frac{\pi}{2}$; es decir, cuando $t = \frac{5}{2}$.

51. **(c)** $A_1\operatorname{sen}(\omega t + \phi_1) + A_2\operatorname{sen}(\omega t + \phi_2) + A_3\operatorname{sen}(\omega t + \phi_3)$

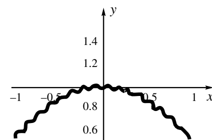
$= (A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2 + A_3\cos\phi_3)\operatorname{sen}\omega t$

$+ (A_1\operatorname{sen}\phi_1 + A_2\operatorname{sen}\phi_2 + A_3\operatorname{sen}\phi_3)\cos\omega t$

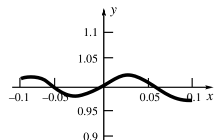
53. **(a)**



(b)



(c)



0.8 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Falso **3.** Falso **5.** Falso **7.** Falso **9.** Verdadero **11.** Verdadero **13.** Verdadero **15.** Falso **17.** Verdadero **19.** Verdadero **21.** Verdadero **23.** Verdadero **25.** Verdadero **27.** Verdadero **29.** Verdadero **31.** Verdadero **33.** Verdadero **35.** Verdadero **37.** Falso **39.** Falso **41.** Verdadero **43.** Verdadero **45.** Falso **47.** Verdadero **49.** Verdadero **51.** Falso **53.** Verdadero **55.** Falso **57.** Verdadero **59.** Falso **61.** Verdadero **63.** Verdadero

Problemas de examen

1. **(a)** $2, \frac{25}{4}, \frac{4}{25}$; **(b)** 1, 9, 49; **(c)** $64, 8, \frac{1}{8}$; **(d)** $1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}$

7. 2.66

9. $\left\{x\colon x < \frac{1}{3}\right\}$; $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$;

11. $\left\{x\colon \frac{1}{3} \le x \le 3\right\}$; $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$;

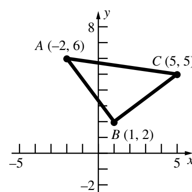
13. $\left\{t\colon \frac{3}{7} \le t \le \frac{5}{3}\right\}$; $\left[\frac{3}{7}, \frac{5}{3}\right]$;

15. $\{x\colon -4 \le x \le 3\}$; $[-4, 3]$;

17. $\left\{x\colon x \le -\frac{1}{2} \text{ o } x > 1\right\}$; $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup (1, \infty)$;

19. Cualquier número negativo **21.** $t \le 5$

25.

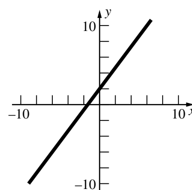


27. $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 20$ **29.** 5

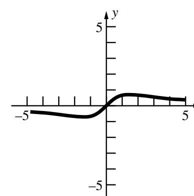
31. **(a)** $y = \frac{2}{9}x + \frac{13}{9}$; **(b)** $y = \frac{3}{2}x + 4$; **(c)** $y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$; **(d)** $x = -2$; **(e)** $y = x + 3$

33. (b)

35.



37.

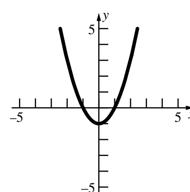


39. (0, 4) y (3, 7)

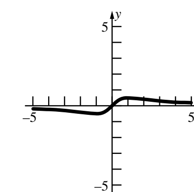
41. **(a)** $-\frac{1}{2}$; **(b)** 4; **(c)** No existe; **(d)** $\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t-1}$; **(e)** $\dfrac{t}{1+t} - t$

43. **(a)** $\{x \in \text{reales}\colon x \ne -1, 1\}$; **(b)** $\{x \in \text{reales}\colon |x| \le 2\}$;

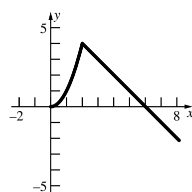
45. **(a)**



(b)

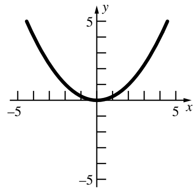


(c)

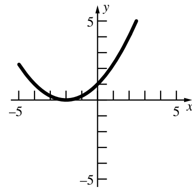


47. $V(x) = x(32 - 2x)(24 - 2x)$, $\{x \in \text{reales}: 0 \leq x \leq 12\}$

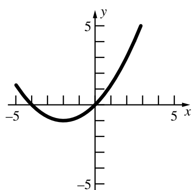
49. (a)



(b)



(c)



51. $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 1 + x, h(x) = x^2, k(x) = \sin x$
53. (a) -0.8; **(b)** -0.6; **(c)** -0.96; **(d)** -1.333;
(e) 0.8; **(f)** -0.8
55. 18.85 pulgadas.

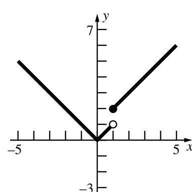
Problemas de repaso e introducción capítulo 1

1. (a) $0 < x < 2$; **(b)** $-6 < x < 8$
3. 4,10 **5.** 4,10
7. (a) $4 < x < 10$; **(b)** $4 \leq x \leq 10$; **(c)** $6 \leq x \leq 8$;
(d) $6.9 < x < 7.1$
9. (a) $x \neq 1$; **(b)** $x \neq 1, -0.5$
11. 1, 1.9, 1.99, 1.999, 2.001, 2.01, 2.1, 3; -1, -0.0357143, -0.0033557, -0.000333556, 0.000333111, 0.00331126, 0.03125, 0.2
13. $4.9 < x < 5.1$
15. (a) Verdadero; **(b)** Falso; **(c)** Verdadero; **(d)** Verdadero

Conjunto de problemas 1.1

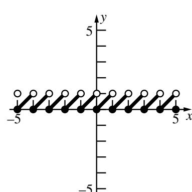
1. -2 **3.** -1 **5.** 0 **7.** 4 **9.** 12 **11.** $-2t$
13. $\frac{\sqrt{6}}{9}$ **15.** 36 **17.** 4 **19.** 0.5 **21.** 0 **23.** 2
25. 0 **27.** 0.25
29. (a) 2; **(b)** 1; **(c)** No existe; **(d)** $\frac{5}{2}$; **(e)** 2;
(f) No existe; **(g)** 2; **(h)** 1; **(i)** 2.5
31. (a) 2; **(b)** no definido; **(c)** 2; **(d)** 4; **(e)** no existe;
(f) no existe;

33.



(a) 0; **(b)** No existe; **(c)** 2; **(d)** 2

35.



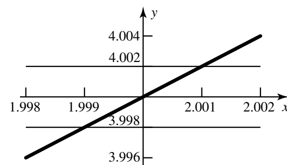
(a) 0; **(b)** No existe; **(c)** 1; **(d)** $\frac{1}{2}$

37. No existe;
39. (a) No existe; **(b)** 0
41. $a = -1, 0, 1$
43. (a) No existe; **(b)** -1; **(c)** -3; **(d)** No existe
45. (a) 1; **(b)** 0; **(c)** -1; **(d)** -1
47. No existe **49.** 0 **51.** $\frac{1}{2}$ **53.** No existe;
55. 6 **57.** -3

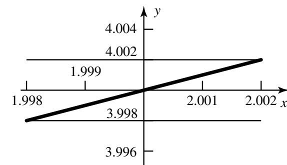
Conjunto de problemas 1.2

1. $0 < |t - a| < \delta \Rightarrow |f(t) - M| < \varepsilon$
3. $0 < |z - d| < \delta \Rightarrow |h(z) - P| < \varepsilon$
5. $0 < c - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

7. 0.001



9. 0.0019



31. (b), (c)
33. (a) $\dfrac{x^3 - x^2 - 2x - 4}{x^4 - 4x^3 + x^2 + x + 6}$; **(b)** No; **(c)** 3

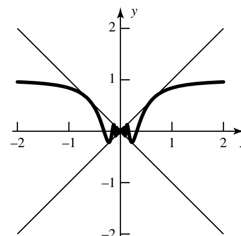
Conjunto de problemas 1.3

1. 3 **3.** -3 **5.** -5 **7.** 2 **9.** -1 **11.** 2 **13.** 0
15. -4 **17.** $-\frac{2}{3}$ **19.** $\frac{3}{2}$ **21.** $\dfrac{x + 2}{5}$ **23.** -1
25. $\sqrt{10}$ **27.** -6 **29.** 6 **31.** 12 **33.** $-\frac{1}{4}$ **41.** 0
43. 0 **45.** $\frac{2}{5}$ **47.** -1 **51. (a)** 1; **(b)** 0

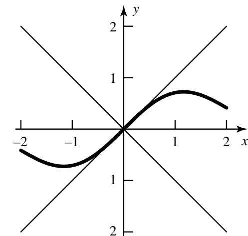
Conjunto de problemas 1.4

1. 1 **3.** 1 **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** 3 **9.** $\frac{1}{2\pi}$ **11.** 0 **13.** 7

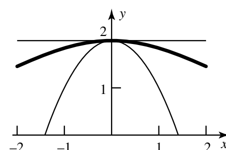
15. 0



17. 0



19. 2



Conjunto de problemas 1.5

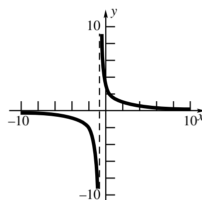
1. 1 **3.** −1 **5.** −1 **7.** $\frac{1}{2}$ **9.** $\frac{3}{\pi}$ **11.** $\frac{3}{\sqrt{2}}$

13. 2 **15.** $\frac{1}{2}$ **17.** ∞ **19.** 2 **21.** 0 **23.** $-\infty$

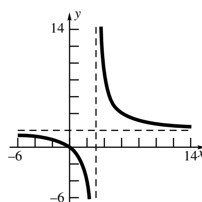
25. 1 **27.** ∞ **29.** ∞ **31.** ∞ **33.** $-\infty$ **35.** 5

37. 0 **39.** −1 **41.** $-\infty$

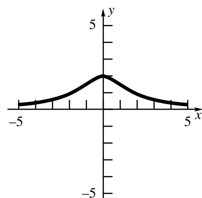
43. Asíntota horizontal $y = 0$
Asíntota vertical $x = -1$



45. Asíntota horizontal $y = 2$
Asíntota vertical $x = 3$



47. Asíntota horizontal $y = 0$
No tiene asíntotas verticales



49. La asíntota oblicua es $y = 2x + 3$.

51. (a) Decimos que $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$, si para cada número negativo M existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que
$0 < x - c < \delta \Rightarrow f(x) < M$.

(b) Decimos que $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$, si para cada número positivo M existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que
$0 < c - x < \delta \Rightarrow f(x) > M$.

55. (a) No existe **(b)** 0 **(c)** 1 **(d)** ∞ **(e)** 0
(f) $\frac{1}{2}$ **(g)** No existe **(h)** 0

57. $\frac{3}{2}$ **59.** $-\frac{3}{2\sqrt{2}}$ **61.** 1 **63.** ∞ **65.** −1

67. $-\infty$ **69.** e **71.** 1

Conjunto de problemas 1.6

1. Continua

3. No es continua; $\lim_{x\to 3} \frac{3}{x-3}$ y $h(3)$ no existen

5. No es continua; $\lim_{t\to 3} \frac{|t-3|}{t-3}$ y $h(3)$ no existen

7. Continua **9.** No es continua; $h(3)$ no existe

11. Continua **13.** Continua **15.** Continua

17. $(-\infty, -5), [-5, 4], (4, 6), [6, 8], (8, \infty)$

19. Definir $f(3) = -12$. **21.** Definir $H(1) = \frac{1}{2}$.

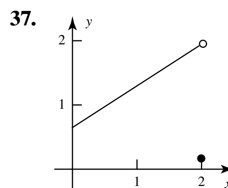
23. Definir $F(-1) = -\text{sen } 2$. **25.** $3, \pi$

27. Todo $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$, donde n es cualquier entero. **29.** −1

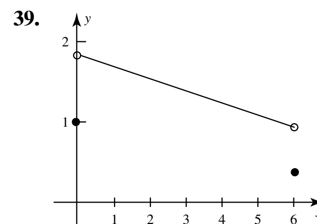
31. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ **33.** 1

35. Todo $t = n + \frac{1}{2}$, donde n es cualquier entero.

37.



39.



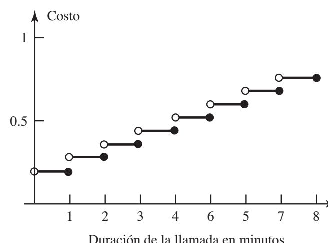
41. Continua.

43. Discontinua; removible, definir $f(0) = 1$

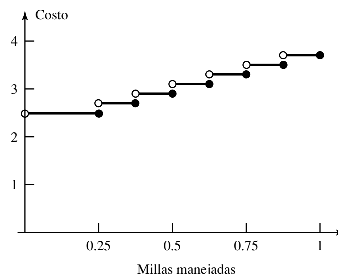
45. Discontinua, removible, redefinir $g(0) = 1$

47. Discontinua, no removible.

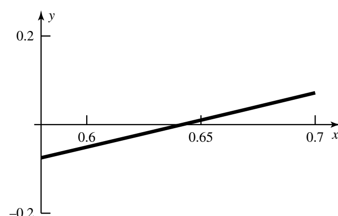
49. La función es continua en los intervalos $(0, 1], (1, 2], (2, 3], \ldots$



51. 51. La función es continua en los intervalos $(0, 0.25], (0.25, 0.375], (0.375, 0.5], \ldots$



55. El intervalo [0.6, 0.7] contiene a la solución.



65. Sí, g es continua.

71. (a) Dominio $\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$, Rango $\{-3/4, 0, 3/4\}$,

(b) Discontinua en $x = 0$ **(c)** $-\frac{3}{4}, 0, \frac{3}{4}$

1.7 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Falso **3.** Falso **5.** Falso **7.** Verdadero **9.** Falso
11. Verdadero **13.** Verdadero **15.** Falso **17.** Falso
19. Falso **21.** Verdadero **23.** Verdadero **25.** Verdadero
27. Verdadero **29.** Falso **31.** Verdadero

Problemas de examen

1. 0 **3.** 2 **5.** $\frac{1}{8}$ **7.** $\frac{1}{2}$ **9.** 4 **11.** -1 **13.** -1
15. $\frac{5}{3}$ **17.** 1 **19.** ∞ **21.** ∞
25. **(a)** $x = -1, 1$ **(b)** $f(-1) = -1$
27. **(a)** 14 **(b)** -12 **(c)** -2 **(d)** -2 **(e)** 5 **(f)** 0
29. $a = 2, b = -1$ **31.** Vertical: ninguna, Horizontal: $y = 0$
33. Vertical: $x = -1, 1$, Horizontal: $y = 1$
35. Vertical: $x = \pm\pi/4, \pm3\pi/4, \pm5\pi/4, \ldots$, Horizontal: ninguna

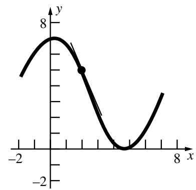
Problemas de repaso e introducción del capítulo 2

1. **(a)** 4 **(b)** 4.41 **(c)** 0.41 **(d)** 4.1 **(e)** $a^2 + 2ah + h^2$
(f) $2ah + h^2$ **(g)** $2a + h$ **(h)** $2a$
3. **(a)** $\sqrt{2} \approx 1.41$ **(b)** $\sqrt{2.1} \approx 1.45$ **(c)** 0.035 **(d)** 0.35
(e) $\sqrt{a+h}$ **(f)** $\sqrt{a+h} - \sqrt{a}$ **(g)** $\left(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}\right)/h$
(h) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$
5. **(a)** $a^3 + 3a^2b$ **(b)** $a^4 + 4a^3b$ **(c)** $a^5 + 5a^4b$
7. $\operatorname{sen}(x + h) = \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h$
9. **(a)** $(10, 0), (10, 0), (10, 0)$ **(b)** $t = 1/4$
11. **(a)** El avión hacia el norte ha recorrido 600 millas, el avión hacia el este ha recorrido 400 millas **(b)** 721 millas **(c)** 840 millas

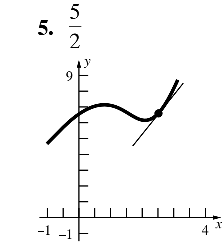
Conjunto de problemas 2.1

1. 4

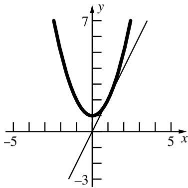
3. -2



5. $\frac{5}{2}$



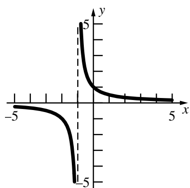
7. **(a), (b)**



(c) 2; **(d)** 2.01; **(e)** 2

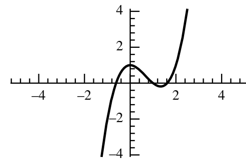
9. $-4, -2, 0, 2, 4$

11.



$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 1)$$

13. **(a)** 16 pies; **(b)** 48 pies; **(c)** 80 pies /s; **(d)** 96.16 pies /s; **(e)** 96 pies /s
15. **(a)** $\frac{1}{\sqrt{2\alpha + 1}}$ pies/s; **(b)** 1.5 seg
17. **(a)** 0.02005 g; **(b)** 2.005 g/h; **(c)** 2 g/h
19. **(a)** 49 g/cm; **(b)** 27 g/cm
21. 4 **23.** 29,167 gal/h; 75,000 gal/h
25. **(a)** 0.5 °F/día **(b)** 0.067 °F/día **(c)** Enero y julio **(d)** Marzo y noviembre
27. **(a)** Creciente **(b)** Decreciente
29. 24π km^2/día
31.



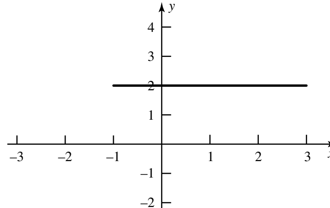
(a) 7; **(b)** 0; **(c)** -1; **(d)** 17.92

33. 2.818

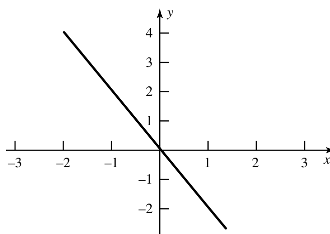
Conjunto de problemas 2.2

1. 2 **3.** 5 **5.** 2 **7.** $6x$ **9.** $2ax + b$
11. $3x^2 + 4x$ **13.** $-\frac{2}{x^2}$ **15.** $-\frac{12x}{(x^2+1)^2}$
17. $-\frac{7}{(x-4)^2}$ **19.** $\frac{3}{2\sqrt{3x}}$ **21.** $-\frac{3}{2(x-2)^{3/2}}$
23. $2x - 3$ **25.** $-\frac{5}{(x-5)^2}$ **27.** $f(x) = 2x^3$ en $x = 5$
29. $f(x) = x^2$ en $x = 2$ **31.** $f(x) = x^2$ en x
33. $f(t) = \frac{2}{t}$ en t **35.** $f(x) = \cos x$ en x

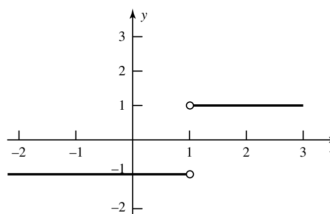
37.



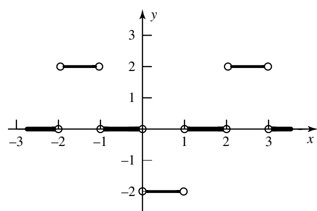
39.



41.



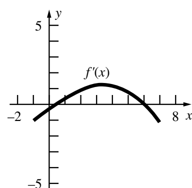
43.



45. 1.5 **47.** −0.1667 **49.** 0.0081 **51.** $2x$

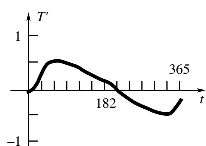
53. $-1/(x+1)^2$ **55.** $2/(x+1)^2$ **57.** $-\frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, -3$

59.



61. **(a)** $\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$, 1.8, −0.6; **(b)** 0.5; **(c)** 5; **(d)** 3, 5; **(e)** 1, 3, 5; **(f)** 0; **(g)** −0.7, 1.5, (5, 7)

63.

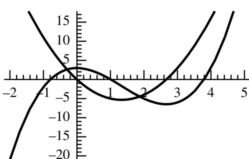


65. f aparece con trazos pequeños y discontinuos; $g = f'$ es línea continua; g' aparece con trazos largos y discontinuos

67. $m = 4, b = -4$

69. **(a)** m; **(b)** $-m$

71.



(a) $\left(0, \frac{8}{3}\right)$; **(b)** $\left[0, \frac{8}{3}\right]$; **(c)** $f(x)$ decrece conforme x aumenta cuando $f'(x) < 0$.

Conjunto de problemas 2.3

1. $4x$ **3.** π **5.** $-4x^{-3}$ **7.** $-\dfrac{\pi}{x^2}$ **9.** $-\dfrac{500}{x^6}$

11. $2x + 2$ **13.** $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

15. $7\pi x^6 - 10x^4 + 10x^{-3}$ **17.** $-\dfrac{9}{x^4} - 4x^{-5}$

19. $-\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$ **21.** $-\dfrac{1}{2x^2} + 2$ **23.** $3x^2 + 1$

25. $8x + 4$ **27.** $5x^4 + 6x^2 + 2x$

29. $5x^4 + 42x^2 + 2x - 51$ **31.** $60x^3 - 30x^2 - 32x + 14$

33. $-\dfrac{6x}{(3x^2+1)^2}$ **35.** $\dfrac{-8x+3}{(4x^2-3x+9)^2}$ **37.** $\dfrac{2}{(x+1)^2}$

39. $\dfrac{6x^2+20x+3}{(3x+5)^2}$ **41.** $\dfrac{4x^2+4x-5}{(2x+1)^2}$ **43.** $\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

45. **(a)** 23; **(b)** 4; **(c)** $-\frac{17}{9}$

49. $y = 1$ **51.** $(0, 0)$ y $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)$

53. (2.817, 0.563) y (−2.817, −0.563)

55. **(a)** −24 ft/s; **(b)** 1.25 s

57. $y = 2x + 1, y = -2x + 9$ **59.** $3\sqrt{5}$

61. 681 cm^3 por semana

Conjunto de problemas 2.4

1. $2\cos x - 3\operatorname{sen} x$ **3.** 0 **5.** $\sec x \tan x$ **7.** $\sec^2 x$

9. $\sec^2 x$ **11.** $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ **13.** $\dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$

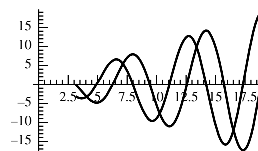
15. $-x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x$ **17.** $2\tan x \sec^2 x$

19. $y - 0.5403 = -0.8415(x - 1)$ **21.** $-2\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x$

23. $30\sqrt{3}$ pies/sec **25.** $y = x$

27. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ donde k es un entero.

33. **(a)**



(b) 6; 5; **(c)** Un contraejemplo es $f(x) = x \operatorname{sen} x$ con $a = 0$ y $b = \pi$. **(d)** 24.93

Conjunto de problemas 2.5

1. $15(1+x)^{14}$ **3.** $-10(3-2x)^4$

5. $11(3x^2 - 4x + 3)(x^3 - 2x^2 + 3x + 1)^{10}$

7. $-\dfrac{5}{(x+3)^6}$ **9.** $(2x+1)\cos(x^2+x)$

11. $-3\operatorname{sen} x \cos^2 x$ **13.** $-\dfrac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}$

15. $-\dfrac{3x^2+12x}{(x+2)^2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{3x^2}{x+2}\right)$

17. $2(3x-2)(3-x^2)(9+4x-9x^2)$

19. $\dfrac{(x+1)(3x-11)}{(3x-4)^2}$ **21.** $4x(x^2+4)$

23. $\dfrac{51(3t-2)^2}{(t+5)^4}$ **25.** $\dfrac{(6t+47)(3t-2)^2}{(t+5)^2}$

27. $\dfrac{3\operatorname{sen}^2 x(\cos x\cos 2x + 2\operatorname{sen} x\operatorname{sen} 2x)}{\cos^4 2x}$ **29.** 9.6

31. 1.4183 **33.** $4(2x+3)\operatorname{sen}^3(x^2+3x)\cos(x^2+3x)$

35. $-3\operatorname{sen} t\operatorname{sen}^2(\cos t)\cos(\cos t)$

37. $-8\theta\cos^3(\operatorname{sen}\theta^2)\operatorname{sen}(\operatorname{sen}\theta^2)(\cos\theta^2)$

39. $-2\cos[\cos(\operatorname{sen} 2x)]\operatorname{sen}(\operatorname{sen} 2x)(\cos 2x)$

41. 2 **43.** 1 **45.** −1 **47.** $2F'(2x)$

49. $-2(F(t))^{-3}F'(t)$ **51.** $4(1 + F(2z))F'(2z)$

53. $-\operatorname{sen} xF'(\cos x)$ **55.** $2F'(2x)\sec^2(F(2x))$

57. $2F(x)F'(x)\operatorname{sen} F(x)\cos F(x) + F'(x)\operatorname{sen}^2 F(x)$

59. $-2\operatorname{sen} 1$ **61.** −1 **63.** $x = \pi/4 + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

65. $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}$ **67.** $x = 3/2$

69. **(a)** $(10\cos 8\pi t, 10\operatorname{sen} 8\pi t)$; **(b)** 80π cm/s

71. **(a)** $(\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$; **(b)** $\operatorname{sen} 2\pi t + \sqrt{25 - \cos^2 2\pi t}$;

(c) $2\pi\cos 2\pi t\left(1 + \dfrac{\operatorname{sen} 2\pi t}{\sqrt{25 - \cos^2 2\pi t}}\right)$

73. 0.38 pulgadas/min **75.** $x_0 = \pi/3; \theta = 1.25$ rad.

79. $\cot x|\operatorname{sen} x|$ **81.** 16

Conjunto de problemas 2.6

1. 6 **3.** 162 **5.** $-343\cos(7x)$ **7.** $-\dfrac{6}{(x-1)^4}$

9. 2 **11.** $\frac{1}{2}$ **13.** $2\pi^2$ **15.** −900

19. **(a)** 0; **(b)** 0; **(c)** 0

21. $f''(-5) = -24; f''(3) = 24$

23. **(a)** $v(t) = 12 - 4t; a(t) = -4$ **(b)** $(-\infty, 3)$; **(c)** $(3, \infty)$; **(d)** Para toda t; **(e)**

25. **(a)** $v(t) = 3t^2 - 18t + 24; a(t) = 6t - 18$; **(b)** $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$; **(c)** $(2, 4)$; **(d)** $(-\infty, 3)$; **(e)**

27. **(a)** $v(t) = 2t - \dfrac{16}{t^2}; a(t) = 2 + \dfrac{32}{t^3}$; **(b)** $(2, \infty)$; **(c)** $(0, 2)$; **(d)** No; **(e)**

29. $v(1) = 11; v(4) = -16$

31. **(a)** $\frac{3}{4}$s; **(b)** $\frac{1}{2}$s, $\frac{3}{4}$s; **(c)** 0 s, $\frac{3}{2}$s

33. **(a)** 48 pies/s; **(b)** $\frac{3}{2}$s; **(c)** 292 pies; **(d)** 5.77 s; **(e)** 137 pies/s

35. 581 pies/s **37.** $(-\infty, -2) \cup (1, 4)$

39. $D_x^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_x^{n-k}(u) D_x^k(v)$ donde $\binom{n}{k}$ es el coeficiente binomial $\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

41. **(a)** **(b)** -1.2826

Conjunto de problemas 2.7

1. $\dfrac{x}{y}$ **3.** $-\dfrac{y}{x}$ **5.** $\dfrac{1 - y^2}{2xy}$ **7.** $\dfrac{12x^2 + 7y^2}{6y^2 - 14xy}$

9. $\dfrac{y^3 - \dfrac{5y}{2\sqrt{5xy}}}{\dfrac{5x}{2\sqrt{5xy}} + 2 - 2y - 3xy^2}$ **11.** $-\dfrac{y}{x}$

13. $y - 3 = -\frac{9}{7}(x - 1)$ **15.** $y = 1$

17. $y + 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$ **19.** $5x^{2/3} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

21. $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$ **23.** $\dfrac{3x - 2}{2\sqrt[4]{(3x^2 - 4x)^3}}$

25. $-\dfrac{6x^2 + 4}{3\sqrt[3]{(x^3 + 2x)^5}}$ **27.** $\dfrac{2x + \cos x}{2\sqrt{x^2 + \operatorname{sen} x}}$

29. $-\dfrac{x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x}{3\sqrt[3]{(x^2 \operatorname{sen} x)^4}}$ **31.** $-\dfrac{(x + 1)\operatorname{sen}(x^2 + 2x)}{2\sqrt[4]{[1 + \cos(x^2 + 2x)]^3}}$

33. $\dfrac{ds}{dt} = -\dfrac{s^2 + 3t^2}{2st}; \dfrac{dt}{ds} = -\dfrac{2st}{s^2 + 3t^2}$

35. $\sqrt{3}y + x = 0, \sqrt{3}y - x = 0$

37. **(a)** $y' = -\dfrac{y}{x + 3y^2}$; **(b)** $y'' = \dfrac{2xy}{(x + 3y^2)^3}$

39. -15; **45.** $\theta \approx 2.0344$

47. $y = 2(x + 4); y = 2(x - 4)$ **49.** $\frac{13}{3}$

Conjunto de problemas 2.8

1. 1296 pulg^3/s **3.** 392 mi/h **5.** 471 mi/h **7.** 0.258 pies/s

9. 0.0796 pies/s **11.** $\frac{1}{12}$ pies/min **13.** 1.018 pulg^2/s

15. 15.71 km/min

17. **(a)** $\frac{1}{2}$ pies/s; **(b)** $\frac{5}{2}$ pies/s **(c)** $\frac{1}{24}$ rad/s

19. 110 pies/s **21.** -0.016 pies/h **23.** 13.33 pies/s

25. 4049 pies^3/h

27. **(a)** -1.125 pies/s; **(b)** -0.08 pies/s^2

29. **(b)** 3 horas

31. $\frac{16}{3}$ pies/s cuando la niña está al menos 30 pies alejada del poste y $\frac{80}{17}$ pies/s cuando ella está a menos de 30 pies del poste.

Conjunto de problemas 2.9

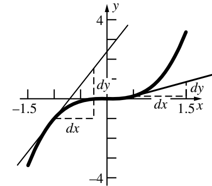
1. $dy = (2x + 1)\,dx$ **3.** $dy = -8(2x + 3)^{-5}\,dx$

5. $dy = 3(\operatorname{sen} x + \cos x)^2(\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx$

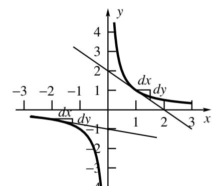
7. $dy = -\frac{3}{2}(14x + 3)(7x^2 + 3x - 1)^{-5/2}\,dx$

9. $ds = \frac{3}{2}(2t + \csc^2 t)\sqrt{t^2 - \cot t + 2}\,dt$

11.



13.



15. **(a)** $\Delta y = -\frac{1}{3}$ **(b)** $\Delta y = -0.3$

17. **(a)** $\Delta y = 67$ $dy = 34$ **(b)** $\Delta y \approx 0.1706$ $dy = 0.17$

19. 5.9917 **21.** 39.27 cm^3 **23.** 893 pies^3 **25.** 12.6 pies

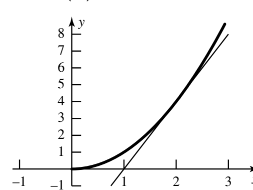
27. 4189 ± 62.8 cm^3; error relativo ≈ 0.015

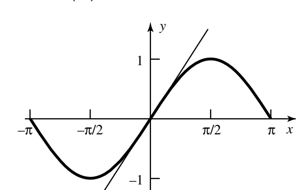
29. 79.097 ± 0.729 cm; error relativo ≈ 0.0092

31. $dy = 0.01; |\Delta y - dy| \le 0.000003$ **33.** 8.0125

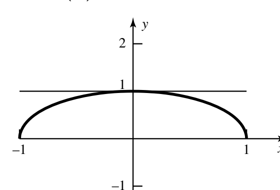
35. 754 cm^3

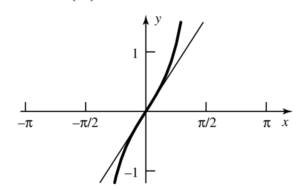
37. $L(x) = 4x - 4$ **39.** $L(x) = x$





41. $L(x) = 1$ **43.** $L(x) = x$





45. $L(x) = f(x)$

2.10 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Falso **3.** Verdadero **5.** Verdadero **7.** Verdadero **9.** Verdadero **11.** Verdadero **13.** Falso **15.** Verdadero **17.** Falso **19.** Verdadero **21.** Verdadero **23.** Verdadero **25.** Verdadero **27.** Falso **29.** Verdadero **31.** Verdadero **33.** Verdadero **35.** Verdadero **37.** Falso

Problemas de examen

1. **(a)** $9x^2$; **(b)** $10x^4 + 3$; **(c)** $-\dfrac{1}{3x^2}$; **(d)** $-\dfrac{6x}{(3x^2+2)^2}$;
(e) $\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}$; **(f)** $3\cos 3x$; **(g)** $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$; **(h)** $-\pi \operatorname{sen} \pi x$

3. **(a)** $f(x) = 3x$ en $x = 1$; **(b)** $f(x) = 4x^3$ en $x = 2$;
(c) $f(x) = \sqrt{x^3}$ en $x = 1$; **(d)** $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = \pi$;
(e) $f(x) = \dfrac{4}{x}$ en x; **(f)** $f(x) = -\operatorname{sen} 3x$ en x;
(g) $f(x) = \tan x$ en $x = \dfrac{\pi}{4}$; **(h)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en $x = 5$

5. $15x^4$ **7.** $3z^2 + 8z + 2$ **9.** $\dfrac{-24t^2 + 60t + 10}{(6t^2 + 2t)^2}$

11. $\dfrac{-4x^4 + 10x^2 + 2}{(x^3 + x)^2}$ **13.** $-\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$

15. $-\operatorname{sen}\theta + 6\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta - 3\cos^3\theta$ **17.** $2\theta\cos(\theta^2)$

19. $2\pi \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\pi\theta))\cos(\operatorname{sen}(\pi\theta))\cos(\pi\theta)$ **21.** $3\sec^2 3\theta$

23. 672 **25.** $\dfrac{-\csc^2 x - 2x\cot x\tan x^2}{\sec x^2}$ **27.** $16 - 4\pi$

29. 458.8

31. $F'(r(x) + s(x))(r''(x) + s''(x))$
$+ (r'(x) + s'(x))^2 F''(r(x) + s(x)) + s''(x)$

33. $27z^2\cos(9z^3)$

35. 314 m^3 por metro aumenta el radio **37.** 0.167 pies/min

39. **(a)** $(1, 3)$ **(b)** $a(1) = -6, a(3) = 6$; **(c)** $(2, \infty)$

41. **(a)** $\dfrac{1-x}{y}$; **(b)** $-\dfrac{y^2 + 2xy}{x^2 + 2xy}$; **(c)** $\dfrac{x^2y^3 - x^2}{y^2 - x^3y^2}$;
(d) $\dfrac{2x - \operatorname{sen}(xy) - xy\cos(xy)}{x^2\cos(xy)}$; **(e)** $-\dfrac{\tan(xy) + xy\sec^2(xy)}{x^2\sec^2(xy)}$

43. 0.0714

45. **(a)** 84; **(b)** 23; **(c)** 20; **(d)** 26

47. 104 mi/h

49. **(a)** $\cot\theta\,|\operatorname{sen}\theta|$; **(b)** $-\tan\theta\,|\cos\theta|$

Problemas de repaso e introducción del capítulo 3

1. $(2, 3)$ **3.** $(-\infty, 0] \cup [1, 2]$

5. $(-\infty, -2) \cup [0, 2) \cup (2, \infty)$

7. $8(2x + 1)^3$ **9.** $-2(x^2 - 1)\operatorname{sen} 2x + 2x\cos 2x$

11. $6(\sec^2 3x)(\tan 3x)$ **13.** $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

15. $x = k\pi$, donde k es un entero

17. $x = (2k + 1)\pi/2$, donde k es un entero

19. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{4} + \dfrac{4-x}{10}$

21. **(a)** $x^2 + 3$ es una de tales funciones
(b) $-\cos x + 8$ es una de tales funciones
(c) $\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x + 2$ es una de tales funciones

Conjunto de problemas 3.1

1. Puntos críticos: $-2, 0, 2, 4$; valor máximo 10; valor mínimo 1

3. Puntos críticos: $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$; valor máximo 3; valor mínimo 1

5. Puntos críticos: $-4, -2, 0$; valor máximo 4; valor mínimo 0

7. Puntos críticos: $-2, -\frac{3}{2}, 1$; valor máximo 4; valor mínimo $-\frac{9}{4}$

9. Puntos críticos: $-1, 1$; no hay valor máximo; valor mínimo -1

11. Puntos críticos: $-1, 3$; no hay valor máximo; no hay valor mínimo

13. Puntos críticos: $-2, -1, 0, 1, 2$; valor máximo 10; valor mínimo 1

15. Punto crítico: 0; valor máximo 1; no hay valor mínimo

17. Puntos críticos: $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$; valor máximo $\frac{1}{2}$; valor mínimo $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

19. Puntos críticos: 0, 1, 3; valor máximo 2; valor mínimo 0

21. Puntos críticos: $-1, 0, 27$; valor máximo 3; valor mínimo -1

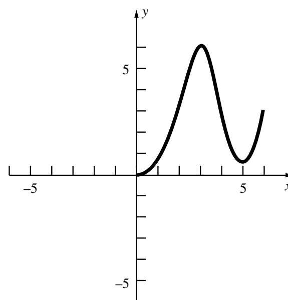
23. Puntos críticos: $0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 8\pi$; valor máximo 1; valor mínimo -1

25. Puntos críticos: $-\dfrac{\pi}{4}, 0, \dfrac{\pi}{4}$; valor máximo $\dfrac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$; valor mínimo 0

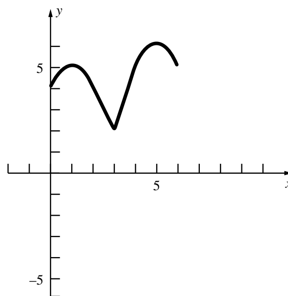
27. **(a)** Puntos críticos: $-1, 2 - \dfrac{\sqrt{33}}{3}, 2 + \dfrac{\sqrt{33}}{3}, 5$; valor máximo ≈ 2.04; valor mínimo ≈ -26.04

(b) Puntos críticos: $-1, -0.4836, 2 - \dfrac{\sqrt{33}}{3}, 0.7172, 2 + \dfrac{\sqrt{33}}{3}, 5$; valor máximo ≈ 26.04; valor mínimo $= 0$

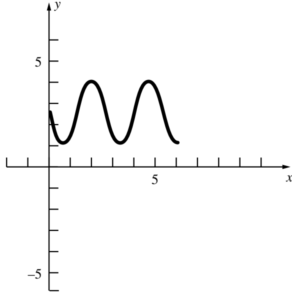
29. Las respuestas variarán. Una posibilidad:



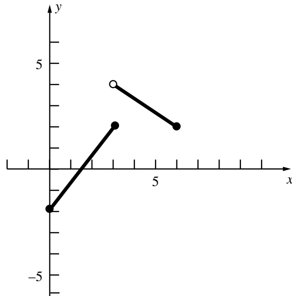
31. Las respuestas variarán. Una posibilidad:



33. Las respuestas variarán. Una posibilidad:



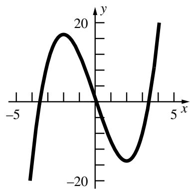
35. Las respuestas variarán. Una posibilidad:



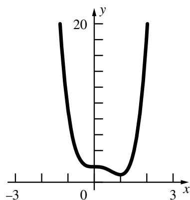
Conjunto de problemas 3.2

1. Creciente en $(-\infty, \infty)$
3. Creciente en $[-1, \infty)$,decreciente en $(-\infty, -1]$
5. Creciente en $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$, decreciente en $[1, 2]$
7. Creciente en $[2, \infty)$, decreciente en $(-\infty, 2]$
9. Creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, decreciente en $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$
11. Cóncava hacia arriba para toda x; no hay puntos de inflexión
13. Cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$, cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$; punto de inflexión $(0, 0)$.
15. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$, cóncava hacia abajo en $(-1, 4)$; puntos de inflexión $(-1, -19)$ y $(4, -499)$
17. Cóncava hacia arriba para toda x; no hay puntos de inflexión

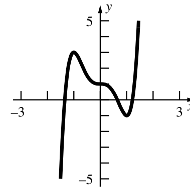
19. Creciente en $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$; decreciente en $[-2, 2]$; cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$, cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$



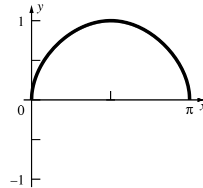
21. Creciente en $[1, \infty)$, decreciente en $(-\infty, 1]$; cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$, cóncava hacia abajo en $\left(0, \frac{2}{3}\right)$



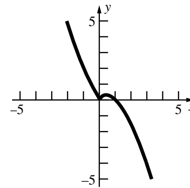
23. Creciente en $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, decreciente en $[-1, 1]$; cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$, cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.



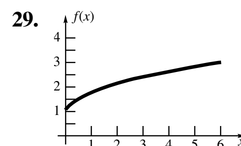
25. Creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, decreciente en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; cóncava hacia abajo en $(0, \pi)$.



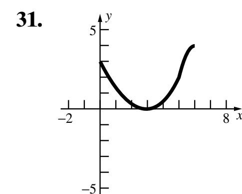
27. Creciente en $\left[0, \frac{2}{5}\right]$, decreciente en $\left(-\infty, 0\right] \cup \left[\frac{2}{5}, \infty\right)$; cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\frac{1}{5}\right)$, cóncava hacia abajo en $\left(-\frac{1}{5}, 0\right) \cup (0, \infty)$.



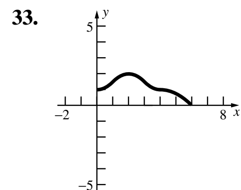
29.



31.



33.



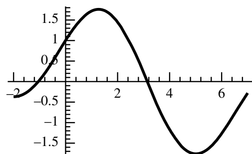
41. $a = \frac{39}{8}, b = \frac{13}{2}$

43. **(a)** No se necesita otra condición;

(b) $f(x) > -\dfrac{f'(x)}{g'(x)}g(x)$ para toda x;

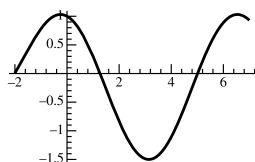
(c) No se necesita otra condición

45. **(a)**

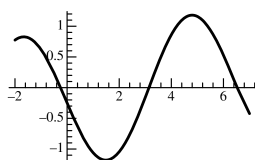


(b) $(1.3, 5)$; **(c)** $(-0.25, 3.1) \cup (6.5, 7]$

(d)



(e)



47. $[-0.598, 0.680]$

49. **(a)** $\dfrac{ds}{dt} = ks$, k una constante; **(b)** $\dfrac{d^2s}{dt^2} > 0$

(c) $\dfrac{d^3s}{dt^3} < 0, \dfrac{d^2s}{dt^2} > 0$ **(d)** $\dfrac{d^2s}{dt^2} = 10$ mph/min

(e) $\dfrac{ds}{dt}$ y $\dfrac{d^2s}{dt^2}$ tienden a cero **(f)** $\dfrac{ds}{dt}$ es constante.

51. **(a)** $\dfrac{dC}{dt} > 0, \dfrac{d^2C}{dt^2} > 0$, donde C es el costo del automóvil. Cóncava hacia arriba.

(b) $f(t)$ es el consumo de petróleo en el instante t. $\dfrac{df}{dt} < 0, \dfrac{d^2f}{dt^2} > 0$. Cóncava hacia arriba.

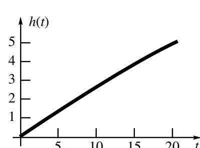
(c) $\dfrac{dP}{dt} > 0, \dfrac{d^2P}{dt^2} < 0$, donde P es la población mundial. Cóncava hacia abajo.

(d) $\dfrac{d\theta}{dt} > 0, \dfrac{d^2\theta}{dt^2} > 0$, donde θ es el ángulo que forma la torre con la vertical. Cóncava hacia arriba.

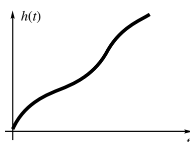
(e) $P = f(t)$ es la utilidad en el instante t. $\dfrac{dP}{dt} > 0, \dfrac{d^2P}{dt^2} < 0$. Cóncava hacia abajo.

(f) R es el ingreso en el instante t, $R < 0, \dfrac{dR}{dt} > 0$. Podría ser cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

53. $h(t) = \sqrt[3]{\dfrac{2400}{\pi}t + 27000} - 30$



55.



57. **(a)**

Profundidad	V	$A \approx \Delta V$	$r \approx \sqrt{\Delta V/\pi}$
1	4	4	1.13
2	8	4	1.13
3	11	3	0.98
4	14	3	0.98
5	20	6	1.38
6	28	8	1.60

(b)

Profundidad	V	$A \approx \Delta V$	$r \approx \sqrt{\Delta V/\pi}$
1	4	4	1.13
2	9	5	1.26
3	12	3	0.98
4	14	2	0.80
5	20	6	1.38
6	28	8	1.60

Conjunto de problemas 3.3

1. Puntos críticos: 0, 4; mínimo local en $x = 4$; máximo local en $x = 0$

3. No hay puntos críticos, no hay mínimos ni máximos locales en $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

5. Punto crítico: 0; mínimo local en $\theta = 0$

7. Puntos críticos: -2, 2; mínimo local en $x = -2$; máximo local en $x = 2$

9. Punto crítico $-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$; mínimo local en $-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

11. Puntos críticos: -1, 1; valor mínimo local $f(1) = -2$; valor máximo local $f(-1) = 2$

13. Puntos críticos: $0, \frac{3}{2}$; valor mínimo local $0, \frac{3}{2}$; no hay máximo local

15. Puntos críticos: 2; no hay valores mínimos locales; valor máximo local $g(2) = \pi$

17. No hay puntos críticos.
No hay valores mínimo ni máximo locales

19. No hay puntos críticos.
No hay valores mínimo ni máximo locales

21. Valor máximo $f(\pi/4) = 1$; valor mínimo $f(0) = f(\pi/2) = 0$

23. Valor máximo $g(4) = \dfrac{1}{6}$; valor mínimo $g(0) = 0$

25. Valor máximo $F(9/16) = 9/4$; valor mínimo $F(4) = -4$

27. Valor mínimo $f(\tan^{-1}(4/3)) = 125$; no hay valor máximo

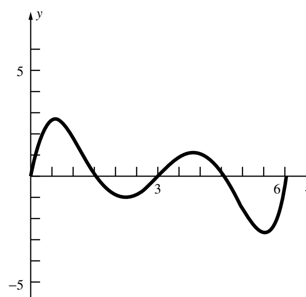
29. Valor máximo $H(-2) = H(2) = 3$; valor mínimo $H(-1) = H(1) = 0$

31. Mínimo local en $x = 0$

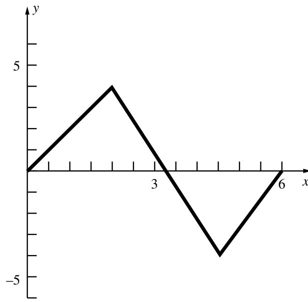
33. Mínimo local en $x = 4$; máximo local en $x = 3$

35. No hay extremos locales

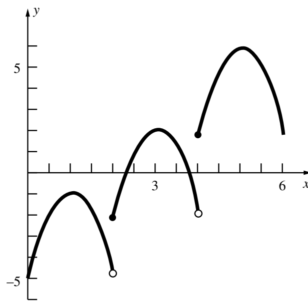
37. Las respuestas pueden variar. Una posibilidad:



39. Las respuestas pueden variar. Una posibilidad:



41. Las respuestas pueden variar. Una posibilidad:



45. f tiene un punto de inflexión en c.

Conjunto de problemas 3.4

1. -4 y 4 **3.** $\frac{1}{16}$ **5.** $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{9}{2}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{9}{2}\right)$ **7.** $\frac{1}{2}$

9. 1024 pulg^3 **11.** $x = 10$ pies, $y = 40$ pies

13. $x = 15\sqrt{3}$ pies, $y = 20\sqrt{3}$ pies

15. $x = \dfrac{10\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ pies, $y = 6\sqrt{15}$ pies **17.** $P(2\sqrt{2}, 2), Q(0, 0)$

19. $\dfrac{6}{\sqrt{7}}$ millas hacia abajo de la costa medidos desde P.

21. En el pueblo

23. alrededor de las 8:09 a.m. **25.** $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9}r^3$

27. $h = \sqrt{2}r, x = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ donde h = altura del cilindro, x = radio del cilindro, r = radio de la esfera

29. **(a)** 43.50 cm de uno de los extremos; la longitud más corta se dobla para formar un cuadrado
(b) No cortar, doblar el alambre para formar un cuadrado.

31. altura $= \left(\dfrac{3V}{\pi}\right)^{1/3}$, radio $= \frac{1}{2}\left(\dfrac{3V}{\pi}\right)^{1/3}$

33. $r = \sqrt{A}, \theta = 2$ **35.** 4 por 8

37. $r = \sqrt{A/(6\pi)}, \quad h = 2r$

39. El área máxima es para un cuadrado. **41.** $\pi/3$

43. $x = 1, y = 3, z = 3$

45. **(a)** $x = 2a/3$ maximiza el área de A.
(b) $x = 2a/3$ minimiza el área de B.
(c) $x = 3a/4$ minimiza la longitud z.

47. **(a)** $L' = 3, L = 4, \phi = 90°$; **(b)** $L' = 5, L = 12, \phi = 90°$;
(c) $\phi = 90°, L = \sqrt{m^2 - h^2}, L' = h$

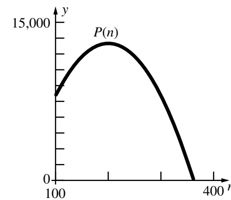
49. $t \approx 13.8279$, distancia ≈ 0.047851 millones de millas

51. $5\sqrt{5}$ pies

53. **(a)** $b = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - 5\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ **(b)** $b \approx 3.0119$
(c) 50.179 horas

55. $p(n) = 300 - \dfrac{n}{2}; R(n) = 300n - \dfrac{n^2}{2}$

57. $n = 200$



59. $1.92 por unidad; $1.33

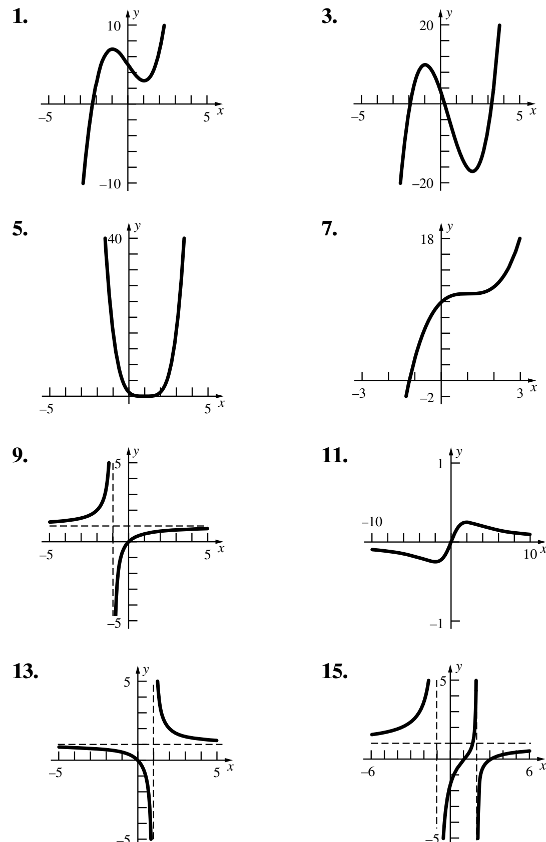
61. **(a)** $R(x) = 20x + 4x^2 - \dfrac{x^3}{3}; \dfrac{dR}{dx} = 20 + 8x - x^2$
(b) $0 \le x \le 10$ **(c)** 4

63. $x_1 = 25, \dfrac{dR}{dx} = 0$ en x_1

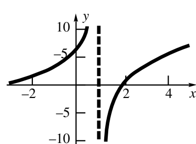
65. **(a)** No.
(b) $x = 500$.

67. $P(300) = \$2410$

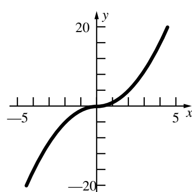
Conjunto de problemas 3.5



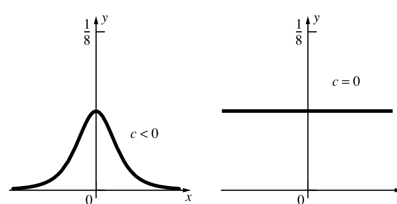
17.

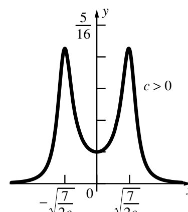


19.

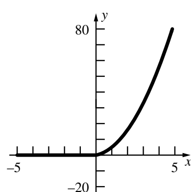


45.

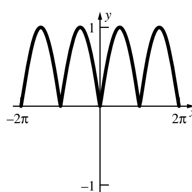




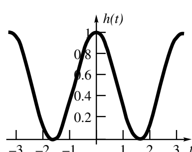
21.



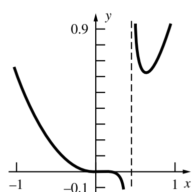
23.



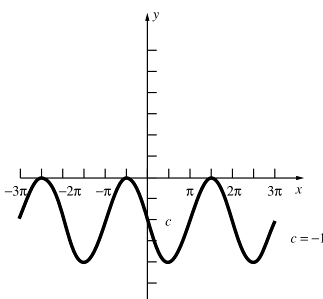
25.



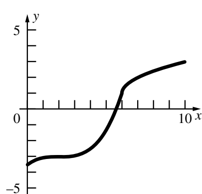
27.



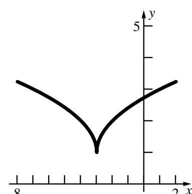
47.

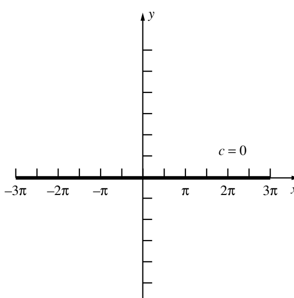


29.

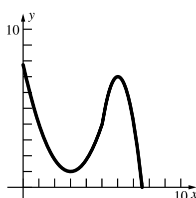


31.

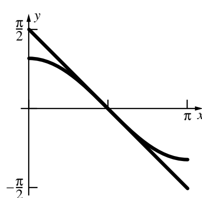


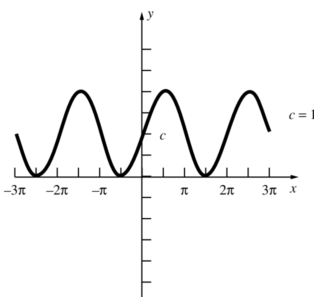


33.

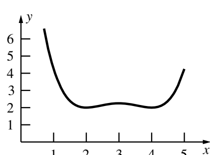


35.

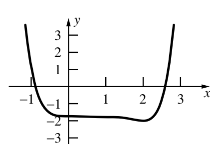




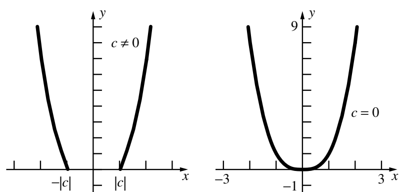
37.



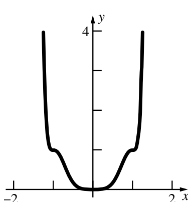
39.



43.

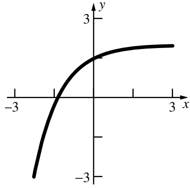


49.

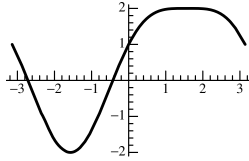


51. (a) No es posible; **(b)** No es posible

(c)



53. (a)

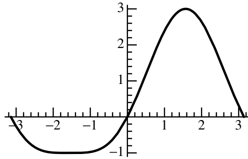


Mínimo global: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2$

Máximo global: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

Puntos de inflexión:$\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right), \left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$

(b)

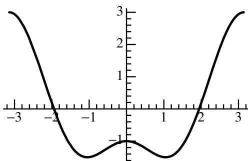


Mínimo global: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

Máximo global:$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

Puntos de inflexión: $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5}{4}\right)$

(c)

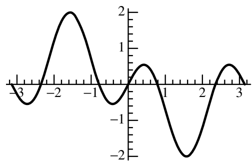


Mínimo global: $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1.5$

Máximo global: $f(-\pi) = f(\pi) = 3$

Puntos de inflexión: $\approx(-2.206, 0.890)$, $(-0.568, -1.265)$, $(0.568, -1.265)$, $(2.206, 0.890)$

(d)

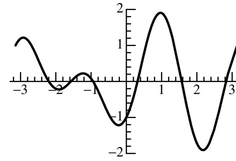


Mínimo global: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$

Máximo global: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$

Punto de inflexión: $(0, 0)$, $\approx(-2.126, 0.755)$, $(-1.016, 0.755)$, $(1.016, -0.755)$, $(2.126, -0.755)$

(e)



Mínimo global: $f(2.17) \approx -1.9$

Máximo global: $f(0.97) \approx 1.9$

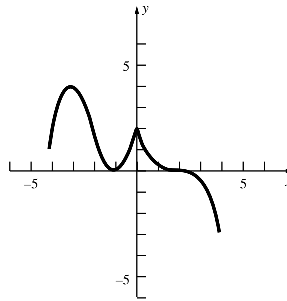
Puntos de inflexión: $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\approx(-2.469, 0.542)$, $(-0.673, -0.542)$, $(0.413, 0.408)$, $(2.729, -0.408)$

55. (a) Creciente en $(-\infty, -3] \cup [-1, 0]$; decreciente en $[-3, -1] \cup [0, \infty)$;

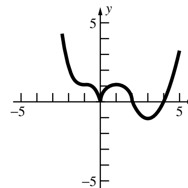
(b) Cóncava hacia arriba en $(-2, 0) \cup (0, 2)$; cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

(c) Máximo local en $x = -3$; mínimo local en $x = -1$;

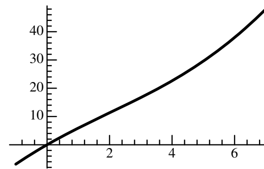
(d) $x = -2, 2$



57.



59. (a)

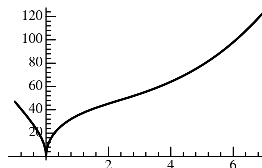


Mínimo global: $f(-1) \approx -6.9$

Máximo global: $f(7) \approx 48.0$

Punto de inflexión: $\approx (2.02, 11.4)$

(b)

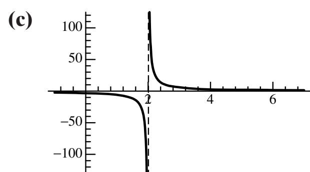


Mínimo global: $f(0) = 0$

Máximo global: $f(7) \approx 124.4$

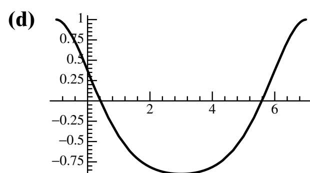
Punto de inflexión: $\approx (2.34, 48.09)$

(c)



No hay máximo ni mínimo globales.
No hay puntos de inflexión.

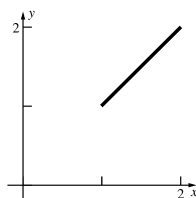
(d)



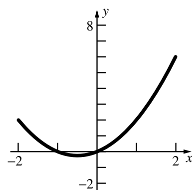
Mínimo global: $f(3) \approx -0.9$
Máximo global: $f(-1) = f(7) \approx 1.0$
Puntos de inflexión: $\approx (0.05, 0.3), (5.9, 0.3)$

Conjunto de problemas 3.6

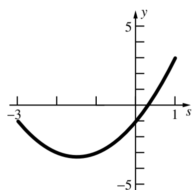
1. $1 < c < 2$



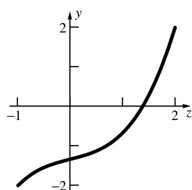
3. $c = 0$



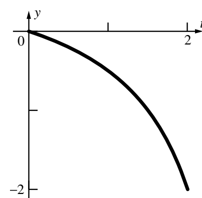
5. $c = -1$



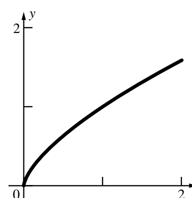
7. $c = 1$



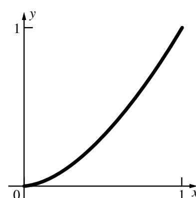
9. $c = 3 - \sqrt{3} \approx 1.27$



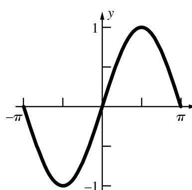
11. $c = \frac{16}{27} \approx 0.59$



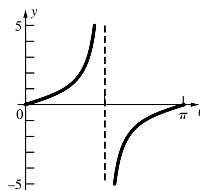
13. $c = \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} \approx 0.46$



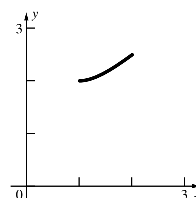
15. $c = \pm\frac{\pi}{2}$



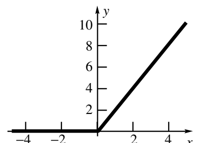
17. No aplica, $T(\theta)$ no es continua en $\theta = \frac{\pi}{2}$



19. $c = \sqrt{2} \approx 1.41$



21. No se aplica, $f(x)$ no es diferenciable en $x = 0$

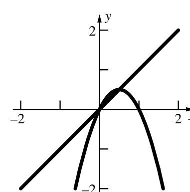


23. $\approx 1.5, 3.75, 7$

Conjunto de problemas 3.7

1. 1.46 **3.** 1.11 **5.** −0.12061 **7.** 3.69815
9. 0.45018 **11.** 2, 0.58579, 3.41421 **13.** 0.48095
15. 1.81712
17. Mínimo $f(-0.60583) \approx -0.32645$; máximo $f(1) = 4$
19. Mínimo $f(4.493409) \approx -0.21723$;
máximo $f(7.725252) \approx 0.128375$
21. 0.9643 **23.** **(c)** $i = 0.0151308$; $r = 18.157\%$
25. 0.91486 **27.** 2.21756

29. **(a)**



(b) 0.5; **(c)** $\frac{1}{2}$;

31. **(a)** $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1.4142136, x_4 = 1.553774$, $x_5 = 1.5980532$; **(b)** $x = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) \approx 1.618034$
(c) $x = 1.618034$
33. **(a)** $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1.5, x_4 \approx 1.6666667, x_5 = 1.6$
(b) $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618034$. **(c)** $\left(1 + \sqrt{5}\right)/2 \approx 1.618034$.
35. **(a)** El algoritmo calcula la raíz de $\frac{1}{x} - a = 0$ para x_1 cercana a $\frac{1}{a}$.
37. 20.84 pies.
39. **(a)** (28.0279, 7.1828) **(b)** (6.7728, 45.1031)

Conjunto de problemas 3.8

1. $5x + C$ **3.** $\frac{1}{3}x^3 + \pi x + C$ **5.** $\frac{4}{9}x^{9/4} + C$
7. $3\sqrt[3]{x} + C$ **9.** $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$ **11.** $\frac{2}{3}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + C$
13. $\dfrac{27}{8}x^8 + \dfrac{1}{2}x^6 - \dfrac{45}{4}x^4 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2 + C$ **15.** $-\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} + C$
17. $x^4 + \frac{3}{2}x^2 + C$ **19.** $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$ **21.** $\frac{1}{3}(x + 1)^3 + C$
23. $\frac{2}{9}z^{9/2} + \frac{4}{5}z^{5/2} + 2z^{1/2} + C$ **25.** $-\cos\theta - \operatorname{sen}\theta + C$
27. $\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}x + 1\right)^4 + C$ **29.** $\frac{1}{21}(5x^3 + 3x - 8)^7 + C$
31. $\frac{9}{16}\sqrt[3]{(2t^2 - 11)^4} + C$ **33.** $\frac{2}{9}(x^3 + 4)^{3/2} + C$
35. $-\frac{1}{5}(1 + \cos x)^5 + C$ **37.** $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$

39. $\frac{4}{15}x^{5/2} + C_1x + C_2$ **41.** $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x} + C_1x + C_2$

45. $x^2\sqrt{x-1} + C$ **47.** $\dfrac{5x^3+2}{2\sqrt{x^3+1}} + C$

51. $\frac{1}{2}x^2 + C$ si $x \geq 0$, $-\frac{1}{2}x^2 + C$ si $x < 0$

53. **(a)** $-2\cos(3(x-2)) + C$ **(b)** $\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2} - \dfrac{9}{2}\cos\dfrac{x}{6} + C$

(c) $\dfrac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} 2x + C$

Conjunto de problemas 3.9

5. $y = \frac{1}{3}x^3 + x + C$; $y = \frac{1}{3}x^3 + x - \frac{1}{3}$

7. $y = \pm\sqrt{x^2+C}$; $y = \sqrt{x^2}$ **9.** $z = \dfrac{3}{C - t^3}$; $z = \dfrac{3}{10 - t^3}$

11. $s = \frac{16}{3}t^3 + 2t^2 - t + C$; $s = \frac{16}{3}t^3 + 2t^2 - t + 100$

13. $y = \frac{1}{10}(2x+1)^5 + C$; $y = \frac{1}{10}(2x+1)^5 + \frac{59}{10}$

15. $y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ **17.** $v = 5$ cm/s; $s = \frac{22}{3}$ cm

19. $v \approx 2.83$ cm/s; $s \approx 12.6$ cm **21.** 144 pies

23. $v = 32.24$ pies/s; $s = 1198.54$ pies

27. Luna; ≈ 1.470 mi/s; Venus: ≈ 6.257 mi/s; Júpiter: ≈ 36.812 mi/s; Sol: ≈ 382.908 mi/s

29. 2.2 pies/s^2 **31.** 5500 m

33. **(a)** **(b)** 36 mi/h; **(c)** 0.9 mi/min^2

35. **(a)** $\dfrac{dV}{dt} = C_1\dfrac{\sqrt{V}}{10}$, $V(0) = 1600$, $V(40) = 0$;

(b) $V = \frac{1}{400}(-20t + 800)^2$; **(c)** 900 cm^3

37. **(a)** $v(t) = \begin{cases} -32t & \text{para } 0 \leq t < 1 \\ -32(t-1) + 24 & \text{para } 1 < t \leq 2.5 \end{cases}$

(b) $t \approx 0.66, 1.75$ s

3.10 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Verdadero **7.** Verdadero **9.** Verdadero **11.** Falso **13.** Verdadero **15.** Verdadero **17.** Verdadero **19.** Falso **21.** Falso **23.** Falso **25.** Verdadero **27.** Verdadero **29.** Verdadero **31.** Falso **33.** Verdadero **35.** Verdadero **37.** Falso **39.** Verdadero **41.** Verdadero **43.** Verdadero **45.** Falso **47.** Verdadero

Problemas de examen

1. Puntos críticos: 0, 1, 4; valor mínimo $f(1) = -1$; valor máximo $f(4) = 8$.

3. Puntos críticos: $-2, -\frac{1}{2}$; valor mínimo $f(-2) = \frac{1}{4}$; valor máximo $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$

5. Puntos críticos: $-\frac{1}{2}, 0, 1$; valor mínimo $f(0) = 0$; valor máximo $f(1) = 1$.

7. Puntos críticos: $-2, 0, 1, 3$; valor mínimo $f(1) = -1$; valor máximo $f(3) = 135$

9. Puntos críticos: $-1, 0, 2, 3$; valor mínimo $f(2) = -9$; valor máximo $f(3) = 88$

11. Puntos críticos: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}$; valor mínimo $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) \approx -0.87$; valor máximo $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

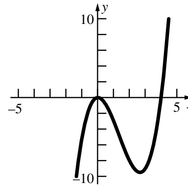
13. Creciente: $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$; cóncava hacia abajo: $(-\infty, \infty)$

15. Creciente: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$; cóncava hacia abajo: $(-\infty, 0)$

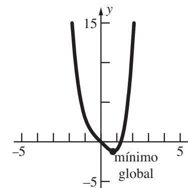
17. Creciente: $\left[0, \frac{1}{5}\right]$; cóncava hacia abajo: $\left(\frac{3}{20}, \infty\right)$

19. Creciente: $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$; cóncava hacia abajo: $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

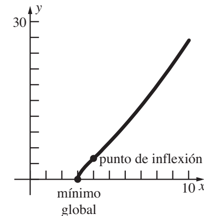
21. Creciente: $\left(-\infty, 0\right] \cup \left[\frac{8}{3}, \infty\right)$; decreciente $\left[0, \frac{8}{3}\right]$;
Valor mínimo local $f\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{256}{27}$
Valor máximo local $f(0) = 0$
Punto de inflexión: $\left(\frac{4}{3}, -\frac{128}{27}\right)$



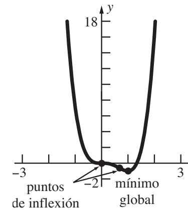
23.



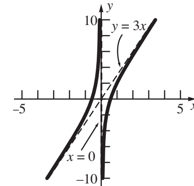
25.



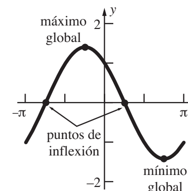
27.



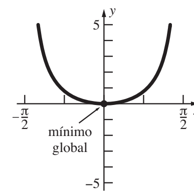
29.



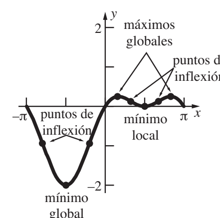
31.



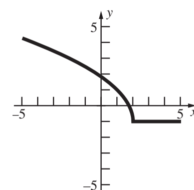
33.



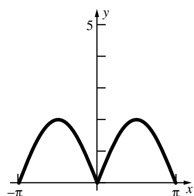
35.



37.

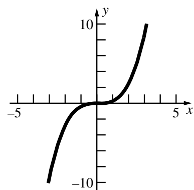


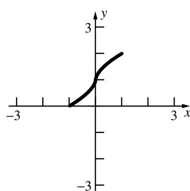
39.



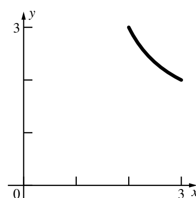
41. 11.18 pies **43.** $r = 4\sqrt[3]{2}, h = 8\sqrt[3]{2}$

45. (a) $c = \pm\sqrt{3}$ **(b)** No se aplica, $F'(0)$ no existe

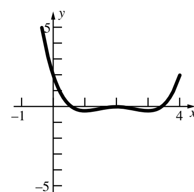




(c) $c = 1 + \sqrt{2}$



47.



49. 0.281785 **51.** 0.281785 **53.** $\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x^{3/2} + C$

55. $\frac{1}{3}y^3 + 9\cos y - \frac{26}{y} + C$ **57.** $\frac{3}{16}(2z^2 - 3)^{4/3} + C$

59. $\frac{1}{18}\tan^3(3x^2 + 6x) + C$ **61.** $\frac{3}{25}(t^5 + 5)^{5/3} + C$

63. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3 + 9} + C$ **65.** $-\frac{1}{2(2y-1)^2} + C$

67. $\frac{5}{24}(2y^3 + 3y^2 + 6y)^{4/5} + C$ **69.** $y = 2\sqrt{x + 1} + 14$

71. $y = \frac{1}{3}(2t - 1)^{3/2} - 1$ **73.** $y = \sqrt{3x^2 - \frac{1}{4}x^4 + 9}$

75. 7 s; −176 ft/s

Problemas de repaso e introducción del capítulo 4

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ **3.** $\frac{5}{4}a^2 \cot 36°$ **5.** $3.6 \cdot 5.8 + \frac{1}{2}\pi(1.8)^2 \approx 25.97$

7. 3.5 **9.** $\frac{1}{2}x^2 + x$ **11.** 6

Conjunto de problemas 4.1

1. 15 **3.** $\frac{481}{280}$ **5.** $\frac{85}{2}$ **7.** 3 **9.** $\sum_{i=1}^{41} i$ **11.** $\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i}$

13. $\sum_{i=1}^{50} a_{2i-1}$ **15.** 90 **17.** −10 **19.** 14,950

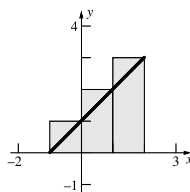
21. 2640 **23.** $\frac{4n^3 - 3n^2 - n}{6}$

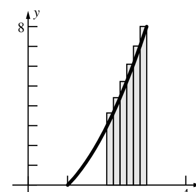
27. (a) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; **(b)** $2^{11} - 2$

33. $\bar{x} = 55/7 \approx 7.86; s^2 \approx 12.41$ **37.** $c = \bar{x}$ **39.** 715

41. $S = \frac{m(m + 1)(3n - m + 1)}{6}$ **43.** $\frac{7}{2}$ **45.** $\frac{9}{2}$ **47.** $\frac{23}{8}$

49. $A = 6$ **51.** $A = \frac{1243}{216}$





53. $\frac{5}{2}$ **55.** 4 **57.** $\frac{1}{4}$ **59.** $2\frac{1}{2}$ ft

63. (a) $\frac{125}{3}$; **(b)** 21; **(c)** 39

65. (a) 4; **(b)** $\frac{15}{4}$; **(c)** 10.5; **(d)** 102.4

Conjunto de problemas 4.2

1. 5.625 **3.** 15.6875 **5.** 2.625 **7.** $\int_1^3 x^3\,dx$

9. $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1 + x}dx$ **11.** 4 **13.** $3\pi - 3$ **15.** $\frac{35}{2}$

17. $\frac{27}{2}$ **19.** $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$ **21.** $\frac{1}{2}\pi A^2$ **23.** $\frac{2}{15}$ **25.** 3

27. 40, 80, 120, 160, 200, 240 **29.** 20, 80, 160, 240, 320, 400

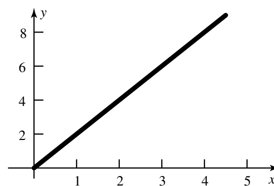
31. (a) −3; **(b)** 19; **(c)** 3; **(d)** 2; **(e)** 9; **(f)** 0; **(g)** 1; **(h)** 2

35. Izquierda: 5.24; Derecha: 6.84; Punto medio: 5.98

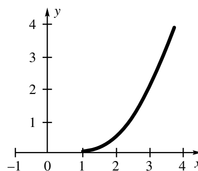
37. Izquierda: 0.8638; Derecha: 0.8178; Punto medio: 0.8418

Conjunto de problemas 4.3

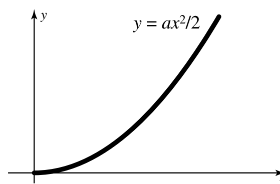
1. $A(x) = 2x$



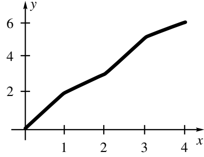
3. $A(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(-1 + x), x > 1$



5. $A(x) = ax^2/2$

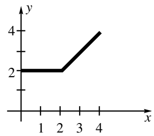


7. $A(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 + (x - 1) & \text{si } 1 < x \le 2 \\ 3 + 2(x - 2) & \text{si } 2 < x \le 3 \\ 5 + (x - 3) & \text{si } 3 < x \le 4 \\ \text{etc.} & \end{cases}$

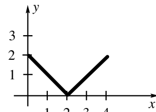


9. 6 **11.** 14 **13.** -31 **15.** 23 **17.** $2x$
19. $2x^2 + \sqrt{x}$ **21.** $-(x - 2)\cot 2x$ **23.** $2x\,\text{sen}(x^2)$
25. $\dfrac{2x^5}{1 + x^4} + \dfrac{x^2}{1 + x^2}$
27. $f(x)$ es creciente en $[0, \infty)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$.
29. $f(x)$ es creciente en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right], \ldots$ y cóncava hacia arriba en $(\pi, 2\pi), (3\pi, 4\pi), \ldots$
31. $f(x)$ es creciente en $(0, \infty)$ y nunca es cóncava hacia arriba.

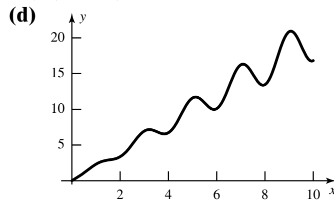
33. 10;



35. 4;

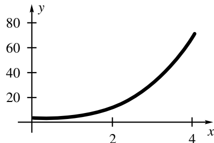


37. (a) Mínimos locales en $0, \approx 3.8, \approx 5.8, \approx 7.9, \approx 9.9, 10$; máximos locales en $\approx 3.1, \approx 5.0, \approx 7.1, \approx 9.0$
(b) $G(0) = 0$ es mínimo global, $G(9)$ es máximo global
(c) G es cóncava hacia abajo en $\approx (0.7, 1.5), (2.5, 3.5), (4.5, 5.5), (6.5, 7.5), (8.5, 9.5)$
(d)

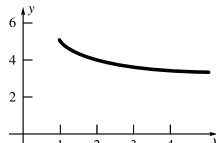


39. (a) 0 **(b)** $\frac{1}{5}x^5 + x + C$ **(c)** $\frac{1}{5}x^5 + x$ **(d)** $\frac{6}{5}$

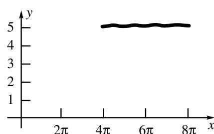
43. Cota inferior 20; cota superior 276



45. Cota inferior $\frac{68}{5}$; cota superior 20



47. Cota inferior 20π; cota superior $\frac{101}{5}\pi$



49. $\frac{1}{2}$ **51.** 2 **53.** $\sqrt{x}/2$ **55.** Verdadero **57.** Falso
59. Verdadero
61. $s(t) = \begin{cases} t^2/2, & 0 \le t \le 2 \\ -4 + 4t - t^2/2, & t > 2 \end{cases}$
$t = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6.83$

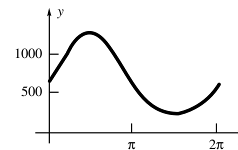
Conjunto de problemas 4.4

1. 4 **3.** 15 **5.** $\frac{3}{4}$ **7.** $\frac{16}{3}$ **9.** $\frac{1783}{96}$ **11.** 1 **13.** $\frac{22}{5}$
15. $\frac{2}{9}(3x + 2)^{3/2} + C$ **17.** $\frac{1}{3}\text{sen}(3x + 2) + C$
19. $-\frac{1}{6}\cos(6x - 7) + C$ **21.** $\frac{1}{3}(x^2 + 4)^{3/2} + C$
23. $-\frac{7}{10}(x^2 + 3)^{-5/7} + C$ **25.** $-\frac{1}{2}\cos(x^2 + 4) + C$
27. $-\cos\sqrt{x^2 + 4} + C$ **29.** $\frac{1}{27}\text{sen}[(x^3 + 5)^9] + C$
31. $\frac{1}{3}[\text{sen}(x^2 + 4)]^{3/2} + C$ **33.** $-\frac{1}{30}\cos^{10}(x^3 + 5) + C$
35. $\frac{2047}{11}$ **37.** $\frac{4}{5}$ **39.** $\frac{122}{9}$ **41.** 0 **43.** $\frac{1}{3}$ **45.** $\frac{9}{2}$
47. $\frac{1}{64}$ **49.** $\frac{\text{sen } 3}{3}$ **51.** $\frac{1}{\pi}$ **53.** 1 **55.** $1 - \cos 1$
57. $\dfrac{1 - \cos^4 1}{8}$
59. (a) positiva, **(b)** negativa, **(c)** negativa, **(d)** positiva
61. 50 galones; 20 horas **63.** 86 galones **65.** 134
69. 9 **71.** 2

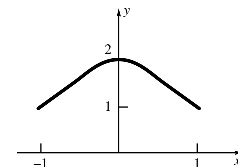
Conjunto de problemas 4.5

1. 40 **3.** $\frac{1}{3}$ **5.** $\frac{17}{6}$ **7.** 0 **9.** 0 **11.** $\frac{609}{8}$
13. $\frac{8}{\pi}\left(-\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \cos\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right)$ **15.** $\frac{115}{81}$ **17.** $\frac{\sqrt{39}}{3}$
19. $c = 1$ **21.** $c = 0$ **23.** $c = \frac{\sqrt{21} + 3}{6}$ **25.** $c = \frac{5}{2}$
27. $(A + B)/2$

29. $\approx 1250\pi$



31. ≈ 3.2



33. ≈ 25 **35.** 0 **37.** 0 **39.** 2π **41.** $\frac{8}{3}$ **43.** $\frac{1}{2}$
45. Par: $\displaystyle\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$;
Impar: $\displaystyle\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
47. 8 **49.** 2 **51.** 2
57. (a) Par; **(b)** 2π
(c)

Intervalo	Valor de la integral
$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	0.46
$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	0.92
$\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$	−0.46
$\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$	−0.92
$[0, 2\pi]$	0
$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right]$	0
$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$	−0.44
$\left[\frac{13\pi}{6}, \frac{10\pi}{3}\right]$	−0.44

Conjunto de problemas 4.6

1. 0.7877, 0.5654, 0.6766, 0.6671, $\frac{2}{3}$

3. 1.6847, 2.0382, 1.8615, 1.8755, $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

5. 3.4966, 7.4966, 5.4966, 5.2580, 5.25

7.

	SRI	SRD	SRM	Trap.	Parábola
$n = 4$	0.5728	0.3728	0.4590	0.4728	0.4637
$n = 8$	0.5159	0.4159	0.4625	0.4659	0.4636
$n = 16$	0.4892	0.4392	0.4634	0.4642	0.4636

9.

	SRI	SRD	SRM	Trap.	Parábola
$n = 4$	2.6675	3.2856	2.9486	2.9765	2.9580
$n = 8$	2.8080	3.1171	2.9556	2.9625	2.9579
$n = 16$	2.8818	3.0363	2.9573	2.9591	2.9579

11. 12, 1.1007 **13.** 8, 4.6637 **15.** 6, 1.0989 **19.** menor
21. mayor **25.** LRS < MRS < Parábola < Trap < RRS
27. 4570 pies^2 **29.** 1,074,585,600 pies^3
31. Utilizando la suma de Riemann con puntos de la derecha ≈ 13,740 galones

4.7 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Verdadero
9. Verdadero **11.** Verdadero **13.** Verdadero **15.** Verdadero
17. Verdadero **19.** Falso **21.** Verdadero **23.** Verdadero
25. Falso **27.** Falso **29.** Falso **31.** Verdadero **33.** Falso
35. Verdadero **37.** Falso **39.** Verdadero **41.** Verdadero
43. Verdadero **45.** Falso

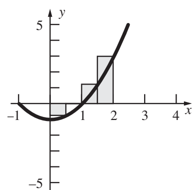
Problemas de examen

1. $\frac{5}{4}$ **3.** $\frac{50}{3} - \frac{26}{\pi} + \frac{\pi^3}{3} - 9\cos 1$

5. $\frac{1}{16}\left[-15\left(-125 + \sqrt[3]{5}\right)\right]$ **7.** $\frac{1}{18}\tan^3(3\pi^2 + 6\pi)$

9. 46.9 **11.** $-\frac{1}{2}\cos(x^2 + 2x + 3) + C$

13. $\frac{7}{4}$



15. $\frac{5}{6}$ **17.** $\frac{39}{4}$ **19.** 1870

21. (a) $\sum_{n=2}^{78} \frac{1}{n}$; **(b)** $\sum_{n=1}^{50} nx^{2n}$

23. (a) −2; **(b)** −4; **(c)** 6; **(d)** −12; **(e)** −2
25. (a) −8; **(b)** 8; **(c)** 0; **(d)** −16; **(e)** −2 **(f)** −5
27. $c = -\sqrt{7}$
29. (a) $\operatorname{sen}^2 x$; **(b)** $f(x + 1) - f(x)$
(c) $-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(z)\,dz + \frac{1}{x}f(x)$; **(d)** $\int_0^x f(t)\,dt$;
(e) $g'(g(x))g'(x)$; **(f)** $-f(x)$
33. 0.2043 **35.** 372 **37.** MRS < Trap < LRS

Problemas de repaso e introducción del capítulo 5

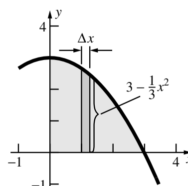
1. $\frac{1}{4}$ **3.** $\sqrt[3]{4} - 1$ **5.** $\sqrt{10}$ **7.** 1.6π

9. $[\pi(r_2^2 - r_1^2)]\,\Delta x$ **11.** $\frac{51}{10}$ **13.** $\frac{16}{15}$

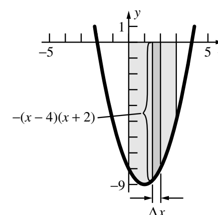
Conjunto de problemas 5.1

1. 6 **3.** $\frac{40}{3}$ **5.** $\frac{9}{2}$ **7.** $\frac{253}{12}$ **9.** $\frac{9}{2}$

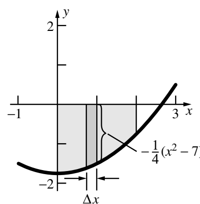
11. 6



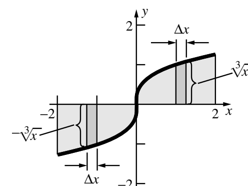
13. 24



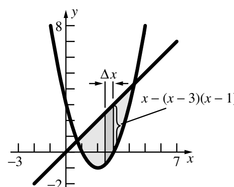
15. $\frac{17}{6}$



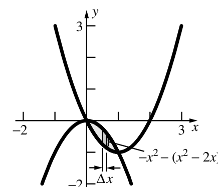
17. $3\sqrt[3]{2}$



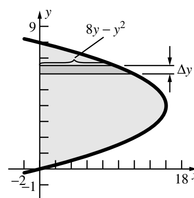
19. $\frac{13\sqrt{13}}{6}$



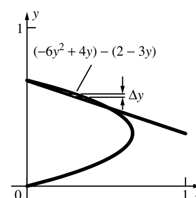
21. $\frac{1}{3}$



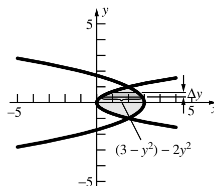
23. $\frac{256}{3}$



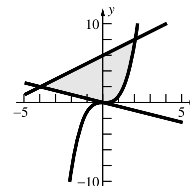
25. $\frac{1}{216}$



27. 4



29. 22



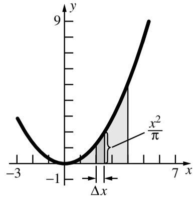
31. 130 pies; 194 pies **33.** 6 s; $2 + 2\sqrt{2}$ s
35. Área $(A) = 9$; $A(B) = \frac{37}{6}$; $A(C) = \frac{37}{6}$; $A(D) = \frac{44}{3}$; $A(A + B + C + D) = 36$

Conjunto de problemas 5.2

1. $\frac{206\pi}{15}$

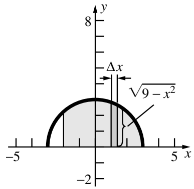
3. **(a)** $\frac{256\pi}{15}$; **(b)** 8π

5. $\frac{1024}{5\pi}$



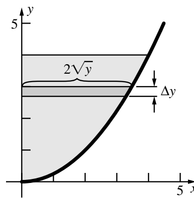
7. $\frac{\pi}{4}$

9. $\frac{100\pi}{3}$



11. $\frac{243\pi}{5}$

13. 32π



15. $\frac{6561\pi}{4}$

17. $\frac{4}{3}ab^2\pi$ **19.** $\frac{512\pi}{3}$ **21.** $\frac{2\pi}{3}$ **23.** $\frac{128}{3}$ **25.** 2 **27.** $\frac{2}{3}$

29. $2\pi r^2 L - \frac{16}{3}r^3$ **31.** $\pi r^2(L_1 + L_2) - \frac{8}{3}r^3$

33. **(a)** $\frac{1024\pi}{35}$; **(b)** $\frac{704\pi}{5}$

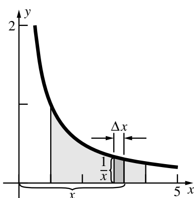
35. $2\pi + \frac{16}{3}$ **37.** $\frac{2}{3}r^3 \tan\theta$

39. **(a)** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$; **(b)** $\frac{\sqrt{2}}{12}r^3$

41. $\frac{2}{3}\pi r^3$

Conjunto de problemas 5.3

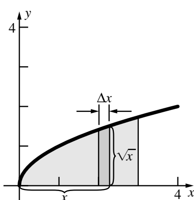
1. **(a), (b)**



(c) $\Delta V \approx 2\pi\Delta x$;

(d) $2\pi\int_1^4 dx$; **(e)** 6π

3. **(a), (b)**

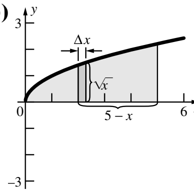


(c) $\Delta V \approx 2\pi x^{3/2}\Delta x$;

(d) $2\pi\int_0^3 x^{3/2}\,dx$;

(e) $\frac{36\sqrt{3}}{5}\pi$

5. **(a), (b)**

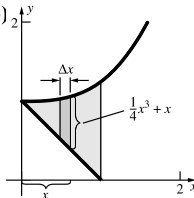


(c) $\Delta V \approx 2\pi(5x^{1/2} - x^{3/2})\Delta x$

(d) $2\pi\int_0^5 (5x^{1/2} - x^{3/2})\,dx$

(e) $\frac{40\sqrt{5}}{3}\pi$

7. **(a), (b)**

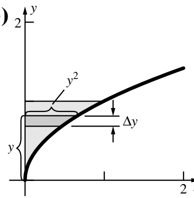


(c) $\Delta V \approx 2\pi\left(\frac{1}{4}x^4 + x^2\right)\Delta x$;

(d) $2\pi\int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^4 + x^2\right)dx$

(e) $\frac{23\pi}{30}$

9. **(a), (b)**

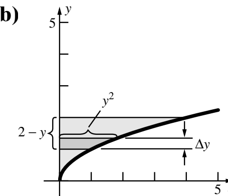


(c) $\Delta V \approx 2\pi y^3\Delta y$;

(d) $2\pi\int_0^1 y^3\,dy$

(e) $\frac{\pi}{2}$

11. **(a), (b)**



(c) $\Delta V \approx 2\pi(2y^2 - y^3)\Delta y$

(d) $2\pi\int_0^2 (2y^2 - y^3)\,dy$;

(e) $\frac{8\pi}{3}$

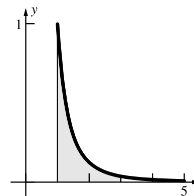
13. **(a)** $\pi\int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]\,dx$;

(b) $2\pi\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx$;

(c) $2\pi\int_a^b (x - a)[f(x) - g(x)]\,dx$;

(d) $2\pi\int_a^b (b - x)[f(x) - g(x)]\,dx$

15.



(a) $\int_1^3 \frac{1}{x^3}dx$;

(b) $2\pi\int_1^3 \frac{1}{x^2}dx$;

(c) $\pi\int_1^3 \left(\frac{1}{x^6} + \frac{2}{x^3}\right)dx$;

(d) $2\pi\int_1^3 \left(\frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)dx$

17. $\frac{64\pi}{5}$ **19.** $\frac{4\pi}{3}(b^2 - a^2)^{3/2}$ **21.** $\pi\left(\sqrt{2} - 1\right)$

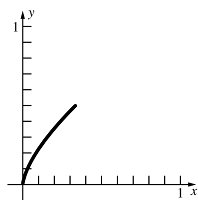
23. **(a)** $\frac{2\pi}{15}$; **(b)** $\frac{\pi}{6}$; **(c)** $\frac{\pi}{60}$

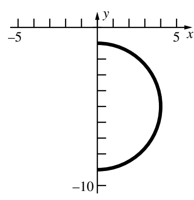
25. $\frac{1}{3}rS$

Conjunto de problemas 5.4

1. $\frac{1}{54}\left(181\sqrt{181} - 13\sqrt{13}\right)$ **3.** 9 **5.** $\frac{595}{144}$

7. $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$ **9.** 4π

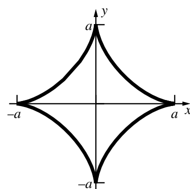




11. $2\sqrt{5}$ **13.** $\int_0^2 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt \approx 4.6468$

15. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t + 4\,\text{sen}^2\, 2t}\, dt \approx 2.3241$

17. $6a$



19. $8a$

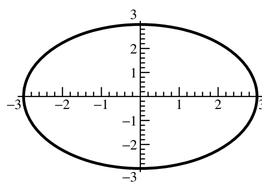
21. **(a)** $\frac{2}{5}\left(4\sqrt{2} - 1\right)$; **(b)** 16

23. $6\sqrt{37}\pi$ **25.** $248\sqrt{2}\pi/9$ **27.** $\frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$

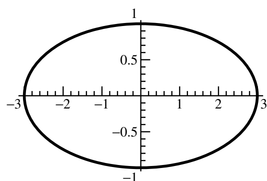
29. $4\pi r^2$

33. **(b)** $\frac{64}{3}\pi a^2$

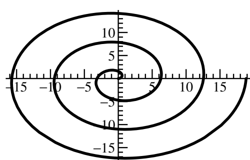
35. **(a)**



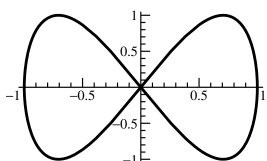
(b)



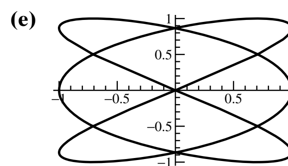
(c)



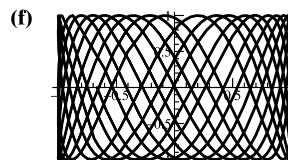
(d)



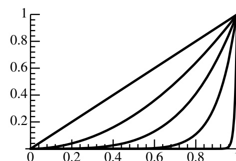
(e)



(f)



37. $n = 1$: $L \approx 1.41$; $n = 2$: $L \approx 1.48$; $n = 4$: $L \approx 1.60$
$n = 10$: $L \approx 1.75$; $n = 100$: $L \approx 1.95$; $n = 10{,}000$: $L \approx 2$



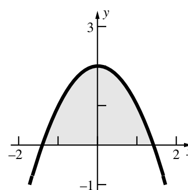
Conjunto de problemas 5.5

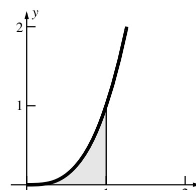
1. 1.5 lbs-pie **3.** 0.012 joules **7.** 18 lbs-pie **9.** 52,000 lbs-pie
11. 76.128 lbs-pie **13.** 125.664 lbs-pie **17.** 2075.83 lbs-pulg.
19. 350,000 lbs-pie **21.** 952.381 lbs-mi **23.** 43,200 lbs-pie
25. 1684.8 libras **27.** 1684.8 libras **29.** 16.64 libras
33. 74,880 libras **35.** $\frac{3mh}{4} + 15m$ **37.** $\frac{8475}{32}$lbs − pie

Conjunto de problemas 5.6

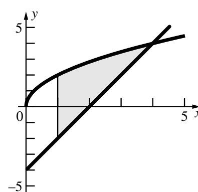
1. $\frac{5}{21}$ **3.** $\frac{21}{5}$ **5.** $M_y = 17, M_x = -3; \bar{x} = 1, \bar{y} = -\frac{3}{17}$

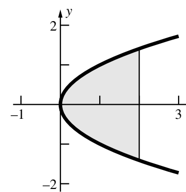
9. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{4}{5}$ **11.** $\bar{x} = \frac{4}{5}, \bar{y} = \frac{2}{7}$





13. $\bar{x} = \frac{192}{95}, \bar{y} = \frac{27}{19}$ **15.** $\bar{x} = \frac{6}{5}, \bar{y} = 0$





17. $m(R_1) = \frac{1}{2}\delta, \bar{x}_1 = \frac{2}{3}, \bar{y} = \frac{1}{3}, M_y(R_1) = \frac{1}{3}\delta, M_x(R_1) = \frac{1}{6}\delta$;
$m(R_2) = 2\delta, \bar{x}_2 = 2, \bar{y}_2 = \frac{1}{2}, M_y(R_2) = 4\delta, M_x(R_2) = \delta$.

21. $\bar{x} = -\frac{3}{14}, \bar{y} = \frac{1}{14}$ **23.** $\bar{x} = \frac{9}{16}, \bar{y} = \frac{31}{16}$ **25.** $\frac{2\pi}{5}$

27. El centroide es $\frac{4a}{3\pi}$ unidades perpendiculares del centro del diámetro. $\left(\bar{y} = \frac{4a}{3\pi}, \bar{x} = 0\right)$

29. **(a)** $V = 2\pi \int_c^d (K - y)w(y)\, dy$

31. **(a)** $4\pi r^3 n \operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\cos^2\frac{\pi}{2n}$

35. $\bar{x} \approx 7.00$ cm por arriba del centro del agujero; $\bar{y} \approx 0.669$ cm a la derecha del centro del agujero.

Conjunto de problemas 5.7

1. **(a)** 0.1 **(b)** 0.35
3. **(a)** 0.2 **(b)** 0
5. **(a)** 0.6 **(b)** 2.2
7. **(a)** 0.6 **(b)** 2

9. **(a)** 0.9 **(b)** 10 **(c)** $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/20, & 0 \le x \le 20 \\ 1, & x > 20 \end{cases}$

11. **(a)** $\frac{27}{32}$ **(b)** 4

(c) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{3}{64}x^2 - \frac{1}{256}x^3, & 0 \le x \le 8 \\ 1, & x > 8 \end{cases}$

13. **(a)** 0.6875 **(b)** 2.4

(c) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{256}x^4, & 0 \le x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$

15. **(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** 2

(c) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{4}, & 0 \le x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$

17. **(a)** $\frac{1}{3}$ **(b)** $\frac{4}{3}\ln 4$ **(c)** $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{4x-4}{3x}, & 1 \le x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$

21. $\frac{a+b}{2}$ **23.** $k = \frac{6}{125}$

25. **(a)** $\frac{1}{4}$ **(b)** $\frac{1}{8}$ **(c)** 2

(d) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x^2/8, & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ -x^2/8 + x - 1, & \text{si } 2 < x \le 4 \\ 1, & \text{si } x > 4 \end{cases}$

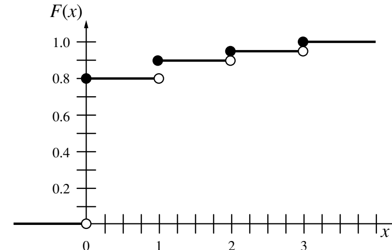
(e) $F(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y < 0 \\ y^2/28800, & \text{si } 0 \le y \le 120 \\ -y^2/28800 + y/60 - 1, & \text{si } 120 < y \le 240 \\ 1, & \text{si } y > 240 \end{cases}$

27. **(a)** $\approx$95,802,719 **(b)** $\approx$0.884 **(c)** 0.2625
(d) Para $0 \le x \le 0.6$, $F(x) \approx 6.3868 \times 10^6 x^{15} - 3.2847 \times 10^7 x^{14} + 7.4284 \times 10^7 x^{13} - 9.6569 \times 10^7 x^{12} + 7.9011 \times 10^7 x^{11} - 4.1718 \times 10^7 x^{10} + 1.3906 \times 10^7 x^9 - 2.6819 \times 10^6 x^8 + 2.2987 \times 10^5 x^7$
(e) $F(25.4y)$ en donde F es como en (d)

29. $G(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \sqrt{y^2 - 1}, & 0 \le y \le \sqrt{2} \\ 1, & y > \sqrt{2} \end{cases}$

$g(y) = y/\sqrt{y^2 - 1}, 0 \le y \le \sqrt{2}$.

33. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.8, & 0 \le x < 1 \\ 0.9, & 1 \le x < 2 \\ 0.95, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$



35. **(a)** 1 **(b)** $\frac{1}{12}$ **(c)** $\frac{2}{(y+1)^2}$ para $0 \le y \le 1$ **(d)** 0.38625

37. $2, \frac{32}{7}$ **39.** $\frac{4}{7}$

5.8 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Falso **9.** Falso
11. Falso **13.** Verdadero **15.** Verdadero **17.** Verdadero
19. Verdadero **21.** Verdadero **23.** Verdadero

Problemas de examen

1. $\frac{1}{6}$ **3.** $\frac{\pi}{6}$ **5.** $\frac{5\pi}{6}$

7. $V(S_1) = \frac{\pi}{30}; V(S_2) = \frac{\pi}{6}; V(S_3) = \frac{7\pi}{10}; V(S_4) = \frac{5\pi}{6}$

9. 205,837 lbs-pie, **11.** **(a), (b)** $\frac{32}{3}$ **13.** $\frac{2048\pi}{15}$

15. $\frac{53}{6}$ **17.** 36 **19.** $\pi\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\,dx$

21. $M_y = \delta\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx$

$M_x = \frac{\delta}{2}\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\,dx$

23. $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx + 2\pi\int_a^b g(x)\sqrt{1 + [g'(x)]^2}\,dx + \pi[f^2(a) - g^2(a)] + \pi[f^2(b) - g^2(b)]$

25. **(a)** $\frac{3}{4}$ **(b)** $\frac{6-x}{18}$ para $0 \le x \le 6$ **(c)** 2

Problemas de repaso e introducción del capítulo 6

1. $-\frac{1}{x} + C$ **3.** $-\frac{100}{x^{0.01}} + C$ **5.** 0 **7.** $\frac{2}{x}$

9. **(a)** 2; **(b)** 2.48832; **(c)** 2.593742; **(d)** 2.691588; **(e)** 2.704814

11. **(a)** 2.25; **(b)** 2.593742; **(c)** 2.6533; **(d)** 2.70481; **(e)** 2.71152

13. $x = \frac{12k+1}{6}\pi$ o $x = \frac{12k+5}{6}\pi$ **15.** $x = \frac{4k+1}{4}\pi$

17. $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; $\cos\theta = \frac{1}{x}$; $\tan\theta = \sqrt{x^2-1}$

$\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $\sec\theta = x$; $\csc\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

19. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $\tan\theta = \frac{1}{x}$

$\cot\theta = x$; $\sec\theta = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; $\csc\theta = \sqrt{1+x^2}$

21. $y = \frac{-2}{x^2-2}$

Conjunto de problemas 6.1

1. **(a)** 1.792; **(b)** 0.406; **(c)** 4.396; **(d)** 0.3465; **(e)** −3.584; **(f)** 3.871

3. $\frac{2x+3}{x^2+3x+\pi}$ **5.** $\frac{3}{x-4}$ **7.** $\frac{3}{x}$

9. $2x + 4x\ln x + \frac{3}{x}(\ln x)^2$ **11.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ **13.** $\frac{1}{243}$

15. $\frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$ **17.** $\ln|3v^2+9v| + C$

19. $(\ln x)^2 + C$ **21.** $\frac{1}{10}[\ln(486+\pi) - \ln\pi]$

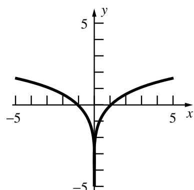
23. $\frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + C$

25. $\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 8x^2 - 64x + 256\ln|x+4| + C$

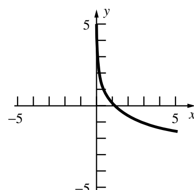
27. $\ln\frac{(x+1)^2}{x}$ **29.** $\ln\frac{x^2(x-2)}{x+2}$ **31.** $-\frac{x^3+33x^2+8}{2(x^3-4)^{3/2}}$

33. $-\frac{10x^2+219x-118}{6(x-4)^2(x+13)^{1/2}(2x+1)^{4/3}}$

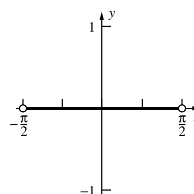
35.



37.



39.



41. Mínimo $f(1) = -1$ **43.** $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$

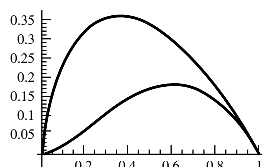
45. $x = 3$ **47.** $\ln 2$

49. **(a)** 1 **(b)** 3

51. $\ln\sqrt{3} \approx 0.5493$ **53.** $\pi \ln 4 \approx 4.355$

57. **(a)** Máximos: $\left(\frac{\pi}{2}, 0.916\right), \left(\frac{5\pi}{2}, 0.916\right)$; mínimo: $\left(\frac{3\pi}{2}, -0.693\right)$; **(b)** (3.871, −0.182), (5.553, −0.183); **(c)** 4.042

59.



(a) 0.139;
(b) 0.260

Conjunto de problemas 6.2

1. $f^{-1}(2) = 4$ **3.** No tiene inversa **5.** $f^{-1}(2) \approx -1.3$

15. $f^{-1}(x) = x - 1$ **17.** $f^{-1}(x) = x^2 - 1, x \geq 0$

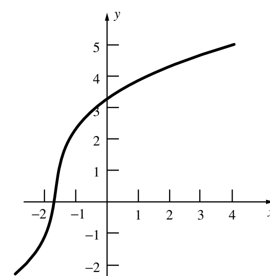
19. $f^{-1}(x) = 3 - \frac{1}{x}$ **21.** $f^{-1}(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2}$

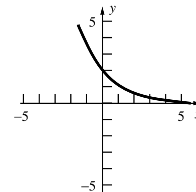
23. $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$ **25.** $f^{-1}(x) = \frac{1+x}{1-x}$

27. $f^{-1}(x) = \left(\frac{2-x}{x-1}\right)^{1/3}$ **29.** $V = \frac{4\pi h^3}{27}$; $h = 3\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$

31. $(-\infty, -0.25]$ o $[-0.25, \infty)$; entonces $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{8x+33}\right)$ o $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{8x+33}\right)$

33. $(f^{-1})'(3) \approx \frac{1}{3}$ **35.** $(f^{-1})'(3) \approx -\frac{1}{3}$





37. $\frac{1}{16}$ **39.** $\frac{1}{4}$

43. **(a)** 1 **(b)** $\frac{2}{\sqrt{7}}$ **(c)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

45. $\frac{3}{5}$

Conjunto de problemas 6.3

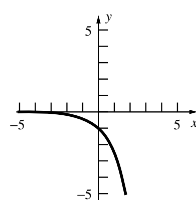
1. **(a)** 20.086; **(b)** 8.1662; **(c)** 4.1; **(d)** 1.20

3. x^3 **5.** $\cos x$ **7.** $3\ln x - 3x$ **9.** $3x^2$ **11.** e^{x+2}

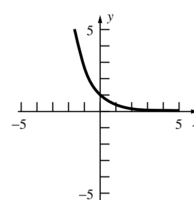
13. $\frac{e^{\sqrt{x+2}}}{2\sqrt{x+2}}$ **15.** $2x$ **17.** $x^2e^x(x+3)$

19. $x\sqrt{e^{x^2}} + \frac{x}{|x|}e^{\sqrt{x^2}}$ **21.** $-\frac{y}{x}$

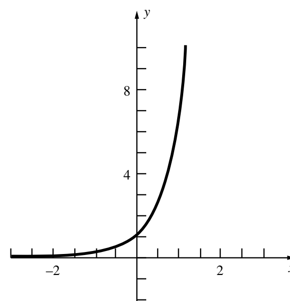
23. **(a)**



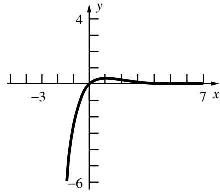
(b)



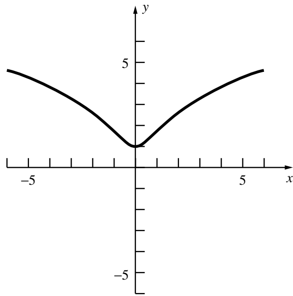
25. Dominio = $(-\infty, \infty)$; creciente en $(-\infty, \infty)$; cóncava hacia arriba en $(-\infty, \infty)$; no hay valores extremos ni puntos de inflexión.



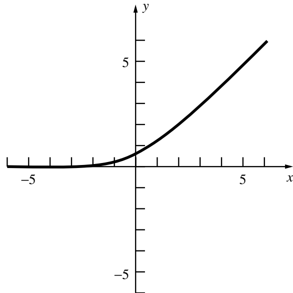
27. Dominio = $(-\infty, \infty)$; creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, \infty)$; máximo en $(1, 1/e)$; cóncava hacia arriba en $(2, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 2)$; punto de inflexión en $(2, 2/e^2)$



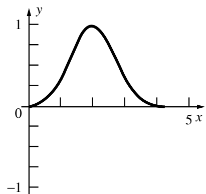
29. Dominio = $(-\infty, \infty)$; creciente en $(0, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$; mínimo en $(0, 0)$; cóncava hacia arriba en $(-1, 1)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; puntos de inflexión en $(-1, \ln 2)$ y $(1, \ln 2)$



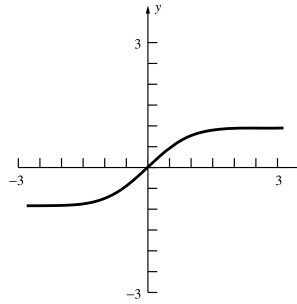
31. Dominio = $(-\infty, \infty)$; creciente en $(-\infty, \infty)$; cóncava hacia arriba en $(-\infty, \infty)$ no hay valores extremos ni puntos de inflexión.



33. Dominio = $(-\infty, \infty)$; creciente en $(-\infty, 2)$ y decreciente en $(2, \infty)$; máximo en $(2, 1)$; cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}, \frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)$; puntos de inflexión en $\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ y $\left(\frac{4+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$



35. Dominio = $(-\infty, \infty)$; creciente en $(-\infty, \infty)$; cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia abajo en $(0, \infty)$; punto de inflexión en $(0, 0)$; no tiene valores extremos



37. $\frac{1}{3}e^{3x+1} + C$ **39.** $\frac{1}{2}e^{x^2+6x} + C$ **41.** $e^{-1/x} + C$

43. $\frac{1}{2}e^3(e^2 - 1)$ **45.** 4π **47.** $\dfrac{3 - e}{2e}$

49. **(a)** 3,628,800; 3,598,696; **(b)** 8.31×10^{81}

51. $\sqrt{2}(e^{\pi} - 1)$

53. **(a)** 0; 0 **(b)** Máximo: $\left(e, \frac{1}{2}\right)$; mínimo: $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{2}\right)$ **(c)** $\sqrt{e}$

55. **(a)** 3.11; **(b)** 0.910

57. 4.2614 **59.** Se comporta como $-x$; se comporta como $2 \ln x$

Conjunto de problemas 6.4

1. 3 **3.** 8 **5.** 9 **7.** 1 **9.** 1.544 **11.** 0.1747

13. 4.08746 **15.** 1.9307 **17.** $2 \cdot 6^{2x} \ln 6$ **19.** $\dfrac{1}{\ln 3}$

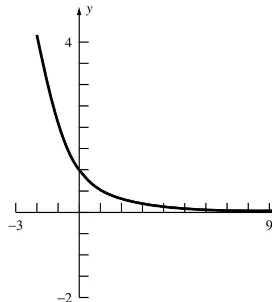
21. $3^z\left[\dfrac{1}{z + 5} + \ln(z + 5) \ln 3\right]$ **23.** $\dfrac{2^{x^2-1}}{\ln 2} + C$

25. $\dfrac{40}{\ln 5}$ **27.** $10^{x^2}2x \ln 10 + 20x^{19}$

29. $(\pi + 1)x^{\pi} + (\pi + 1)^x \ln(\pi + 1)$

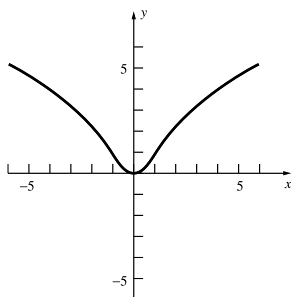
31. $(x^2 + 1)^{\ln x}\left(\dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x} + \dfrac{2x \ln x}{x^2 + 1}\right)$ **33.** sen 1

35. Dominio = $(-\infty, \infty)$; decreciente en $(-\infty, \infty)$; cóncava hacia arriba en $(-\infty, \infty)$; no tiene valores extremos ni puntos de inflexión.

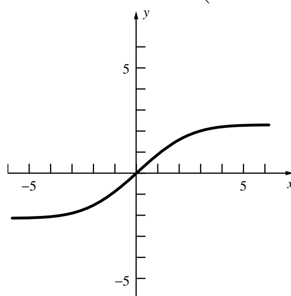


37. Dominio = $(-\infty, \infty)$; creciente en $(0, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$; cóncava hacia arriba en $(-1, 1)$ y cóncava hacia abajo

en $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; mínimo en $(0,0)$; puntos de inflexión en $(-1,1)$ y $(1,1)$



39. Dominio $=(-\infty,\infty)$; creciente en $(-\infty,\infty)$; cóncava hacia arriba en $(-\infty,0)$ y cóncava hacia abajo en $(0,\infty)$; no hay valores extremos; punto de inflexión en $\left(0,\int_1^0 2^{-t^2}\,dt\right)\approx(0,-0.81)$



41. $\log_{1/2} x = -\log_2 x$

43. $E\approx 5.017\times 10^8$ kW-h para la magnitud 7; $E\approx 1.560\times 10^{10}$ kW-h para la magnitud 8

45. $r = 2^{1/12}\approx 1.0595$; frecuencia de $\overline{C} = 440\sqrt[4]{2}\approx 523.25$

47. Si $y = A\cdot b^x$, entonces $\ln y = \ln A + x\ln b$, por lo que la gráfica de $\ln y$ contra x será lineal. Si $y = C\cdot x^d$, entonces $\ln y = \ln C + d\ln x$, por lo que la gráfica de $\ln y$ contra $\ln x$ será lineal.

49. $f'(x) = x^{(x^2)}(2x\ln x + x)$

$g'(x) = x^{x^x+x}\left[\ln x + (\ln x)^2 + \frac{1}{x}\right]$

53. $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$; mínimo: $(e^{-1}, e^{-1/e})$ **55.** 20.2259

57. $b\approx 2^{5/2}, C\approx 2^{3/2}$

Conjunto de problemas 6.5

1. $y = 4e^{-6t}$ **3.** $y = 2e^{0.005(t-10)}$ **5.** 56,569

7. 15.8 días **9.** 4.64 millones; 4.79 millones; 6.17 millones; 105 millones

11. 126,822 **13.** 7.43 g

15. $t_c\approx 201$ años (2187) $t_s\approx 191$ años (2177)

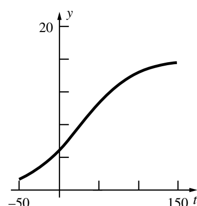
17. Hace 2950 años **19.** 81.6ºF **21.** 83.7ºC **23.** 8:45 pm

25. **(a)** \$401.71 **(b)** \$402.15 **(c)** \$402.19 **(d)** \$402.19

27. **(a)** 11.58 años **(b)** 11.55 años

29. \$133.6 mil millones **31.** \$1051.27 **33.** $t = \dfrac{100\ln 2}{p}$

35.

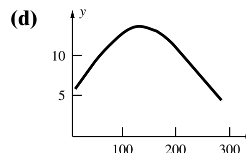


37. **(a)** $\frac{1}{e}$; **(b)** e^3; **(c)** e^2; **(d)** $\frac{1}{e^2}$

39. 15.25 millones **45.** 75.25 años a partir de 2004

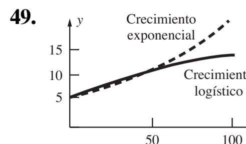
47. **(a)** $k = 0.0132 - 0.0001t$ **(b)** $y' = (0.0132 - 0.0001t)y$ **(c)** $y = 6.4^{0.0132t-0.00005t^2}$

(d)



(e) La población máxima ocurrirá cuando $t = 132$, que es el año 2136 (se toma como base a 2004). El modelo predice que la población regresará al nivel de 2004 en el año 2268.

49.



Crecimiento exponencial: 6.93 mil millones en 2010; 10.29 mil millones en 2040; 19.92 mil millones en 2090;
Crecimiento logístico: 7.13 mil millones en 2010; 10.90 mil millones en 2040; 15.15 mil millones en 2090

Conjunto de problemas 6.6

1. $y = e^{-x}(x + C)$ **3.** $y = a + C(1 - x^2)^{1/2}$

5. $y = xe^x + Cx$ **7.** $y = 1 + Cx^{-1}$

9. $y = 1 + Ce^{-\int f(x)\,dx}$ **11.** $y = x^4 + 2x$ pasa por $(1, 3)$.

13. $y = e^{-x}(1 - x^{-1})$ pasa por $(1, 0)$ **15.** 38.506 lb.

17. $y(t) = 2(60 - t) - \left(\frac{1}{1800}\right)(60 - t)^3$

19. $I(t) = 10^{-6}(1 - \exp(-10^6 t))$

21. $I(t) = 0.12\ \text{sen}\ 377t$

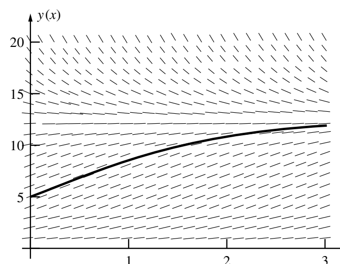
23. **(a)** 21.97 min **(b)** 26.67 min **(c)** $c > 7.7170$

(d) $400e^{-0.04T} + T = 150$.

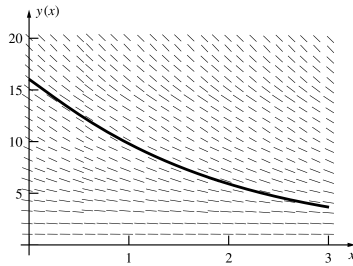
25. **(a)** 200.32 pies **(b)** $95 - 4T - 95e^{-0.05T} = 0$

Conjunto de problemas 6.7

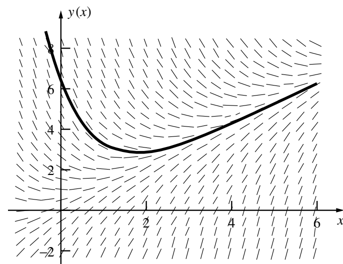
1. $\lim_{t\to\infty} y(t) = 12$ y $y(2)\approx 10.5$



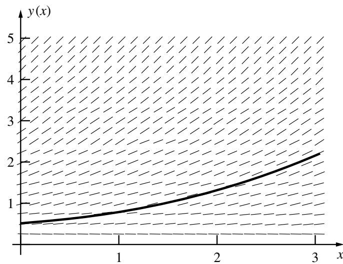
3. $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ y $y(2) \approx 6$



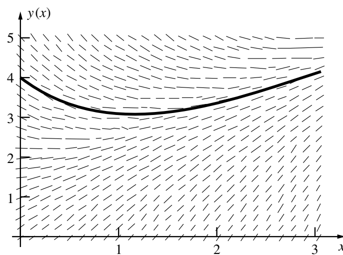
5. La asíntota oblicua es $y = x$



7. $y = \dfrac{1}{2}e^{x/2}$



9. $y = x + 1 + 3e^{-x}$.



11.

x_n	Método de Euler y_n
0.0	3.0
0.2	4.2
0.4	5.88
0.6	8.232
0.8	11.5248
1.0	16.1347

13.

x_n	Método de Euler y_n
0.0	0.0
0.2	0.0
0.4	0.04
0.6	0.12
0.8	0.24
1.0	0.40

15.

x_n	Método de Euler y_n
1.0	1.0
1.2	1.2
1.4	1.488
1.6	1.90464
1.8	2.51412
2.0	3.41921

19. **(a)** $y(x_1) \approx 0$ **(b)** $y(x_2) \approx 0.00099998$
(c) $y(x_{10}) \approx 0.269097$

21. **(a)** $\Delta y = \dfrac{1}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, \hat{y}_1)]$

(c) $x_n = x_{n-1} + h$

$\hat{y}_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})$

$y_n = y_{n-1} + \dfrac{h}{2}[f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_n, \hat{y}_n)]$

23.

x_n	y_n
0.0	2.0
0.2	1.64
0.4	1.3448
0.6	1.10274
0.8	0.90424
1.0	0.74148

25.

x_n	y_n
0.0	0.0
0.2	0.004
0.4	0.024
0.6	0.076
0.8	0.176
1.0	0.340

27.

x_n	y_n
1.0	2.0
1.2	1.312
1.4	0.80609
1.6	0.46689
1.8	0.25698
2.0	0.13568

Conjunto de problemas 6.8

1. $\frac{\pi}{4}$ **3.** $-\frac{\pi}{3}$ **5.** $\frac{\pi}{3}$ **7.** $-\frac{\pi}{6}$ **9.** 0.4567 **11.** 0.1115
13. 0.9548 **15.** 2.038 **17.** 0.6259 **19.** $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{8}$
21. $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{5}{x}$ **23.** $\theta = \tan^{-1}\frac{3}{x} - \tan^{-1}\frac{1}{x}$ **25.** $\frac{1}{9}$ **27.** $\frac{56}{65}$
33. **(a)** $\frac{\pi}{2}$; **(b)** $-\frac{\pi}{2}$
35. **(a)** $\frac{\pi}{2}$; **(b)** $-\frac{\pi}{2}$
37. Las rectas tangentes se aproximan a la vertical.
39. $\dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$ **41.** $\sec x$ **43.** $\dfrac{4x}{\sqrt{1 - 4x^4}}$

45. $x^2\left[\frac{xe^x}{1+e^{2x}} + 3\tan^{-1}(e^x)\right]$ **47.** $\frac{3(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}$

49. $\frac{3}{|x|\sqrt{x^6-1}}$ **51.** $\frac{3(1+\operatorname{sen}^{-1}x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$ **53.** $\frac{2}{x[1+(\ln x^2)^2]}$

55. $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C$ **57.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x + C$ **59.** $\frac{\operatorname{sen} e^2 - \operatorname{sen} 1}{2}$

61. $\frac{\pi}{4}$ **63.** $\frac{\pi}{2}$ **65.** $\frac{1}{2}\arctan 2x + C$

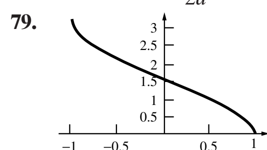
67. $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C$ **69.** $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) + C$

71. $\frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{2|x|}{3}\right) + C$

73. $\theta = \tan^{-1}\frac{7.6}{b} - \tan^{-1}\frac{2.6}{b}$; si $b = 12.9, \theta \approx 0.3335$

77. $\pi b^2 - b^2\cos^{-1}\frac{b}{2a} - 2a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{b}{2a} + \frac{1}{2}b\sqrt{4a^2-b^2}$

79.



$\frac{\pi}{2}$ − arcsen x = arccos x

87. 4.9 pies **89.** $\frac{1}{13}$ rad/s **91.** 1 rev/min

93. 3.96×10^{-4} rad/s

Conjunto de problemas 6.9

13. $2\operatorname{senh} x\cosh x = \operatorname{senh} 2x$

15. $10\operatorname{senh} x\cosh x = 5\operatorname{senh} 2x$ **17.** $3\operatorname{senh}(3x+1)$

19. $\coth x$ **21.** $x^2\operatorname{senh} x + 2x\cosh x$

23. $\cosh 3x\cosh x + 3\operatorname{senh} 3x\operatorname{senh} x$

25. $2\tanh x\cosh 2x + \operatorname{senh} 2x\operatorname{sech}^2 x$

27. $\frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}$ **29.** $-\frac{1}{2(x^2-3x+2)}$

31. $\frac{3x}{\sqrt{9x^2-1}} + \cosh^{-1}3x$ **33.** $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}\cosh^{-1}x}$

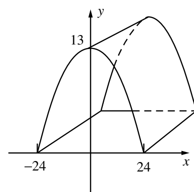
35. $-\csc^2 x\operatorname{sech}^2(\cot x)$ **37.** $\frac{20}{9}$

39. $\frac{1}{2\pi}\operatorname{senh}(\pi x^2+5) + C$ **41.** $2\cosh(2z^{1/4}) + C$

43. $\cosh(\operatorname{sen} x) + C$ **45.** $\frac{1}{4}[\ln(\operatorname{senh} x^2)]^2 + C$ **47.** $\frac{1}{4}$

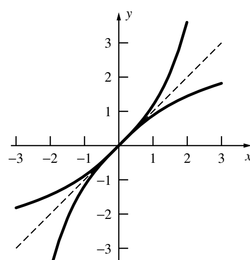
49. $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\operatorname{senh} 2$ **51.** $\pi + \frac{\pi}{2}\operatorname{senh} 2$

55. **(a)**



(b) 42,200 pies^3;
(c) 5640 pies^2

61.



$y = \operatorname{senh} x$ y
$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
son funciones inversas.

6.10 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Falso **3.** Verdadero **5.** Verdadero **7.** Falso **9.** Verdadero **11.** Verdadero **13.** Verdadero **15.** Verdadero **17.** Falso **19.** Verdadero **21.** Falso **23.** Verdadero **25.** Falso **27.** Falso **29.** Falso **31.** Verdadero **33.** Falso **35.** Verdadero **37.** Verdadero **39.** Verdadero **41.** Verdadero **43.** Verdadero **45.** Falso **47.** Verdadero

Problemas de examen

1. $\frac{4}{x}$ **3.** $(2x-4)e^{x^2-4x}$ **5.** $\sec^2 x$ **7.** $\frac{\operatorname{sech}^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

9. $|\sec x|$ **11.** $\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ **13.** $\frac{15e^{5x}}{e^{5x}+1}$

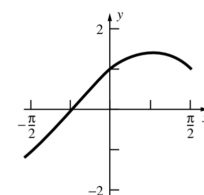
15. $-\frac{e^{\sqrt{x}}\operatorname{sen} e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ **17.** $-\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ **19.** $-\frac{\csc\sqrt{x}\cot\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

21. $20\sec 5x(2\sec^2 5x - 1)$ **23.** $x^{1+x}\left(\ln x + 1 + \frac{1}{x}\right)$

25. $\frac{1}{3}e^{3x-1} + C$ **27.** $-\cos e^x + C$ **29.** $\frac{\ln(e^{x+3}+1)}{e} + C$

31. $2\operatorname{sen}^{-1}2x + C$ **33.** $-\tan^{-1}(\ln x) + C$

35. Creciente: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$; decreciente: $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$; cóncava hacia arriba: $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$; cóncava hacia abajo: $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$; punto de inflexión: $(-\frac{\pi}{4}, 0)$; mínimo global; $(-\frac{\pi}{2}, -1)$ máximo global: $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$



37. **(b)** 1 **(c)** $\frac{1}{15}$

39.

x_n	y_n
1.0	2.0
1.2	2.4
1.4	2.976
1.6	3.80928
1.8	5.02825
2.0	6.83842

41. $y = 1$ **43.** $y = Cx^{-1}$ **45.** $y = 1 + 2e^{-x^2}$

47. $y = -e^x + Ce^{2x}$

Problemas de repaso e introducción del capítulo 7

1. $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$ **3.** $-\frac{1}{2}\cos x^2 + C$ **5.** $\ln|\sec t| + C$

7. $\frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2} + C$ **9.** $\ln x$ **11.** $x^2\operatorname{sen} x$

13. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ **15.** $\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$

17. $\cos 3x\cos 5x = \frac{\cos 8x + \cos 2x}{2}$ **19.** $|a|\cos t$

21. $|a|\cdot|\tan t|$ **23.** $\frac{2x-1}{x(1-x)}$ **25.** $\frac{5x+3}{x(x+1)(x-3)}$

Conjunto de problemas 7.1

1. $\frac{1}{6}(x-2)^6 + C$ **3.** 1302 **5.** $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

7. $\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C$ **9.** $2(4+z^2)^{3/2} + C$

11. $\frac{1}{2}\tan^2 z + C$ **13.** $-2\cos\sqrt{t} + C$ **15.** $\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

17. $\frac{3}{2}x^2 - x + \ln|x+1| + C$ **19.** $-\frac{1}{2}\cos(\ln 4x^2) + C$

21. $6\,\text{sen}^{-1}(e^x) + C$ **23.** $-3\sqrt{1-e^{2x}} + C$ **25.** $1/\ln 3$

27. $x - \ln|\text{sen}\,x| + C$ **29.** $\ln|\sec e^x + \tan e^x| + C$

31. $\tan x + e^{\text{sen}\,x} + C$ **33.** $-\frac{1}{3\,\text{sen}(t^3-2)} + C$

35. $-\frac{1}{3}[\cot(t^3-2) + t^3] + C$ **37.** $\frac{1}{2}e^{\tan^{-1}2t} + C$

39. $\frac{1}{6}\text{sen}^{-1}\left(\frac{3y^2}{4}\right) + C$ **41.** $\frac{1}{3}\cosh x^3 + C$

43. $\frac{1}{3}\text{sen}^{-1}\left(\frac{e^{3t}}{2}\right) + C$ **45.** $\frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

47. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$ **49.** $\frac{1}{3}\tan^{-1}(3x+3) + C$

51. $\frac{1}{18}\ln|9x^2 + 18x + 10| + C$ **53.** $\frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{|\sqrt{2}t|}{3}\right) + C$

55. $\ln(\sqrt{2}+1)$ **57.** π^2

Conjunto de problemas 7.2

1. $xe^x - e^x + C$ **3.** $\frac{1}{5}te^{5t+\pi} - \frac{1}{25}e^{5t+\pi} + C$

5. $x\,\text{sen}\,x + \cos x + C$

7. $(t-3)\,\text{sen}(t-3) + \cos(t-3) + C$

9. $\frac{2}{3}t(t+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(t+1)^{5/2} + C$ **11.** $x\ln 3x - x + C$

13. $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$ **15.** $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$

17. $\frac{2}{9}(e^{3/2}+2)$ **19.** $\frac{1}{4}z^4\ln z - \frac{1}{16}z^4 + C$

21. $t\arctan\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C$ **23.** $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \ln 2$

25. $\frac{2}{9}x^3(x^3+4)^{3/2} - \frac{4}{45}(x^3+4)^{5/2} + C$

27. $\frac{t^4}{6(7-3t^4)^{1/2}} + \frac{1}{9}(7-3t^4)^{1/2} + C$

29. $\frac{z^4}{4(4-z^4)} + \frac{1}{4}\ln|4-z^4| + C$

31. $x\cosh x - \text{senh}\,x + C$

33. $\frac{x}{150}(3x+10)^{50} - \frac{1}{22950}(3x+10)^{51} + C$

35. $\frac{x}{\ln 2}2^x - \frac{1}{(\ln 2)^2}2^x + C$ **37.** $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

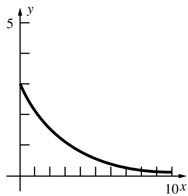
39. $z\ln^2 z - 2z\ln z + 2z + C$ **41.** $\frac{1}{2}e^t(\text{sen}\,t + \cos t) + C$

43. $x^2\,\text{sen}\,x + 2x\cos x - 2\,\text{sen}\,x + C$

45. $\frac{x}{2}[\text{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$

47. $x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x + C$ **65.** 1

67. $9 - \frac{9}{e^3} \approx 8.552$



69. $\frac{\sqrt{2}\pi}{4} - 1$ **71.** $\bar{x} = \frac{e^2+1}{4}, \bar{y} = \frac{e-2}{4}$

73. **(a)** $(x^3-2x)e^x - (3x^2-2)e^x + 6xe^x - 6e^x + C$

(b) $(x^2-3x+1)(-\cos x) - (2x-3)(-\text{sen}\,x) + 2\cos x + C$

87. $e^x(3x^4 - 12x^3 + 38x^2 - 76x + 76)$

Conjunto de problemas 7.3

1. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\text{sen}\,2x + C$ **3.** $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$ **5.** $\frac{8}{15}$

7. $-\frac{1}{12}\cos^3 4x + \frac{1}{10}\cos^5 4x - \frac{1}{28}\cos^7 4x + C$

9. $-\frac{1}{3}\csc 3\theta - \frac{1}{3}\text{sen}\,3\theta + C$

11. $\frac{3}{128}t - \frac{1}{384}\text{sen}\,12t + \frac{1}{3072}\text{sen}\,24t + C$

13. $\frac{1}{2}\cos y - \frac{1}{18}\cos 9y + C$

15. $\frac{1}{16}w - \frac{1}{32}\text{sen}\,2w - \frac{1}{24}\text{sen}^3 w + C$

17. $\frac{1}{3}\left[-x\cos^3 x + \text{sen}\,x - \frac{1}{3}\text{sen}^3 x\right] + C$

19. $\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$ **21.** $\frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$

23. $\frac{1}{2}\tan^4\left(\frac{\theta}{2}\right) - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 2\ln\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| + C$

25. $-\frac{1}{2}\tan^{-2} x + \ln|\tan x| + C$ **27.** $\frac{1}{4}\sec^4 x - \frac{1}{2}\sec^2 x + C$

29. 0 para $m \neq n$, ya que sen $k\pi = 0$ para todos los enteros k.

31. $\frac{\pi^4}{3} + \frac{5\pi^2}{2}$

Conjunto de problemas 7.4

1. $\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$

3. $\frac{2}{27}(3t+4)^{3/2} - \frac{8}{9}(3t+4)^{1/2} + C$

5. $2\sqrt{2} - 2 - 2e\ln\left(\frac{\sqrt{2}+e}{1+e}\right)$

7. $\frac{2}{63}(3t+2)^{7/2} - \frac{4}{45}(3t+2)^{5/2} + C$

9. $2\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + \sqrt{4-x^2} + C$

11. $\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} + C$ **13.** $-\frac{\sqrt{2}}{9} - \frac{1}{2}\sec^{-1}(-3) + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{3}$

15. $-2\sqrt{1-z^2} - 3\,\text{sen}^{-1} z + C$

17. $\ln|\sqrt{x^2+2x+5} + x + 1| + C$

19. $3\sqrt{x^2+2x+5} - 3\ln|\sqrt{x^2+2x+5} + x + 1| + C$

21. $\frac{9}{2}\text{sen}^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right) + \frac{x+2}{2}\sqrt{5-4x-x^2} + C$

23. $\text{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$

25. $\ln|x^2+2x+2| - \tan^{-1}(x+1) + C$

27. $\frac{\pi}{16}\left(\frac{1}{10} + \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$ **29.** $\frac{1}{2}\ln|x^2+9| + C$

31. $2\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + \sqrt{4-x^2} + C$

35. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}, y = -\sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$

Conjunto de problemas 7.5

1. $\ln|x| - \ln|x+1| + C$

3. $-\frac{3}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + C$

5. $3\ln|x+4| - 2\ln|x-1| + C$

7. $4\ln|x+5| - \ln|x-2| + C$

9. $2\ln|2x-1| - \ln|x+5| + C$

11. $\frac{5}{3}\ln|3x-2| + 4\ln|x+1| + C$

13. $2\ln|x| - \ln|x+1| + \ln|x-2| + C$

15. $\ln|2x-1| - \ln|x+3| + 3\ln|x-2| + C$

17. $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{8}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln|x-1| + C$

19. $\frac{1}{2}x^2 - 2\ln|x| + 7\ln|x+2| + 7\ln|x-2| + C$

21. $\ln|x-3| - \frac{4}{x-3} + C$

23. $-\frac{3}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C$

25. $2\ln|x| + \ln|x-4| + \frac{1}{x-4} + C$

27. $-2\ln|x| + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\ln|x^2+4| + C$

29. $-2\ln|2x-1| + \frac{3}{2}\ln|x^2+9| + C$

31. $-\frac{2}{125}\ln|x-1| - \frac{1}{25(x-1)}$
$+ \frac{2}{125}\ln|x+4| - \frac{1}{25(x+4)} + C$

33. $\operatorname{sen} t - \frac{50}{13}\ln|\operatorname{sen} t + 3| - \frac{68}{13}\tan^{-1}(\operatorname{sen} t - 2)$
$- \frac{41}{26}\ln|\operatorname{sen}^2 t - 4\operatorname{sen} t + 5| + C$

35. $\frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \frac{5}{2(x^2+1)} + C$

37. $\frac{3}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{2x-5}{2(x^2+4)} + C$

39. $\frac{1}{8}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}}$

41. $y(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$; $y(3) \approx 0.953$

43. $y(t) = \frac{8000e^{2.4t}}{7+e^{2.4t}}$; $y(3) \approx 7958.4$

45. $y(t) = \frac{Le^{KLt}}{\left(\frac{L-y_0}{y_0}\right) + e^{KLt}}$

47. Si $y_0 < L$, entonces $y'(0) = Ky_0(L - y_0) > 0$ y la población al inicio está creciendo.

49. **(a)** $y = \frac{16}{1+7e^{-\left(\frac{1}{50}\ln\frac{7}{3}\right)t}}$ **(b)** $y(90) \approx 6.34$ mil millones
(c) La población será de 9 mil millones en 2055.

51. **(a)** $x(t) = \frac{ab(1-e^{(a-b)kt})}{b - ae^{(a-b)kt}}$ **(c)** 1.65 gramos
(d) $x(t) = a\left(\frac{akt}{akt+1}\right)$

53. $y(t) = \frac{ACe^{(A+B)kt} - B}{1 + Ce^{(A+B)kt}}$

Conjunto de problemas 7.6

1. $-\frac{1}{5}e^{-5x}(\frac{1}{5} + x) + C$ **3.** $\frac{1}{2}[\ln 2]^2$

5. $\frac{1}{64}[24x + 8\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 8x] + C$

7. $\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{3}{5}\right) \approx 0.0527$ **9.** $\frac{2}{15}\left[77\sqrt{7} + 8\sqrt{2}\right] \approx 28.67$

11. 0

13. **(a)** $\frac{2}{135}(9x-2)(3x+1)^{3/2} + C$
(b) $\frac{2}{135}(9e^x-2)(3e^x+1)^{3/2} + C$

15. **(a)** $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{4x+3}{4x-3}\right| + C$ **(b)** $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{4e^x+3}{4e^x-3}\right| + C$

17. **(a)** $\frac{1}{16}\left[x(4x^2-9)\sqrt{9-2x^2} + \frac{81}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right)\right] + C$

(b) $\frac{1}{16}\left[\operatorname{sen} x(4\operatorname{sen}^2 x - 9)\sqrt{9 - 2\operatorname{sen}^2 x}\right.$
$\left. + \frac{81}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\operatorname{sen} x}{3}\right)\right] + C$

19. **(a)** $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln|\sqrt{3}x + \sqrt{5+3x^2}| + C$
(b) $\frac{\sqrt{3}}{6}\ln|\sqrt{3}x^2 + \sqrt{5+3x^4}| + C$

21. **(a)** $\ln|(t+1) + \sqrt{t^2+2t-3}| + C$
(b) $\ln\left|\left(t + \frac{3}{2}\right) + \sqrt{t^2+3t-5}\right| + C$

23. **(a)** $\frac{2}{27}(3y-10)\sqrt{3y+5} + C$
(b) $\frac{2}{27}(3\operatorname{sen} t - 10)\sqrt{3\operatorname{sen} t + 5} + C$

25. $\frac{1}{12}(\operatorname{senh} 6t - 6t) + C$

27. $\frac{1}{3}(1 - \cos t)\sqrt{2\cos t + 1} + C$

29. $-\frac{2}{5}\sqrt{\cos t + 1}\left[\cos^2 t - \frac{4}{3}(\cos t - 2)\right] + C$

31. $\pi - 2 \approx 1.14159$ **33.** $\frac{231\pi}{2048} \approx 0.35435$

35. 0.11083 **37.** 1.10577 **39.** $4\ln 2 + 2 \approx 4.77259$
41. $e - 1 \approx 1.71828$ **43.** $e - 1 \approx 1.71828$
45. $c \approx 0.59601$ **47.** $c \approx 0.16668$ **49.** $c \approx 9.2365$

51. $\bar{x} = \frac{8}{3(c+1)}$; $c = \frac{1}{3}$

53. $\bar{x} = \frac{cu}{u+18} + 3$ donde $u = -18e^{-c/3}$; $c \approx 5.7114$

55. **(a)** $\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ **(b)** $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

57. **(a)** $\operatorname{erf}(x)$ es creciente en $(0, \infty)$.
(b) $\operatorname{erf}(x)$ no es cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$.

59. **(a)** $C(x)$ es creciente en $(0, 1) \cup (\sqrt{3}, 2)$.
(b) $C(x)$ es cóncava hacia arriba en $(\sqrt{2}, 2)$.

7.7 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Verdadero **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Verdadero
9. Verdadero **11.** Falso **13.** Verdadero **15.** Verdadero
17. Falso **19.** Verdadero **21.** Falso **23.** Verdadero
25. Falso **27.** Verdadero

Problemas de examen

1. 2 **3.** $e - 1$ **5.** $\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 2y - 2\ln|1+y| + C$

7. $\frac{1}{2}\ln|y^2 - 4y + 2| + C$ **9.** $e^t + 2\ln|e^t - 2| + C$

11. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$ **13.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{y^2 + \frac{2}{3}} + y\right| + C$

15. $-\ln|\ln|\cos x|| + C$ **17.** $\cosh x + C$

19. $-x\cot x - \frac{1}{2}x^2 + \ln|\operatorname{sen} x| + C$ **21.** $\frac{1}{4}[\ln(t^2)]^2 + C$

23. $-\frac{3}{82}e^{t/3}(9\cos 3t - \operatorname{sen} 3t) + C$

25. $-\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$ **27.** $\frac{1}{6}\sec^3(2x) - \frac{1}{2}\sec(2x) + C$

29. $\frac{2}{5}\tan^{5/2} x + \frac{2}{9}\tan^{9/2} x + C$ **31.** $-\sqrt{9 - e^{2y}} + C$

33. $3\operatorname{sen} x + C$ **35.** $\frac{1}{4}\tan^{-1}(e^{4x}) + C$

37. $\frac{2}{3}(w+5)^{3/2} - 10(w+5)^{1/2} + C$

39. $-\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{\cos^2 y}{3}\right) + C$

41. $\ln|x| - \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\ln|x^2+3| + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$

43. (a) $\frac{A}{2x+1} + \frac{B}{(2x+1)^2} + \frac{C}{(2x+1)^3}$

(b) $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{2-x} + \frac{D}{(2-x)^2} + \frac{E}{(2-x)^3}$

(c) $\frac{Ax+B}{x^2+x+10} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+10)^2}$

(d) $\frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1+x} + \frac{D}{(1+x)^2}$
$+ \frac{Ex+F}{x^2-x+10} + \frac{Gx+H}{(x^2-x+10)^2}$

(e) $\frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{(x+3)^3} + \frac{D}{(x+3)^4}$
$+ \frac{Ex+F}{x^2+2x+10} + \frac{Gx+H}{(x^2+2x+10)^2}$

(f) $\frac{Ax+B}{2x^2+x+10} + \frac{Cx+D}{(2x^2+x+10)^2} + \frac{Ex+F}{(2x^2+x+10)^3}$

45. $\sqrt{5} + 4\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

47. $2\pi \ln \frac{32}{25}$ **49.** $4\pi[2 - \ln 3 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2]$ **51.** $\ln 7 - \frac{6}{7}$

53. $\ln\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)$

55. (a) $\frac{\operatorname{sen} x}{2}\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + 4} + 2\ln|\operatorname{sen} x + \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + 4}| + C$

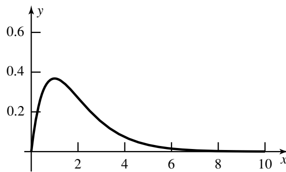
(b) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2x}{1-2x}\right| + C$

57. $c \approx 0.5165$

Problemas de repaso e introducción del capítulo 8

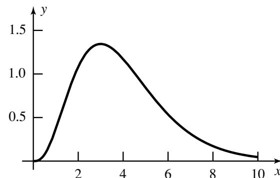
1. $\frac{5}{3}$ **3.** 6 **5.** 2 **7.** 1 **9.** 0 **11.** ∞ **13.** $\frac{\pi}{2}$

15.



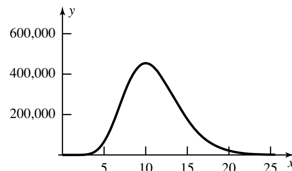
$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0.$

17.



$\lim_{x\to\infty} x^3e^{-x} = 0.$

19.



$\lim_{x\to\infty} x^{10}e^{-x} = 0.$

21.

a	1	2	4	8	16
$1 - e^{-a}$	0.632	0.865	0.982	0.99966	0.999999887

23.

a	1	2	4	8	16
$\ln\left(\sqrt{1+a^2}\right)$	0.3466	0.8047	1.4166	2.0872	2.7745

25.

a	2	4	8	16
$1 - \frac{1}{a}$	0.5	0.75	0.875	0.9375

27.

a	1	1/2	1/4	1/8	1/16
$4 - 2\sqrt{a}$	2	2.58579	3	3.29289	3.5

Conjunto de problemas 8.1

1. 1 **3.** -1 **5.** $-\frac{2}{7}$ **7.** $-\infty$ **9.** 0

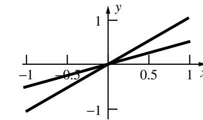
11. $-\frac{3}{2}$ **13.** $-\frac{2}{7}$ **15.** $-\frac{1}{4}$ **17.** $-\infty$ **19.** $-\frac{1}{24}$

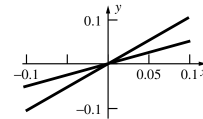
21. $-\infty$ **23.** 1

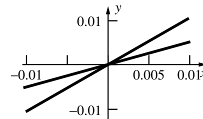
27. (a) $\frac{3}{4}$; **(b)** $\frac{1}{2}$

29. $c = 1$ **31.** $4\pi b^2$ **35.** $\frac{1}{24}$ **37.** 2

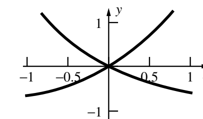
39. La razón de las pendientes es 1/2, lo cual indica que el límite de la razón debe ser alrededor de 1/2.

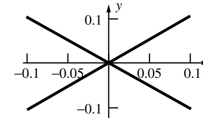


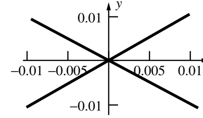




41. La razón de las pendientes es $-1/1 = -1$, lo cual indica que el límite de esta razón debe ser alrededor de -1.



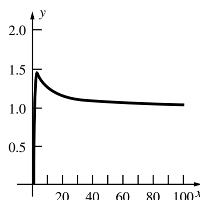




Conjunto de problemas 8.2

1. 0 **3.** 0 **5.** 3 **7.** 0 **9.** ∞ **11.** 0 **13.** 1
15. 1 **17.** 0 **19.** e^4 **21.** 1 **23.** 1 **25.** 0
27. 1 **29.** 0 **31.** ∞ **33.** 1
35. El límite no existe. **37.** 0 **39.** 1
41. **(a)** 1; **(b)** 1; **(c)** $\ln a$; **(d)** ∞

43. Cuando $x \to 0^+$, $y \to 0$. Cuando $x \to \infty$, $y \to 1$.
Valor máximo $e^{1/e}$ at $x = e$.



45. $1/(k + 1)$
47. **(a)** 3.162; **(b)** 4.163; **(c)** 4.562
49. No hay mínimo absoluto; mínimo absoluto en $x \approx 25$

Conjunto de problemas 8.3

1. Diverge **3.** $\frac{1}{e}$ **5.** Diverge **7.** 100,000
9. Diverge **11.** Diverge **13.** $\frac{1}{2}(\ln 2 + 1)$ **15.** $-\frac{1}{4}$
17. Diverge **19.** $\frac{\pi}{3}$ **21.** π **23.** $\frac{1}{2}$ **25.** $\frac{1}{2}\ln 3$
29. $1,250,000
31. **(b)** $\mu = \dfrac{a + b}{2}; \sigma^2 = \dfrac{(b - a)^2}{12}$; **(c)** $\dfrac{1}{5}$
35. **(a)** $C = 3$ y $M = \dfrac{4 \times 10^4}{3}$; **(b)** $\sigma^2 = \dfrac{4 \times 10^8}{3}$
(c) $^6/_{25}$ de 1% gana más de $100,000

41. $\displaystyle\int_1^{100} \frac{1}{x^2}dx = 0.99; \int_1^{100} \frac{1}{x^{1.1}}dx \approx 3.69$

$\displaystyle\int_1^{100} \frac{1}{x^{1.01}}dx \approx 4.50; \int_1^{100} \frac{1}{x}dx = \ln 100 \approx 4.61;$

$\displaystyle\int_1^{100} \frac{1}{x^{0.99}}dx \approx 4.71$

43. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-0.5x^2)\, dx \approx 0.6827;$

$\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-0.5x^2)\, dx \approx 0.9545;$

$\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-0.5x^2)\, dx \approx 0.9973;$

$\displaystyle\int_{-4}^{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-0.5x^2)\, dx \approx 0.9999$

Conjunto de problemas 8.4

1. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$ **3.** $2\sqrt{7}$ **5.** $\frac{\pi}{2}$ **7.** Diverge **9.** $\frac{21}{2}$
11. $\frac{1}{2}(2^{2/3} - 10^{2/3})$ **13.** Diverge **15.** Diverge
17. Diverge **19.** Diverge **21.** Diverge
23. Diverge **25.** Diverge **27.** $2\sqrt{2}$ **29.** Diverge
31. $\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$ **35.** 0 **37.** Diverge **41.** 6
43. **(a)** 3 **45.** No **49.** Converge
55. **(a)** $C = \beta^\alpha/\Gamma(\alpha)$; **(b)** $\mu = \alpha/\beta$; **(c)** $\sigma^2 = \alpha/\beta^2$
57. **(a)** $\frac{\pi}{2}$; **(b)** π

8.5 Revisión del capítulo

Examen de conceptos

1. Verdadero **3.** Falso **5.** Falso **7.** Verdadero
9. Verdadero **11.** Falso **13.** Verdadero **15.** Verdadero
17. Falso **19.** Verdadero **21.** Verdadero **23.** Verdadero
25. Falso

Problemas de examen

1. 4 **3.** 0 **5.** 2 **7.** 0 **9.** 0 **11.** 1 **13.** 0
15. 0 **17.** 1 **19.** 1 **21.** $\frac{1}{2}e^2$ **23.** Diverge
25. $1 - \frac{\pi}{4}$ **27.** Diverge **29.** $\frac{1}{\ln 2}$ **31.** 6
33. Diverge **35.** $\frac{\pi}{4}$ **37.** 0
39. Converge: $p > 1$; diverge: $p \leq 1$
41. Converge **43.** Diverge

Índice

T

U

V

W

Créditos de las fotografías

Guardas frontales

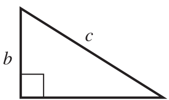
Descartes	Frans Hals/Louvre
Newton	Biblioteca del Congreso
Leibniz	The Granger Collection, Nueva York
Euler	Biblioteca del Congreso
Kepler	Biblioteca del Congreso
Pascal	Cortesía de International Business Machines Corporation. El uso no autorizado está prohibido.
L'Höpital	The Granger Collection, Nueva York
Bernoulli	The Granger Collection, Nueva York
Lagrange	Biblioteca Pública de Nueva York
Gauss	The Granger Collection, Nueva York
Cauchy	Corbis
Riemann	The Granger Collection, New York
Lebesgue	The Granger Collection, New York
Agnesi	Biblioteca del Congreso
Weierstrass	Corbis
Kovalevsky	Biblioteca del Congreso
Gibbs	Corbis

Texto

p. 219	Kennedy Space Center/NASA
p. 224	Susan Van Etten/PhotoEdit
p. 362	David Frazier/Photo Researchers, Inc.
p. 418	Scala/Art Resource, NY

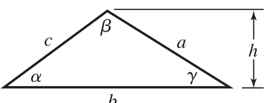
GEOMETRÍA

Triángulos



Triángulo rectángulo

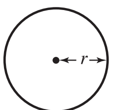
Teorema de Pitágoras
$a^2 + b^2 = c^2$



Cualquier triángulo

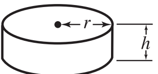
Ángulos $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
Área $A = \frac{1}{2}bh$

Círculos



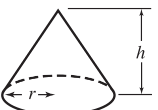
Circunferencia $C = 2\pi r$
Área $A = \pi r^2$

Cilindros



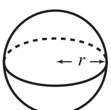
Área de la superficie $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
Volumen $V = \pi r^2 h$

Conos



Área de la superficie $S = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$
Volumen $V = \frac{1}{3}\pi r^3$

Esferas



Área de la superficie $S = 4\pi r^2$
Volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

CONVERSIONES

1 pulgada = 2.54 centímetros	1 kilómetro ≈ 0.62 millas
1 litro = 1000 centímetros cúbicos	1 litro ≈ 1.057 cuartos
1 kilogramo ≈ 2.20 libras	1 libra ≈ 453.6 gramos
π radianes = 180 grados	1 pie cúbico ≈ 7.48 galones

Doblar aquí

INTEGRALES

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
2. $\int u^n\,d = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C, n \neq -1$
3. $\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$
4. $\int e^u\,du = e^u + c$
5. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
6. $\int \text{sen}\,u\,du = -\cos u + C$
7. $\int \cos u\,du = \text{sen}\,u + C$
8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
11. $\int \csc \cot u\,du = -\csc u + C$
12. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$
13. $\int \cot u\,du = \ln|\text{sen}\,u| + C$
14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
15. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$
16. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \text{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$
17. $\int \frac{1}{a^2 + u^2}\,du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$
18. $\int \frac{1}{a^2 - u^2}\,du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$
19. $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}\,du = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$

Doblar aquí

Formulario que acompaña a

CÁLCULO, 9A EDICIÓN

Varberg, Purcell y Rigdon

DERIVADAS

$D_x x^r = rx^{r-1}$	$D_x\lvert x\rvert = \frac{\lvert x\rvert}{x}$
$D_x \text{ sen } x = \cos x$	$D_x \cos x = -\text{sen } x$
$D_x \tan x = \sec^2 x$	$D_x \cot x = -\csc^2 x$
$D_x \sec x = \sec x \tan x$	$D_x \csc x = -\csc x \cot x$
$D_x \text{ senh } x = \cosh x$	$D_x \coth x = -\text{csch}^2 x$
$D_x \cosh x = \text{senh}^2 x$	$D_x \text{ sech } x = -\text{sech } x \tanh x$
$D_x \tanh x = \text{sech}^2 x$	$D_x \text{ csch } x = -\text{csch } x \coth x$
$D_x \ln x = \frac{1}{x}$	$D_x \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
$D_x e^x = e^x$	$D_x a^x = a^x \ln a$
$D_x \text{ sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$D_x \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$D_x \tan^{-1} x = \frac{1}{1 + x^2}$	$D_x \sec^{-1} x = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2 - 1}}$

Identidades básicas

$\tan t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$ $\quad \cot t = \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$ $\quad \cot t = \dfrac{1}{\tan t}$

$\sec t = \dfrac{1}{\cos t}$ $\quad \operatorname{cst} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}$ $\quad \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$

$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$ $\quad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$

Identidades de cofunción

$\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$ $\quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t$ $\quad \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cot t$

Identidades impar-par

$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$ $\quad \cos(-t) = \cos t$ $\quad \tan(-t) = -\tan t$

Fórmulas para la suma

$\operatorname{sen}(s+t) = \operatorname{sen} s \cos t + \cos s \operatorname{sen} t$ $\quad \operatorname{sen}(s-t) = \operatorname{sen} \cos t - \cos s \operatorname{sen} t$

$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$ $\quad \cos(s-t) = \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$

$\tan(s+t) = \dfrac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$ $\quad \tan(s-t) = \dfrac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$

Fórmulas para el doble de un ángulo

$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$ $\quad \tan 2t = \dfrac{2 \tan t}{1 - \tan^2 t}$

$\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t = 2\cos^2 t - 1$

Fórmula para la mitad de un ángulo

$\operatorname{sen}\dfrac{t}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos t}{2}}$ $\quad \cos\dfrac{t}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos t}{2}}$ $\quad \tan\dfrac{t}{2} = \dfrac{1 - \cos t}{\operatorname{sen} t}$

Fórmula para el producto

$2 \operatorname{sen} s \cos t = \operatorname{sen}(s+t) + \operatorname{sen}(s-t)$ $\quad 2 \cos s \cos t = \cos(s+t) + \cos(s-t)$

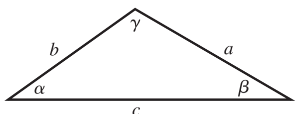
$2 \cos s \operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(s+t) - \operatorname{sen}(s-t)$ $\quad 2 \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t = \cos(s-t) - \cos(s+t)$

Fórmulas de factorización

$\operatorname{sen} s + \operatorname{sen} t = 2\cos\dfrac{s-t}{2}\operatorname{sen}\dfrac{s+t}{2}$ $\quad \cos s + \cos t = 2\cos\dfrac{s+t}{2}\cos\dfrac{s-t}{2}$

$\operatorname{sen} s - \operatorname{sen} t = 2\cos\dfrac{s+t}{2}\operatorname{sen}\dfrac{s-t}{2}$ $\quad \cos s - \cos t = -2\operatorname{sen}\dfrac{s+t}{2}\operatorname{sen}\dfrac{s-t}{2}$

Leyes de los senos y de los cosenos

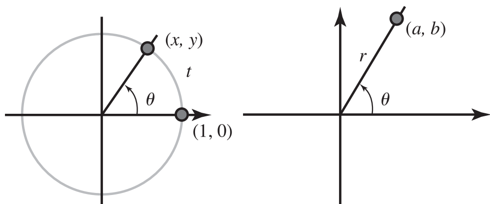


$\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Doblar aquí

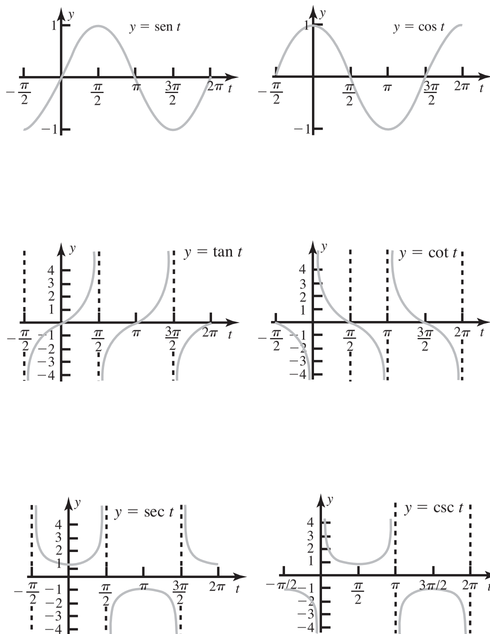
TRIGONOMETRÍA



$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}\theta = y = \dfrac{b}{r}$ $\quad \cos t = \cos\theta = x = \dfrac{a}{r}$

$\tan t = \tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{b}{a}$ $\quad \cot t = \cot\theta = \dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}$

Gráficas



Doblar aquí

Funciones trigonométricas inversas

$y = \operatorname{sen}^{-1} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sen} y, -\pi/2 \le y \le \pi/2$

$y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y, 0 \le y \le \pi$

$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y, -\pi/2 < y < \pi/2$

$y = \sec^{-1} x \Leftrightarrow x = \sec y, 0 \le y \le \pi, y \ne \pi/2$

$\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$

Funciones hiperbólicas

$\operatorname{senh} x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $\quad \cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$ $\quad \coth x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{sen} x}$

$\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$ $\quad \operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$

Series

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, -1 < x < 1$

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots, -1 < x \le 1$

$\tan^{-1} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots, -1 \le x \le 1$

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

$\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$

$\operatorname{senh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$

$\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$

$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \cdots, -1 < x < 1$

$\binom{p}{k} = \dfrac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!}$

Tabla de integrales

FORMAS ELEMENTALES

1 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2 $\int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C \quad \text{si } n \neq -1$

3 $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4 $\int e^u\,du = e^u + C$

5 $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

6 $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

7 $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

8 $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

9 $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

10 $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

11 $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

12 $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$

13 $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

14 $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

15 $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

16 $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

17 $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

18 $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

19 $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$

FORMAS TRIGONOMÉTRICAS

20 $\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

21 $\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

22 $\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$

23 $\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$

24 $\int \operatorname{sen}^3 u\,du = -\frac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$

25 $\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$

26 $\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

27 $\int \cot^3 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

28 $\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

29 $\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

30 $\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C \quad \text{si } a^2 \neq b^2$

31 $\int \cos au \cos bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C \quad \text{si } a^2 \neq b^2$

32 $\int \operatorname{sen} au \cos bu\,du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C \quad \text{si } a^2 \neq b^2$

33 $\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,du$

34 $\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$

35 $\int \tan^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\,du \quad \text{si } n \neq 1$

36 $\int \cot^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\,du \quad \text{si } n \neq 1$

37 $\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} u \tan u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du \quad \text{si } n \neq 1$

38 $\int \csc^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\csc^{n-2} u \cot u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\,du \quad \text{si } n \neq 1$

39a $\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u\,du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^m u\,du \quad \text{si } n \neq -m$

39b $\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u\,du = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u\,du \quad \text{si } m \neq -n$

40 $\int u \operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$

41 $\int u \cos u\,du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

42 $\int u^n \operatorname{sen} u\,du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du$

43 $\int u^n \cos u\,du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\,du$

FORMAS QUE INCLUYEN $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

44 $\displaystyle\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

45 $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

46 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u}\, du = \sqrt{u^2 + a^2} - a \ln\left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right) + C$

47 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}\, du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \sec^{-1}\frac{u}{a} + C$

48 $\displaystyle\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

49 $\displaystyle\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

50 $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \mp\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2 u} + C$

51 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u^2}\, du = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

52 $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$

53 $\displaystyle\int (u^2 \pm a^2)^{3/2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm 5a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

FORMAS QUE INCLUYEN $\sqrt{a^2 - u^2}$

54 $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

55 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\, du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

56 $\displaystyle\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

57 $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

58 $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$

59 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}\, du = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

60 $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

61 $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$

62 $\displaystyle\int (a^2 - u^2)^{3/2}\, du = \frac{u}{8}(5a^2 - 2u^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

FORMAS EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

63 $\displaystyle\int ue^u\, du = (u - 1)e^u + C$

64 $\displaystyle\int u^n e^u\, du = u^n e^u - n\int u^{n-1} e^u du$

65 $\displaystyle\int \ln u\, du = u \ln u - u + C$

66 $\displaystyle\int u^n \ln u\, du = \frac{u^{n+1}}{n + 1}\ln u - \frac{u^{n+1}}{(n + 1)^2} + C$

67 $\displaystyle\int e^{au} \operatorname{sen} bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a \operatorname{sen} bu - b \cos bu) + C$

68 $\displaystyle\int e^{au} \cos bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a \cos bu + b \operatorname{sen} bu) + C$

FORMAS TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

69 $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1} u\, du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1 - u^2} + C$

70 $\displaystyle\int \tan^{-1} u\, du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) + C$

71 $\displaystyle\int \sec^{-1} u\, du = u \sec^{-1} u - \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| + C$

72 $\displaystyle\int u \operatorname{sen}^{-1} u\, du = \frac{1}{4}(2u^2 - 1)\operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u}{4}\sqrt{1 - u^2} + C$

73 $\displaystyle\int u \tan^{-1} u\, du = \frac{1}{2}(u^2 + 1)\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$

74 $\displaystyle\int u \sec^{-1} u\, du = \frac{u^2}{2}\sec^{-1} u - \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - 1} + C$

75 $\displaystyle\int u^n \operatorname{sen}^{-1} u\, du = \frac{u^{n+1}}{n + 1}\operatorname{sen}^{-1} u - \frac{1}{n + 1}\int \frac{u^{n+1}}{\sqrt{1 - u^2}}\, du \quad \text{si } n \neq -1$

76 $\displaystyle\int u^n \tan^{-1} u\, du = \frac{u^{n+1}}{n + 1}\tan^{-1} u - \frac{1}{n + 1}\int \frac{u^{n+1}}{1 + u^2}\, du \quad \text{si } n \neq -1$

77 $\displaystyle\int u^n \sec^{-1} u\, du = \frac{u^{n+1}}{n + 1}\sec^{-1} u - \frac{1}{n + 1}\int \frac{u^n}{\sqrt{u^2 - 1}}\, du \quad \text{si } n \neq -1$